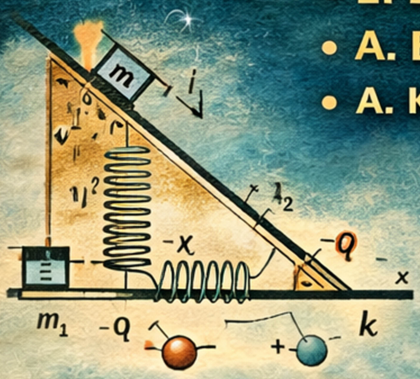
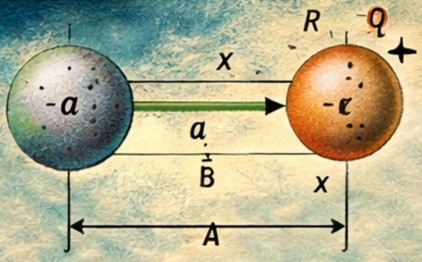
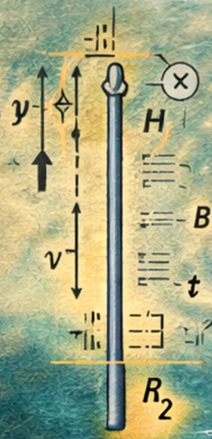
FÍSICA

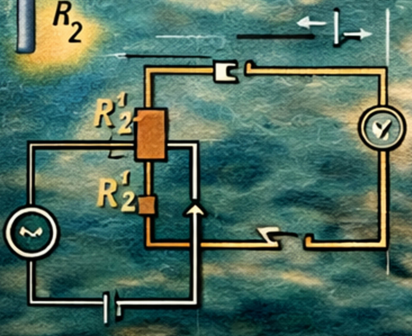
EN EJEMPLOS Y PROBLEMAS

- E. BÚTIKOV
- A. BÍKOV
- A. KONDRÁTIEV









EDITORIAL MIR

E. Bútikov, A. Bíkov, A. Kondrátiev

FISICA

en ejemplos y problemas

Editorial Mir Moscú

FÍSICA EN EJEMPLOS Y PROBLEMAS

Е. И. Бутиков, А. А. Быков, А. С. Кондратьев

ФИЗИКА
В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Издательство «Наука»
Москва

E. Bútikov, A. Bíkov, A. Kondrátiev

FISICA

en ejemplos y problemas

Editorial Mir Moscú

Traducido del ruso por el ingeniero
Antonio Ballesteros Elias

A NUESTROS LECTORES:

Mir edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica, manuales para los centros de ensefianza superior y escuelas tecnológicas, literatura sobre ciencias naturales y médicas. También en éstas se incluyen monografías, libros de divulgación cientifica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.

Impreso en la URSS

На испанском языке

ISBN 5-03-002058-6 (исп.)
ISBN 5-02-014057-0 (русск.)

© Издательство «Наука». 1989
© traducción al español, A. Ballesteros, 1991

INDICE

Prólogo 8

I. Cinemática 11

1. Paso del río (13). 2. ¿Cómo adelantar al autobús? (15). 3. El radio de curvatura (17). 4. Caída del balón (19). 5. Al blanco con la velocidad inicial mínima (21). 6. Al blanco tras la pared (24). 7. Región bajo fuego (26). 8. El barro de las ruedas (29). 9. Gotas de una rueda en rotación (31).

II. Dinámica y leyes de conservación 35

1. La polea inmóvil (37). 2. Problema no físico (39). 3. El trineo en la montaña (41). 4. Tablas sobre un plano inclinado (44). 5. Una bolita en una varilla en rotación (45). 6. Una moneda sobre un soporte horizontal (47). 7. Un bloque en un plano inclinado (49). 8. Un bloque sobre una cuña móvil (52). 9. Bolitas en un hilo largo (54). 10. Una bala atraviesa un globo (55). 11. La tabla que se desliza (57). 12. Una bolita sobre una varilla (59). 13. Rizo normal (61). 14. Dos bolitas ligadas (65). 15. Una varilla con bolitas (69). 16. La paradoja de la energía cinética (71). 17. Vuelo espacial fantástico (74). 18. Variación de la órbita (78). 19. La energía de un satélite (80). 20. Retorno de la órbita (81). 21. Un meteorito (87). 22. Dispersión de las partículas α (91). 23. Choque de una bola con una cuña (93). 24. Duración del choque (98). 25. Choque de dos varillas (102). 26. Choque de tres varillas (107). 27. Una bola elástica y la pared (109). 28. Balón de fútbol (112). 29. Rebote de la superficie de la pared (114).

III. Estática 119

1. Escalera junto a la pared (119). 2. Acuñamiento (121). 3. Equilibrio en una copa (124). 4. Péndulo con rozamiento (127). 5. Polea con rozamiento en el eje (129). 6. ¿Es estable el equilibrio? (132). 7. Troncos en la caja de carga (133). 8. Cable en el proís (135).

IV. Mecánica de los fluidos 138

1. El embudo volcado (138). 2. Bolas flotantes (140). 3. Un famoso problema (142). 4. Reacción del chorro saliente (143). 5. Salida de un líquido a velocidad constante (146). 6. Golpe de ariete (148). 7. Ariete hidráulico (152). 8. Caída estacionaria en el seno de un líquido (154). 9. Frenado en un líquido viscoso (156).

V. Física molecular y termodinámica 159

1. Barómetro de mercurio deteriorado (160). 2. Bomba de vacío (162). 3. Oscilaciones del émbolo (164). 4. Un émbolo en un cilindro

cerrado (166). 5. Número de moléculas en la atmósfera (168). 6. Frenado de un satélite en las capas superiores de la atmósfera (171). 7. Gas en un recipiente con pared intermedia (176). 8. Separación de isótopos (178). 9. Vaso Dewar (180). 10. Capacidad calorífica de un gas perfecto (185). 11. Establecimiento del equilibrio (187). 12. Medición de la razón de las capacidades caloríficas (190). 13. Salida del gas por un orificio (191). 14. Relleno de un recipiente vaciado (195). 15. Proceso cíclico (197). 16. Hielo artificial (199). 17. Calefacción dinámica (201). 18. Intersección de la isoterma y la adiabática (205). 19. Presión del aire húmedo (208). 20. El líquido en un tubo capilar (209). 21. Presión del vapor sobre una superficie curvada (212).

VI. Electrostática 216

1. Una carga dentro de una esfera conductora (218). 2. Carga entre dos esferas (221). 3. Una semiesfera cargada (223). 4. Un dipolo junto una pared conductora (225). 5. Campo eléctrico de un dipolo (228). 6. Interacción de dipolos (232). 7. Un dipolo y una carga puntual (235). 8. Esfera cargada seccionada (239). 9. Paradoja de la energía electrostática (242). 10. Gotas de líquido cargadas (246). 11. Conexión de condensadores (250). 12. Conmutaciones en un circuito con condensadores (254). 13. Capacidad de una batería de condensadores (255). 14. Transformaciones energéticas en un condensador (258).

VII. Corriente eléctrica 262

1. Cables y bornas (263). 2. Medición de las resistencias en un circuito (264). 3. Resistencia de un circuito (266). 4. ¿Por qué cambia la indicación de un amperímetro? (269). 5. Un circuito más con reóstato (270). 6. Fuente de corriente continua (271). 7. Conexión en serie de las fuentes de corriente (273). 8. Conexión en paralelo de las fuentes de corriente (275). 9. Batería de elementos iguales (278). 10. Electromotor de corriente continua (280). 11. Condensadores en un circuito con corriente (283). 12. Circuito con «memoria» (285). 13. Procesos transitorios en un circuito con condensador (286). 14. Resonancia en un circuito en serie de corriente alterna (292). 15. Inversor de fase (294). 16. Transformador con núcleo (296). 17. Transformador con núcleo complejo (298). 18. Un extraño voltímetro (300). 19. Transformaciones energéticas en el generador (303). 20. Un cuadro que cae en el campo magnético (305). 21 Procesos transitorios en un electromotor (309). 22. Un diodo en un circuito eléctrico (312).

VIII. Oscilaciones y ondas 317

1. Una moneda en un soporte en vibración (318). 2. Movimiento de una moneda por un soporte en vibración (320). 3. Péndulo combinado (322). 4. Péndulo asimétrico (325). 5. Circuito oscilante con fuente de corriente y su analogía mecánica (329). 6. Péndulo doble (333). 7. Un reloj suspendido de largos cordones (335). 8. Oscilaciones propias del péndulo doble (336). 9. Oscilaciones forzadas (340). 10. Amortiguamiento de las oscilaciones (343). 11. Oscilaciones no sinusoidales (346). 12. Oscilaciones de un aro (349). 13. Ondas en un anillo en rotación (351). 14. Excitación de ondas en una cuerda (352). 15. Radiación direccional de ondas de radio (radioeléctricas (358).

IX. Óptica 361

1. Sextante y reflector angular (362). 2. Reflejo de sol (365). 3. Refracción de la luz en una cuña de vidrio (368). 4. Rayos X en medicina (370). 5. Imagen de objetos volumétricos (372). 6. Enfoque de un haz de rayos paralelos (374). 7. Radiación de Cherenkov (377). 8. Enfoque de una cámara fotográfica (381). 9. Faroles a distinta distancia (384). 10. La perspectiva en la fotografía (386). 11. Posición del diafragma y la perspectiva (388). 12. Exposición al fotografiar (391). 13. Interferencia de la luz procedente de una fuente extendida (393).

X. Física relativista y cuántica 396

1. Principio de relatividad (398). 2. Excitación del átomo durante el choque (401). 3. Transformaciones mutuas de los electrones y fotones (403). 4. Efecto Doppler (406). 5. Vela fotónica (410). 6. El efecto fotoeléctrico y los rayos X (412). 7. Haz electrónico estrecho (415). 8. El átomo de hidrógeno y las relaciones de indeterminación (418). 9. El núcleo atómico y las relaciones de indeterminación (421). 10. Principio de equivalencia (422).

PROLOGO

La resolución de problemas es parte inseparable del estudio de pleno valor de la física a cualquier nivel: desde el inicial, o sea escolar, hasta la enseñanza física especial.

Podemos juzgar acerca del grado de comprensión de las leyes de física por la habilidad de su empleo para analizar fenómenos físicos concretos, es decir, para resolver problemas. La experiencia de la enseñanza muestra que, para los estudiantes, la mayor dificultad reside en la pregunta «¿cómo empezar?», o sea, no la propia aplicación de las leyes de física, sino, precisamente, la elección de cuáles leyes y por qué se han de emplear al analizar cada fenómeno concreto. Esta habilidad para elegir la vía de resolución del problema, es decir, la destreza para determinar qué leyes físicas son las que describen el fenómeno considerado, certifica con claridad la comprensión profunda y multifacética de la física. Cuántas veces durante la enseñanza de la física tanto en la escuela, como en el centro de enseñanza superior, los autores tuvieron la ocasión de observar cómo la familiarización con los primeros renglones de las soluciones aducidas en el manual de problemas permite al estudiante, con mayor o menor grado de seguridad, resolver independientemente el problema. Pero incluso después de esto, parte considerable de los estudiantes, por regla, no puede explicar por qué, precisamente, la aplicación de la ley dada de física conduce al objetivo planteado. El manual que ofrecemos está llamado a ayudar a vencer dichas dificultades.

No obstante, éste no es el único fin que los autores se plantearon. De acuerdo con su profunda convicción debe existir, asimismo, «la reacción» entre los problemas que se analizan y las leyes de física. Cada problema debe ser el motivo de una conversación, seria y profunda, a veces muy breve, sobre la esencia de los fenómenos y las leyes de física.

Al estudiar la física, los estudiantes aprenden diversas leyes de ésta de las cuales unas se refieren sólo a un determinado círculo de fenómenos, p. ej., mecánicos, eléctricos, ópticos, en tanto que otros son fundamentales, generales para todos los fenómenos físicos. Para el conocimiento profundo de la física hay que comprender con claridad el grado de comunidad de diversas leyes de física, los límites de su aplicación, su puesto en el cuadro físico general del universo.

En muchos de los problemas de todos los capítulos del libro se muestra, p. ej., cómo el empleo de la ley de la conservación de la energía permite, con frecuencia, resolver el problema con mayor sencillez, examinarlo desde posiciones más generales y, lo que es de suma importancia, ofrece la posibilidad de hallar respuesta a ciertas preguntas, referentes a los fenómenos para los que son desconocidas las leyes concretas que los describen.

Durante la resolución de los problemas es preciso poder aplicar con seguridad las leyes de la conservación, pero no es fácil aprender a emplearlos correctamente. En ocasiones, estando seguros del «poderío» de las leyes fundamentales de física, los estudiantes comienzan a utilizarlas de manera formal, sin analizar la esencia de los fenómenos que transcurren. En el presente libro, en el ejemplo de algunos problemas que se analizan, se muestra a qué errores puede llevar lo indicado con anterioridad. En este sentido, son en particular aleccionadores los problemas en los que se consideran los choques de barras elásticas.

Así pues, al resolver un problema físico, conviene tratar de emplear no leyes concretas, referentes a un círculo limitado de fenómenos físicos, sino las leyes más generales, justas para la física en su total.

Una comprensión de la física en más alto grado se determina por la habilidad de emplear, para resolver los problemas, no sólo las leyes fundamentales de física, sino también los principios metodológicos de ésta, tales como los principios de causalidad, simetría, relatividad, equivalencia, etc. Su empleo permite en una serie de casos predecir de inmediato cualitativamente el carácter general del fenómeno que se considera, después de lo cual la solución del problema se reduce a establecer las relaciones cuantitativas. Como ejemplo se puede indicar el principio de simetría en los problemas «Una moneda sobre un soporte horizontal», «Una carga en el interior de una esfera conductora», «Cables y bornas», etc., el principio de la relatividad en los problemas «¿Cómo adelantar al autobús?», «Transformaciones mutuas de los electrones y fotones», etc.

El proceso de resolución del problema se parece a una pequeña investigación. Lo mismo que en una investigación científica real no siempre es evidente de antemano cuál debe ser la secuencia de las operaciones necesarias para obtener el resultado. En este sentido, no hay recetas universales. La destreza necesaria sólo se alcanza trabajando con ahínco a medida que se acumulan los conocimientos.

El mundo de la física es complicado. No todos los fenómenos pueden ser clasificados por las diferentes partes de la física. Por ello, en ocasiones, no es fácil referir uno u otro problema a determinada parte. Pero, precisamente, semejantes problemas son, por regla, del mayor interés, ya que en ellos se puede apreciar la unidad del mundo físico, percibir la analogía entre fenómenos, diferentes en absoluto

por su naturaleza física, y hallar el lenguaje común para su descripción.

En el libro que ofrecemos, semejantes problemas se han incluido en un parágrafo determinado ateniéndose al tipo formal de su planteamiento, a pesar de que en el proceso de su resolución se necesita hacer uso del material de otros parágrafos.

En las soluciones de los problemas y en la consideración de los ejemplos que aducimos se presta particular atención a aquellos momentos que deben figurar en cualquier investigación. En primer lugar esto se refiere a la elección fundamentada de la idealización del proceso a estudiar, ya que en vez del propio fenómeno nos vemos siempre obligados a considerar cierto modelo simplificado, tendiendo a conservar en él los rasgos más característicos e importantes del fenómeno. En segundo lugar, es obligatoria la investigación de los casos particulares y límites, para los que la solución es evidente o puede ser obtenida de inmediato independientemente de la solución general. Es asimismo de gran utilidad la búsqueda y el análisis de la analogía con otros problemas y fenómenos, así como la comparación de los métodos de su análisis.

Al resolver problemas se utilizan extensamente los métodos aproximados. Con frecuencia, su aplicación no sólo facilita la solución de los problemas, sino que permite representar el resultado en la forma más idónea para la investigación. En algunos casos, cuando incluso la obtención de un resultado aproximado está relacionado con la necesidad de superar los márgenes del nivel de la exposición adoptado, se emplean estimaciones que ofrecen el cuadro cualitativo y el orden de la magnitud. Y, por fin, se presta atención a la posibilidad de diversos enfoques para la resolución del problema.

Todos los problemas expuestos en la obra fueron empleados en las lecciones de física en la escuela-internado especializada, adjunta a la Universidad estatal de Leningrado (UEL), y en la escuela № 24 especializada en física de esa misma ciudad. Muchos de ellos se ofrecieron en las olimpiadas escolares de Leningrado y en los seminarios con la participación de los estudiantes en las facultades físicas de la UEL y del Instituto Pedagógico de esa misma ciudad.

Resultó que algunos de los problemas crearon dificultades incluso entre los estudiantes físicos, a pesar de que, hablando en rigor, para resolver dichos problemas no se requieren conocimientos que salgan tras los límites del programa escolar tanto de física, como de matemáticas.

Los autores esperan que el libro será útil para los alumnos de los grados superiores de la escuela de los cursos preuniversitarios y las escuelas de preparación técnica profesional, así como para los profesores y estudiantes de los centros de enseñanza superior.

I. CINEMÁTICA

La cinemática estudia la «geometría» del movimiento. ¿Qué entendemos por esto? La «geometría» del movimiento es la descripción matemática del movimiento de los cuerpos sin analizar las causas que lo provocan. En otras palabras, sin aclarar la cuestión de por qué el movimiento que se considera transcurre de este y no de otro modo, se establece la relación matemática entre sus diversas características, tales como el desplazamiento, el recorrido realizado, la velocidad, aceleración, el tiempo del movimiento.

El movimiento de un punto material siempre se considera en cierto sistema de referencia. La posición del punto material puede determinarse si se prefija su radio vector r o bien, lo que es equivalente, sus tres coordenadas x, y, z, es decir, las proyecciones del radio vector sobre los ejes del sistema cartesiano de coordenadas. Si es conocido el radio vector como función del tiempo $r(t)$, o sea, se conocen las tres funciones escalares $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, el movimiento está descrito con plenitud desde el punto de vista matemático. P. ej., para el movimiento uniforme, es decir, aquel que transcurre a velocidad constante v, la función $r(t)$ tiene la forma

$$r(t) = r_0 + vt, \tag{1}$$

mientras que para el movimiento uniformemente variado con aceleración a

$$r(t) = r_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}. \tag{2}$$

En estas fórmulas r_0 caracteriza la posición inicial del punto, o sea, $r_0 = r_0(t)|_{t=0} = r(0)$, v_0 es la velocidad inicial.

Señalemos que en cinemática la aceleración se considera prefijada. La aceleración se halla bien por vía experimental, o bien por cálculos a base de las leyes de dinámica, cuando se conocen las fuerzas que determinan el carácter del movimiento. Adelantando los acontecimientos, hemos de señalar que la ecuación (1) describe el movimiento del punto material en un sistema inercial de referencia, si sobre el punto no actúan fuerzas (o bien todas las fuerzas actuantes están equilibradas), en tanto que la (2), si las fuerzas que actúan son constantes. En el último caso se suele decir que el movimiento del cuerpo transcurre en un campo de fuerzas homogéneo, constante en el tiempo. Un ejemplo de semejante campo puede ser el campo de la gravitación junto a la superficie terrestre, a condición de que la altura del cuerpo sobre ella sea pequeña en comparación con el radio de la Tierra. Claro está, que el movimiento de un cuerpo en las proximidades de la superficie de nuestro planeta se describe con la ecuación (2) sólo cuando la resistencia del aire puede no tomarse en consideración.

Así pues, la función $r(t)$ contiene toda la información acerca de la cinemática del movimiento del cuerpo, o sea, la respuesta a toda pregunta en los problemas de cinemática se puede obtener empleando sólo la dependencia $r(t)$. En tales casos no hay que valerse de ninguna otra ley de física. P. ej., la dependencia entre la velocidad instantánea del punto y el tiempo en el campo homogéneo puede obtenerse de la relación (2) derivando el radio vector respecto al tiempo

y tiene la forma

$$v(t) = v_0 + at.$$

Durante la resolución de los problemas vamos a anotar la ecuación (2) directamente en las proyecciones sobre los ejes de coordenadas. Siendo constante la aceleración a, siempre se puede elegir el sistema de coordenadas de modo que la ecuación vectorial (2) se reduzca a dos escalares; como la trayectoria por la que se mueve el cuerpo es plana, simplemente es necesario hacer coincidir, p.ej., el plano x, y con el plano en que yace la trayectoria. Entonces, la ecuación vectorial (2) es equivalente a dos ecuaciones escalares

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}, \quad y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}. \tag{3}$$

En particular, si se considera el movimiento del cuerpo junto a la superficie de la Tierra, bajo el efecto de la fuerza de la gravedad, es idóneo dirigir el eje y verticalmente hacia arriba. En semejante caso, el vector de la aceleración sólo tiene una proyección distinta de cero: $a_x = 0$, $a_y = -g$ y el sistema (3) adquiere la forma

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= x_{0x} + v_{0x}t = x_0 + v_0 \cos\varphi \cdot t, \\ y(t) &= y_0 + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = y_0 + v_0 \operatorname{sen}\varphi \cdot t - \frac{gt^2}{2}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

donde φ es el ángulo formado por el vector de la velocidad inicial y el horizonte. A veces, es cómodo ubicar el origen de coordenadas en el punto inicial de la trayectoria, entonces $x_0 = y_0 = 0$.

Con movimiento uniforme del punto material por una circunferencia, la velocidad sólo varía en dirección, quedando constante en módulo. En este caso, la aceleración está dirigida hacia el centro de la circunferencia en sentido perpendicular a la velocidad, es decir, por la normal a la trayectoria y es igual en módulo a

$$a = v^2/R, \tag{5}$$

donde R es el radio de la circunferencia. Esta misma fórmula es también válida para el movimiento del punto a velocidad constante en módulo v por una trayectoria curvilínea arbitraria. Aquí, R es el radio de curvatura de la trayectoria en el punto que se considera. En tal caso, la aceleración está dirigida hacia el centro de curvatura, o sea, perpendicularmente a la velocidad dirigida por la tangente a la trayectoria. Pero si la velocidad cambia en módulo, el vector aceleración, además de la componente normal que se da con la misma fórmula (5), tendrá otra componente dirigida según el vector velocidad o bien en sentido inverso a él, en función de si la velocidad del punto material aumenta o disminuye.

La resolución de un problema cinemático se reduce al empleo de las ecuaciones indicadas más arriba en las condiciones concretas enunciadas en el problema. Con ello, sería ingenuo el intento de asimilar cierto «método general» de resolución, que sirva para todos los problemas; digamos, simplemente, que tal «método general» no existe. Al contrario, en los ejemplos que aducimos el lector podrá asegurarse de que siempre existen varios enfoques a la investigación de los fenómenos físicos que en mayor o menor grado se diferencian entre sí.

Distintos enfoques remarcan con frecuencia nuevas fases del fenómeno que estudiamos, lo que permite penetrar con mayor profundidad en su sentido físico. Por esta razón, en la mayoría de los problemas considerados se ofrecen diversas variantes de resolución.

1. Paso del río. Imaginémonos un río con orillas paralelas entre las cuales la distancia es l (fig. 1.1). La velocidad de la corriente es la misma por toda la anchura e igual a u.

¿Con qué velocidad mínima constante $v_{mín}$ respecto del agua deberá navegar una barca para que desde el punto A vaya a parar al punto B en la orilla opuesta que se encuentra a una distancia s co-

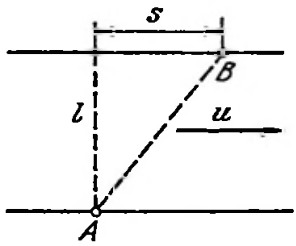


Fig. 1.1. La velocidad de la corriente u es la misma en cualquier lugar del río

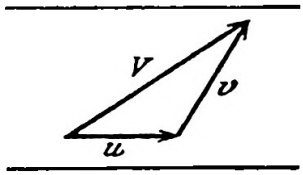


Fig. 1.2. La velocidad de la barca con relación a las orillas V es igual a la suma de los vectores u y v

rriente abajo? ¿A qué distancia mínima $s_{mín}$ será llevada la barca corriente abajo durante el paso del río a la otra orilla, si el módulo de su velocidad con relación al agua es igual a v?

△ Con el fin de dar respuesta a estas preguntas,ante todo, hay que representarse con claridad que la velocidad de la barca respecto a las orillas V es la suma vectorial de las velocidades de la corriente u y la velocidad de la barca con relación al agua v (fig. 1.2):

$$V = u + v. \qquad (1)$$

Vamos a considerar que la barca tiene respecto al agua la velocidad v, invariable en módulo. En este caso, saliendo del punto A, la barca puede llegar al punto B sólo si se consigue dirigir su velocidad V respecto a las orillas, por la recta AB o bien más a la izquierda de ella. Si con ninguna dirección de v no podemos obtener en el momento inicial la velocidad resultante V a lo largo de la recta AB, entonces la barca será llevada por la corriente más abajo del punto B (fig. 1.3).

El sentido necesario del vector V puede ser obtenido con diversos valores del vector v. En todos los casos, la velocidad de la corriente u está dirigida del mismo modo y se representa con un mismo vector. La velocidad de la barca con relación al agua v puede ser dirigida de distinta manera. De la fig. 1.3 vemos que esta velocidad será la menor cuando la velocidad de la barca respecto de la orilla V está dirigida, precisamente, por la recta AB, mientras que la velocidad v es perpendicular a dicha recta. Este caso se muestra en la fig. 1.4. De la semejanza de los triángulos rectángulos representados,

hallamos

$$v_{mín}/u = l/\sqrt{l^2 + s^2}. \qquad (2)$$

Señalemos que si deseamos llegar al punto B, desplazándonos con la velocidad mínima posible $v_{mín}$, debemos dirigir la proa de la barca en sentido perpendicular a la trayectoria elegida de la barca AB. ¡La barca será llevada por la corriente y como resultado ella se acercará de costado al objetivo prefijado!

Retornando a la fig. 1.3, vemos que para obtener la respuesta a la primera pregunta del problema hemos tenido que analizar el triángulo correspondiente a la ley de composición de velocidades (1). En el mencionado triángulo uno de los lados (u) fue prefijado en módulo

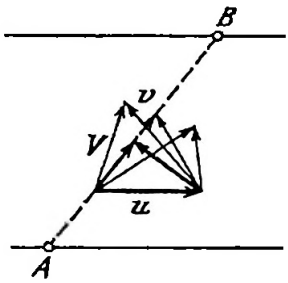


Fig. 1.3. La elección de la dirección de la velocidad de la barca v para el paso del río desde A hasta B

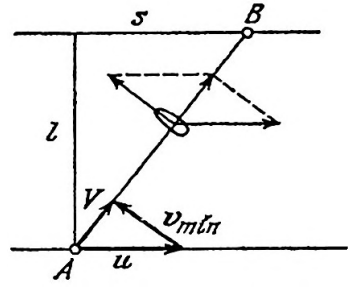


Fig. 1.4. Para el cálculo de la velocidad mínima $v_{mín}$

y dirección. El sentido del otro lado (V) fue elegido partiendo del planteamiento del problema, es decir, el requisito de llegar al punto B. Entonces, para obtener el valor mínimo del módulo del tercer lado (v) éste deberá ser dirigido perpendicularmente al sentido elegido de V.

También se pueden emplear razonamientos análogos para dar respuesta a la segunda pregunta del problema. El vector velocidad de la corriente u en este caso ha sido, asimismo, prefijado en módulo y sentido. En lo que atañe al segundo sumando en el segundo miembro de la expresión (1), es decir, la velocidad de la barca con relación al agua v, de antemano sólo es conocido su módulo v, mientras que su dirección puede ser cualquiera. Si hacemos coincidir el origen del vector v con el extremo del vector u (fig. 1.5), el extremo del vector v puede encontrarse en cualquier punto de la circunferencia de radio v. De la fig. 1.5 b se desprende de inmediato que la deriva de la barca por la corriente es inevitable si $v < u$. Pero si la velocidad de la barca v es mayor que u, eligiendo el sentido de v del modo adecuado, es posible conseguir que no haya deriva (fig. 1.5 a).

Es más, para $v > u$, al pasar el río, es posible atracar en la orilla opuesta en cualquier lugar más arriba por la corriente.

El análisis de la fig. 1.5 *b* muestra que con $v < u$ la deriva será la mínima si la velocidad de la barca con relación a las orillas V

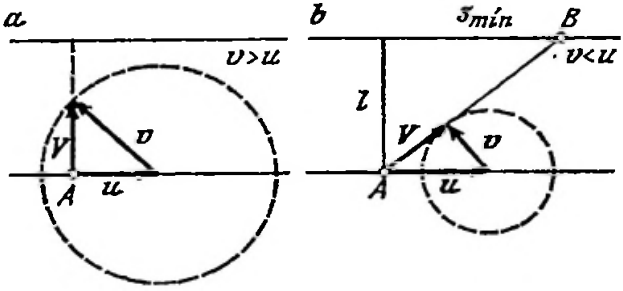


Fig. 1.5. Elección de la dirección para el paso del río con la deriva mínima

está dirigida por la tangente a la circunferencia de radio v. Comparando los triángulos rectángulos representados en la figura hallamos la deriva mínima de la barca $s_{mín}$:

$$s_{mín} = l\sqrt{u^2 - v^2}/v, \quad v < u. \tag{3}$$

Examinen una vez más la fig. 1.5 *b* e imagínense hacia dónde hay que dirigir la proa de la barca, durante el paso del río, para que su deriva, originada por la corriente, sea la mínima. ▲

2. ¿Cómo adelantar al autobús? Una persona se encuentra en el campo distando l de un sector rectilíneo de la carretera. A su derecha ella advierte un autobús en movimiento por la carretera. ¿En qué dirección habrá que correr hacia la carretera para llegar a ella delante del autobús, lo más lejos posible de él? La velocidad del vehículo es u, la de la persona, v.

△ Claro está, que sólo es de interés el caso $v < u$, ya que si $v > u$ la persona puede adelantar al autobús a cualquier distancia.

Con el fin de salir a la carretera lo antes posible, la persona debe elegir el camino más corto. Si haciendo lo dicho ella consigue salir a la carretera incluso por delante del autobús, de todos modos la distancia hasta el autobús no será la máxima entre las posibles. En efecto, si se corre en sentido no perpendicular a la carretera, sino que bajo cierto ángulo α con relación a la perpendicular (fig. 2.1), el recorrido de la persona hasta la carretera aumentará en la magnitud Δl, pero, en consecuencia, ella saldrá a la carretera a una distancia d a la izquierda del punto B. Si elegimos un ángulo α suficientemente pequeño, es posible hacer que la distancia d sea mayor, cualquier número de veces, que la distancia Δl. Por ello, a pesar de que

la velocidad de la persona v es menor que la del autobús u, ella llegará a la carretera a mayor distancia del vehículo que en el punto B.

¿En qué dirección debe correr la persona? Resulta que es fácil responder a esa pregunta si pasamos a otro sistema de referencia, en el que el autobús permanece en reposo. Este sistema de referencia se

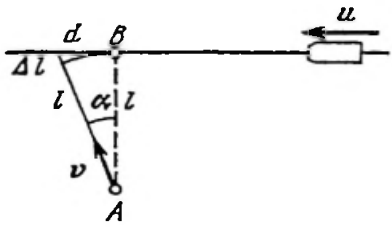


Fig. 2.1. Hay que correr hacia la carretera no por el camino más corto

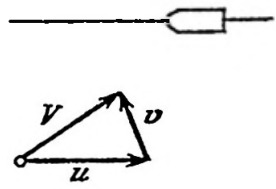


Fig. 2.2. Velocidad de la persona en el sistema de referencia donde el autobús está inmóvil

mueve con relación a la tierra hacia la izquierda a la velocidad u. En el sistema mencionado, la persona que esté inmóvil en la tierra tendrá la velocidad u dirigida hacia la derecha (fig. 2.2). En el nuevo sistema de referencia, la velocidad total de la persona V es igual a la suma vectorial de u y la velocidad de la persona respecto de la tierra v.

Ahora ya podemos con facilidad llegar a la conclusión de que este problema es equivalente al que resolvimos más arriba sobre la deriva

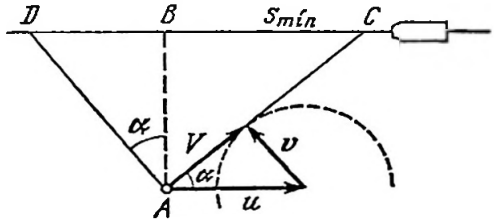


Fig. 2.3. Para hallar la dirección del movimiento de la persona

mínima de la barca al pasar a la otra orilla del río. Como en el sistema de referencia que consideramos el autobús está inmóvil, el requerimiento de salir a la carretera a la mayor distancia posible del vehículo es equivalente al requisito de la deriva mínima de la barca al pasar el río. Por ello, el sentido buscado del vector v se determina mediante la misma construcción que en el problema anterior (fig. 2.3). La trayectoria de la persona en el sistema de referencia donde el autobús está inmóvil, es la recta AC. En lo que atañe al sistema de referencia relacionado con la tierra, la trayectoria es la recta AD.

Así pues, hay que correr hacia la carretera no por el camino más corto, sino bajo el ángulo α a la carretera, además

$$\operatorname{sen} \alpha = v/u.$$

De la fig. 2.3 se deduce que la persona puede llegar a la carretera antes que el autobús sólo en el caso si en el momento inicial el autobús se halla a una distancia del punto B que no sea menor que

$$s_{\text{mín}} = l \sqrt{u^2 - v^2}/v.$$

El problema considerado es un ejemplo de cómo la elección acertada del sistema de referencia permite facilitar considerablemente la resolución. ▲

3. El radio de curvatura. Hallen el radio de curvatura de la cicloide en el punto superior de su arco, o sea, en el punto A en la fig. 3.1.

△ El hallazgo del radio de curvatura de la curva prefijada, como es lógico, es un problema puramente geométrico. Para resolverlo es

Fig. 3.1. Cicloide

suficiente conocer la ecuación de la curva. Por esta razón, a primera vista, no está claro qué tiene que ver con la física la pregunta planteada en el problema.

No obstante, en ocasiones, tales problemas se pueden resolver con facilidad haciendo uso de que el radio de curvatura figura en algunas fórmulas de cinemática. La idea básica consiste en que la curva geométrica a considerar se representa como la trayectoria de cierto movimiento mecánico lo suficiente sencillo y éste se investiga según los métodos de cinemática.

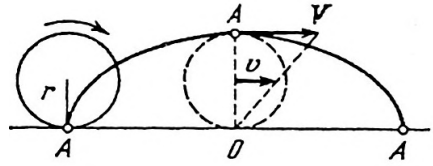


Fig. 3.2. Cicloide como la trayectoria de una circunferencia que rueda sin deslizamiento

La cicloide se puede considerar como la trayectoria de cierto punto de una circunferencia que rueda sin deslizamiento por una recta. En la fig. 3.2 se muestra la cicloide que «traza» el punto A que en el momento inicial estaba abajo. El punto A describe la cicloide dada independientemente de si la circunferencia rueda de modo uniforme o con aceleración, lo importante es que no haya deslizamien-

to. Claro está que lo más sencillo es considerar la rodadura uniforme de la circunferencia. Esta rodadura se obtiene como resultado de la suma de la rotación uniforme de la rueda en torno del eje y del movimiento uniforme de traslación, cuya velocidad lineal v es igual al producto de la velocidad angular por el radio de la rueda r.

En todos los sistemas inerciales de referencia el punto material tiene una misma aceleración. Por esta razón, es posible hallarla en cualquier sistema de referencia. Está claro, que la aceleración de los puntos de la circunferencia no sólo está ligada con su rotación alrededor del eje. Por ello, la aceleración a de cualquier punto de la circunferencia está dirigida por el radio al centro de la misma y se calcula con la fórmula

$$a = v^2/r. \tag{1}$$

Esto significa que en el punto superior de la cicloide la aceleración del elemento de la circunferencia es igual a v^2/r y está dirigida hacia abajo (fig. 3.2).

Ahora anilicemos el movimiento de ese mismo punto de la circunferencia como el movimiento por la cicloide. En cualquier punto de la trayectoria la velocidad está dirigida por la tangente a ella; esto quiere decir que en el punto superior de la cicloide la velocidad es horizontal. En lo que se refiere a la aceleración, como ya hemos aclarado, ella se dirige en sentido vertical hacia abajo, es decir, es perpendicular a la velocidad. Por esto, la aceleración hallada más arriba también puede escribirse en la forma

$$a = V^2/R, \tag{2}$$

donde V es la velocidad del punto de la circunferencia en su posición superior; R, el radio de curvatura de la cicloide buscado.

Con el fin de hallar V vamos a razonar del modo siguiente. La velocidad de cualquier punto de la circunferencia que rueda es la suma vectorial de la velocidad del movimiento de traslación de la circunferencia y la velocidad lineal de rotación alrededor del eje. Al no haber deslizamiento ambas velocidades son iguales en módulo. En el punto superior ellas están dirigidas en la misma dirección. Por ello, $V = 2v$ y, al comparar las fórmula (1) y (2), hallamos

$$R = 4r. \tag{3}$$

El radio de curvatura de la cicloide en el punto superior es igual al diámetro de la circuferencia duplicado. Si hubiésemos considerado la rodadura de la circunferencia como la rotación alrededor del eje instantáneo, que en cada momento coincide con el punto inferior inmóvil de la misma (fig. 3.2), podría parecer que el punto superior se mueve por cierto círculo cuyo radio es igual al diámetro de aquélla. Así sería si el eje instantáneo de rotación O quedara inmóvil. En realidad, dicho eje se desplaza junto con la circunferencia y, preci-

samente por este motivo, el punto A que consideramos en la misma, en este momento, se mueve describiendo un círculo, cuyo radio se determina con la fórmula (3). ▲

4. Caída del balón. El balón de baloncesto lanzado al cesto comienza a caer a plomo desde éste sin velocidad inicial. En ese mismo momento desde un punto situado a una distancia l del cesto, hacia

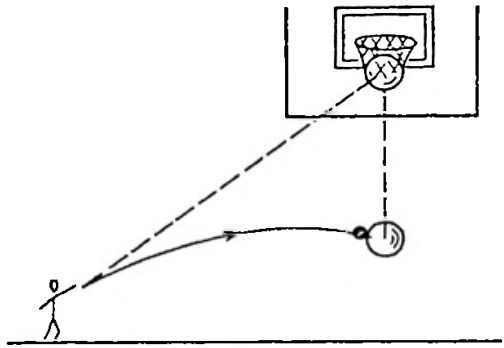


Fig. 4.1. Balón en caída

el balón en caída se tira una pelota de tenis (fig. 4.1). ¿A qué velocidad inicial fue lanzada la pelota de tenis si ésta y el balón chocaron a una distancia h del cesto?

△ En la pregunta planteada se sobreentiende que hay que hallar el vector de la velocidad inicial de la pelota de tenis, o sea, su dirección (ángulo α) y su módulo (v_0). Si el problema se resulve en el sistema inicial de referencia (del laboratorio), el curso de los razonamientos puede ser el siguiente. Anotemos la expresión para los desplazamientos de la pelota y el balón en el transcurso del tiempo t, desde el comienzo del movimiento hasta su encuentro, a continuación, los proyectamos sobre las direcciones vertical y horizontal (fig. 4.2). Como resultado llegamos al sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} h = \frac{gt^2}{2}, \quad H - h = v_0 \operatorname{sen}\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}, \\ \sqrt{l^2 - H^2} = v_0 \cos\alpha \cdot t. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Aquí, H es la altura del cesto sobre el punto de lanzamiento de la pelota de tenis; $\sqrt{l^2 - H^2}$, la distancia hasta el cesto por la horizontal (fig. 4.2).

En el sistema de tres ecuaciones (1) hay cuatro incógnitas: v_0, α, t y H. Por esto, puede parecer que el problema no tiene una solución única. No obstante, esto no es así. En efecto, poniendo h de la pri-

mera ecuación en la segunda, obtenemos

$$H = v_0 \operatorname{sen} \alpha \cdot t. \tag{2}$$

Dividiendo, término por término, esta ecuación entre la tercera ecuación del sistema (1), hallamos la expresión para tg α:

$$\operatorname{tg} \alpha = H/\sqrt{l^2 - H^2}. \tag{3}$$

Ahora, con ayuda de la fig. 4.2 podemos ver que el ángulo α, bajo el que debe estar dirigida la velocidad inicial de la pelota de tenis, en realidad corresponde a la dirección desde el punto de lanzamiento

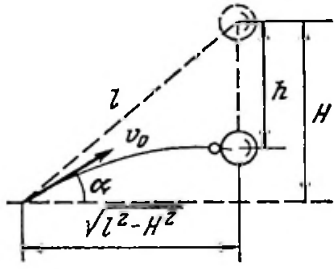


Fig. 4.2. Proyecciones de los desplazamientos de los balones

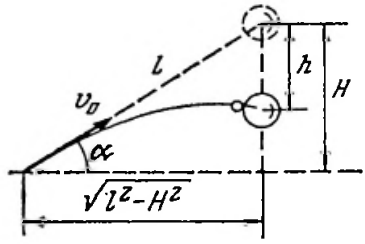


Fig. 4.3. El sentido real del vector v_0 de la velocidad inicial

hacia el cesto. La verdadera dirección de la velocidad inicial v_0 se muestra en la fig. 4.3. Así pues, es preciso lanzar con exactitud la pelota de tenis en dirección al cesto. El módulo de su velocidad inicial se puede hallar poniendo $t = \sqrt{2h/g}$ de la primera ecuación del sistema (1) en la ecuación (2).

Teniendo en cuenta que $H/\operatorname{sen} \alpha = l$, obtenemos

$$v_0 = l/t = l\sqrt{g/2h}. \tag{4}$$

Pero podemos excluir todas estas transformaciones si desde un principio pasamos al sistema de referencia ligado con el balón de baloncesto, es decir, que cae libremente con la aceleración g. Como es natural, en este sistema de referencia dicho balón permanece inmovil, mientras que la pelota de tenis está en movimiento uniforme y rectilíneo a una velocidad v_0. Es evidente, que la velocidad v_0 debe estar dirigida hacia el balón. Pasado el tiempo $t = l/v_0$ el balón y la pelota chocarán. En el sistema de referencia del laboratorio, en el transcurso del mencionado tiempo, el balón descenderá a una distancia

$$h = \frac{gt^2}{2} = \frac{g}{2}\left(\frac{l}{v_0}\right)^2, \tag{5}$$

de donde para v_0 obtenemos la misma expresión (4). En el ejemplo de este problema vemos que, en ciertos casos, conviene pasar a un sistema de referencia en movimiento acelerado. ▲

5. Al blanco con la velocidad inicial mínima. Desde la superficie terrestre es preciso dar con una piedra en el blanco situado a una altura h y a una distancia s por la horizontal. ¿A qué velocidad inicial mínima de la piedra es posible realizarlo? La resistencia del aire se desprecia.

△ A primera vista parece que la velocidad inicial de la piedra tendrá su valor mínimo absoluto si el punto superior de su trayectoria coincide con el blanco (fig. 5.1 *a*).

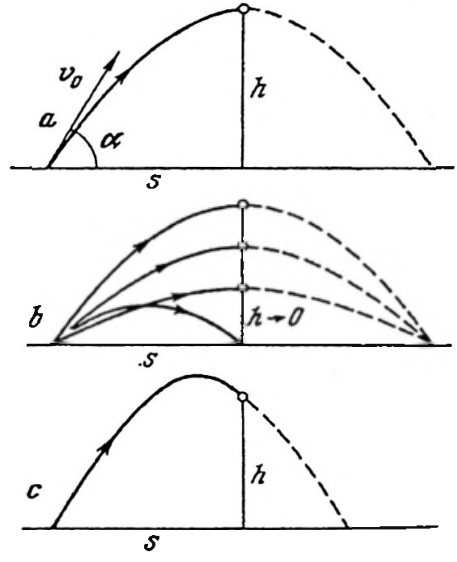


Fig. 5.1. Para la elección de la trayectoria óptima

¿Es posible que así os parezca? Esta ilusión es tan fuerte que con semejante solución de un problema análogo se puede tropezar en algunos manuales serios para resolver problemas de física. No obstante, incluso sin resolver el problema, es fácil cerciorarse de que esto no es así. En efecto, imaginémonos que disminuimos la altura en la que está ubicado el blanco. Con ello, el punto adonde llega la piedra, de acuerdo con la suposición, sigue encontrándose en el punto superior de la trayectoria (fig. 5.1 *b*), incluido también el caso límite $h = 0$. Pero está claro en absoluto que para dar en el blanco ubicado, en tierra, es bastante fácil lanzar la piedra hasta el blanco (fig. 5.1 *b*). Así pues, la suposición de que el blanco coincide con el punto superior de la trayectoria de vuelo de la piedra es errónea.

Este hecho se hace aún más evidente si señalamos que, en tal caso, la velocidad inicial deberá aumentar a medida que $h \to 0$.

El análisis aducido es un ejemplo de comprobación de la resolución del problema mediante el paso límite a un caso más sencillo, es decir, cuando la solución resulta evidente, o bien puede ser hallada con facilidad.

Del análisis cualitativo examinado, se puede llegar a la conclusión de que el blanco siempre debe hallarse en la rama descendente de la trayectoria (fig. 5.1 *c*). Recordemos una vez más que buscamos la trayectoria con la velocidad inicial mínima.

Empecemos a resolver el problema.

Supongamos que la piedra ha sido lanzada bajo el ángulo α al horizonte. Sus desplazamientos por la horizontal s y por la vertical h pueden ser escritos del modo siguiente:

$$s = v_0 \cos \alpha \cdot t, \quad h = v_0 \operatorname{sen} \alpha \cdot t - gt^2/2.$$

Como el tiempo de vuelo de la piedra t no nos interesa, excluyámoslo de estas ecuaciones. Expresando t de la primera ecuación y poniéndolo en la segunda, obtenemos

$$h = s \operatorname{tg} \alpha - \frac{gs^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}. \qquad (1)$$

Esta ecuación contiene dos incógnitas v_0 y α y, por ello, tiene un conjunto innumerable de soluciones, lo que corresponde a la posibilidad de dar en el blanco con un número infinito de procedimientos. Entre todas esas soluciones debemos elegir aquella que corresponde al valor mínimo de v_0.

La vía directa para resolver este problema consiste en el hallazgo de v_0 como función de α de la ecuación (1) y la investigación de esta función en cuanto a su extremo, lo que, no obstante, requiere la aplicación de las matemáticas superiores. Por esto, vamos a operar de otra forma. Resolvamos la ecuación (1) con relación a α. Haciendo uso de la conocida relación $1/\cos^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$ advertimos que de (1) se obtiene una ecuación cuadrática con respecto a tg α:

$$gs^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - 2v_0^2 s \operatorname{tg} \alpha + gs^2 + 2v_0^2 h = 0. \qquad (2)$$

Habiéndola resuelto, obtenemos

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{gs} [v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - g(gs^2 + 2v_0^2 h)}].$$

Podría parecer que nada bueno hemos obtenido, sólo una voluminosa expresión. Pero, en realidad, estamos a dos pasos de la respuesta a la pregunta del problema. En efecto, para tg α sólo tienen sentido físico las soluciones reales y, por ello, el discriminante debe ser no negativo:

$$v_0^4 - 2ghv_0^2 - g^2 s^2 \geqslant 0.$$

Es fácil cerciorarse de que el valor mínimo de v_0^2, con el que esta desigualdad es cierta, corresponde al caso de igualdad; así pues,

$$v_{0\,\min}^2 = g(h + \sqrt{h^2 + s^2}).$$

(La segunda raíz $v_{0\,\min}^2 = g(h - \sqrt{h^2 + s^2})$ no tiene sentido físico, ya que el cuadrado de la velocidad es una magnitud positiva.) Así pues, el resultado obtenido tiene la forma

$$v_{0\,\min} = \sqrt{g(h + \sqrt{h^2 + s^2})}. \qquad (3)$$

Ahora, analicemos la solución con mayor detalle. Retornemos a la ecuación cuadrática para tg α. Con el discriminante positivo ella tiene dos soluciones, es decir, para el valor prefijado de v_0 la piedra puede dar en el blanco describiendo dos distintas trayectorias. Con el discriminante negativo no hay solución, o sea, a la velocidad prefijada, para ningún valor del ángulo α la piedra no da en el blanco. Con el discriminante igual a cero sólo hay una solución (la única trayectoria de vuelo de la piedra hasta el blanco). Como hemos aclarado, precisamente en este caso, la velocidad inicial será la mínima, en tanto que la expresión para tg α tiene la forma más sencilla:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_{0\ \text{mín}}^2}{gs} = \frac{h+\sqrt{h^2+s^2}}{s}. \qquad (4)$$

Comprobemos la certeza del resultado obtenido mediante los pasos al límite.

1. Si $h = 0$, tg $\alpha = 1$, o sea, la piedra debe ser lanzada bajo el ángulo $\pi/4$. Es bien conocido que esto corresponde al alcance máximo de vuelo por la horizontal si viene prefijada la velocidad inicial, mientras que si viene prefijado el alcance obtendremos la velocidad inicial mínima. Este caso ya se examinó al empezar.

2. Si $s \to 0$, tg $\alpha \to \infty$, y $\alpha \to \pi/2$. En efecto, la piedra se debe lanzar hacia arriba en sentido vertical y sólo en este caso la posición del blanco coincide con el punto superior de la trayectoria.

Así pues, hemos resuelto el problema exigiendo que las raíces de la ecuación cuadrática (2) para tg α tengan sentido físico, es decir, que sean reales.

Analicemos ahora un procedimiento algo diferente de razonamiento que, claro está, nos conduce a ese mismo resultado. Ante todo, señalemos una evidente circunstancia: para la distancia s prefijada, cuanto más alto esté situado el blanco, tanto mayor ha de ser la velocidad inicial mínima de la piedra. Por ello, en lugar de buscar el mínimo de v_0 con h prefijada, se puede buscar el máximo de h para v_0 prefijada.

Supongamos que v_0 está prefijada. Entonces, expresando h a partir de (2):

$$h = -\frac{gs^2}{2v_0^2}\operatorname{tg}^2\alpha + s\operatorname{tg}\alpha - \frac{gs^2}{2v_0^2},$$

es fácil investigar en cuanto a su máximo el trinomio cuadrático obtenido con respecto a tg α. (Recordemos que el máximo del trinomio cuadrático $y = ax^2 + bx + c$ $(a < 0)$ tiene lugar cuando $x = -b/2a$ y es igual a $c - b^2/4a$). El valor mínimo de h se logra para tg $\alpha = v_0^2/gs$ y es igual a

$$h = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gs^2}{2v_0^2}. \qquad (5)$$

De (5) hallamos el valor mínimo de la velocidad inicial v_0 para la altura h del blanco prefijada que coincide con la hallada con anterioridad. ▲

6. Al blanco tras de la pared. Entre el blanco y un mortero, dispuestos sobre un mismo plano horizontal, está situada una pared de altura h. La distancia desde el mortero hasta la pared es igual a a, en tanto que desde ella hasta el blanco, b. Determinen la velocidad

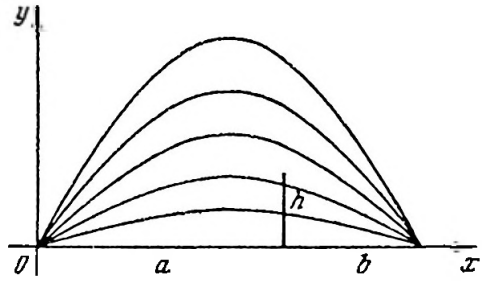


Fig. 6.1. Las trayectorias que pasan por el blanco

inicial mínima de la granada de mortero que se necesita para dar en el blanco. ¿En tal caso, bajo qué ángulo hay que disparar? La resistencia del aire se desprecia.

△ Intentemos comprender este problema sin escribir, por el momento, ninguna fórmula. Consideremos todas las trayectorias, que pasan por el blanco, olvidando, por algún tiempo, que existe la pared. En la fig. 6.1 la tercera trayectoria corresponde al valor mínimo absoluto de la velocidad inicial de la granada. Recordemos que a esta trayectoria corresponde el ángulo $\alpha = 45°$. Es fácil cerciorarse de que las velocidades iniciales, correspondientes a otras trayectorias, crecen monótonamente al alejarse éstas de la mencionada tanto hacia arriba, como hacia abajo. Por esta razón, si la pared resulta ser más baja que la trayectoria destacada, la solución es trivial: esta trayectoria es la que, precisamente, satisface las condiciones planteadas. Si la pared es más alta, la trayectoria buscada pasará por el borde superior de la pared. Esto es todo.

Ahora, sólo nos queda escribir estos razonamientos en el lenguaje matemático, es decir, obtener las expresiones para calcular la velocidad inicial v_0 y el ángulo α en cada uno de los mencionados casos.

Ante todo, obtengamos la ecuación general de las trayectorias que pasan por el blanco. Como ya sabemos, la ecuación de las trayectorias, que salen del origen de coordenadas, tiene la forma

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2}(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha). \qquad (1)$$

Exijamos que estas trayectorias pasen por el blanco. Con este fin, hagamos en (1) $y = 0$ cuando $x = a + b$:

$$0 = (a+b)\operatorname{tg}\alpha - \frac{g(a+b)^2}{2v_0^2}(1+\operatorname{tg}^2\alpha). \qquad (2)$$

Expresando de (2) la velocidad inicial v_0 y poniéndola en (1), obtenemos la ecuación de las trayectorias que pasan por el blanco:

$$y = x\left(1 - \frac{x}{a+b}\right)\operatorname{tg}\alpha. \qquad (3)$$

Dando a α diversos valores dentro de los límites desde 0 hasta $\pi/2$, obtenemos todas las trayectorias representadas en la fig. 6.1. La trayectoria destacada se obtiene con $\operatorname{tg}\alpha = 1$ ($\alpha = \pi/4$):

$$y = x\left(1 - \frac{x}{a+b}\right). \qquad (4)$$

Ahora, aclaremos a qué condición esta trayectoria pasa por encima de la pared. Con este objeto, hallemos la altura h_1 del punto de la trayectoria cuando $x = a$:

$$h_1 = a\left(1 - \frac{a}{a+b}\right) = \frac{ab}{a+b}.$$

Así pues, si la altura de la pared h es menor que h_1, la trayectoria buscada se determina con la expresión (4) y la velocidad inicial v_0, correspondiente a ella, se halla con facilidad de la ecuación (2) con $\operatorname{tg}\alpha = 1$:

$$v_{0\,\min} = \sqrt{g(a+b)}.$$

Esta es la relación habitual entre la velocidad inicial y el alcance máximo de vuelo por la horizontal.

A continuación, determinemos la trayectoria buscada si la pared es más alta que la trayectoria destacada: $h > h_1$. Como ya indicamos, en semejante caso hay que hallar la trayectoria que pasa por el borde superior de la pared, es decir, hacemos en (3) $y = h$ siendo $x = a$:

$$h = a\left(1 - \frac{a}{a+b}\right)\operatorname{tg}\alpha_1,$$

de donde $\operatorname{tg}\alpha_1 = h(a+b)/ab$. La ecuación de la trayectoria buscada será obtenida poniendo el valor hallado de $\operatorname{tg}\alpha_1$ en la fórmula (3):

$$y = x\left(1 - \frac{x}{a+b}\right)\frac{a+b}{ab}h.$$

Señalemos que para dar contestación a las preguntas planteadas en el problema, no necesitaremos esta ecuación, pero ella ofrece la posibilidad de seguir por qué puntos vuela al blanco la granada. Con el fin de hallar la velocidad inicial, correspondiente a dicha trayec-

toria, hay que poner el valor obtenido de tg α_1 en la ecuación (2):

$$v_{0\ \min}^2 = \frac{gab}{2h}\left[1 + \left(h\,\frac{a+b}{ab}\right)^2\right].$$

Así pues, resumiendo lo expuesto, enunciemos la solución: si $h \leqslant ab/(a+b)$, tendremos

$$\alpha = \pi/4, \quad v_0^2 = g\,(a+b);$$

si $h \geqslant ab/(a+b)$,

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(h\,\frac{a+b}{ab}\right), \quad v_0^2 = \frac{gab}{2h}\left[1 + \left(h\,\frac{a+b}{ab}\right)^2\right].$$

En este problema también es de utilidad considerar los casos límites. No vamos a detenernos en los casos de poco interés como, p. ej., $a = b$ (la pared está en la mitad de la distancia entre el mortero y el blanco).

No tiene sentido suponer que $a = 0$ o bien $b = 0$ si $h \neq 0$, pero sin duda alguna es de interés el caso cuando a y b tienden a cero (siendo $h \neq 0$). En este caso límite se requiere, sencillamente, tirar la granada por encima de la pared. Aquí, la respuesta es evidente: hay que disparar verticalmente hacia arriba ($\alpha = \pi/2$) y la velocidad inicial $v_0 = \sqrt{2gh}$. Mostremos cómo obtener este resultado partiendo de la solución del problema. Claro está que aquí hay que dirigirse al caso $h \geqslant ab/(a+b)$. Poniendo $a = b$ y, simultáneamente, haciendo que tiendan a cero, obtenemos $\alpha \to \pi/2$ y

$$v_0^2 = \frac{g}{2h}\left[ab + h^2\frac{(a+b)^2}{ab}\right] = \frac{g}{2h}(a^2 + 4h^2) \to 2gh. \ \blacktriangle$$

7. Región bajo fuego. Un cañón antiaéreo puede comunicar al proyectil la velocidad inicial v_0 en cualquier dirección. Es preciso hallar la zona bajo fuego, es decir, la frontera que separa los blancos, que puede alcanzar el proyectil disparado desde el cañón dado, de los blancos inaccesibles. La resistencia del aire se desprecia.

△ Para empezar, sin resolver el problema, tratemos de aclarar qué podemos decir acerca de esa frontera. El propio hecho de su existencia no produce dudas, de modo que la pregunta planteada en el problema tiene sentido (por cierto, al comenzar la resolución de cualquier problema siempre es conveniente reflexionar sobre esto). Intentemos imaginarnos la frontera buscada. Es evidente, que tiene forma de cierta superficie. Si el blanco se encuentra con exactitud sobre el cañón, hay que disparar hacia arriba en sentido vertical. Con ello, el proyectil ascenderá a la altura $h = v_0^2/2g$, después de lo cual comenzará a descender, de modo que la frontera de los blancos interseca la vertical en un punto situado a la altura h.

Si nos limitamos a los blancos situados en el plano horizontal, es evidente que la frontera es una circunferencia, cuyo radio es igual al

alcance máximo de vuelo del proyectil por la horizontal $s = v_0^2/g$ (recordemos que el alcance máximo de vuelo por la horizontal se alcanza cuando el ángulo de elevación del cañón es de $\alpha = \pi/4$). Esta circunferencia es la intersección de la superficie buscada con el plano horizontal (fig. 7.1). En general, de la simetría se puede llegar

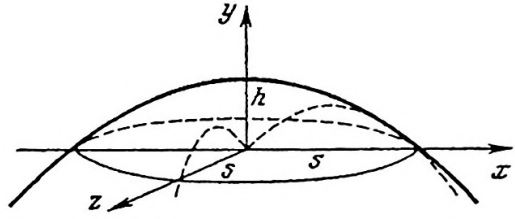


Fig. 7.1. Frontera de la región bajo fuego

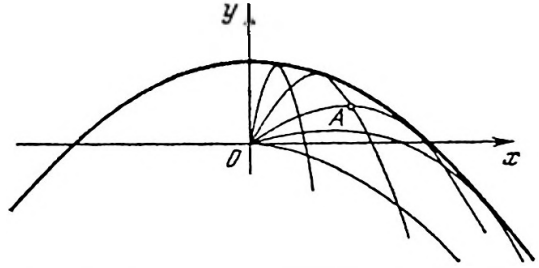


Fig. 7.2. La frontera es la envolvente para las trayectorias

a la conclusión de que la superficie buscada es la superficie de rotación de cierta curva alrededor de la vertical que pasa por el cañón y el problema se reduce a hallarla. Cabe señalar que la curva es la envolvente de todas las posibles trayectorias (fig. 7.2).

Entremos en la resolución del problema. Elijamos el sistema de coordenadas: dispongamos el cañón en el origen de coordenadas, dirigiendo el eje x horizontalmente, el eje y, verticalmente. Entonces, la dependencia entre las coordenadas del proyectil y el tiempo tendrá la forma

$$x(t) = v_0 \cos\alpha \cdot t, \quad y(t) = v_0 \operatorname{sen}\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

Excluyendo t de estas ecuaciones, obtenemos la ecuación de la trayectoria del proyectil $y = f(x)$:

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2}(1 + \operatorname{tg}^2\alpha). \qquad (1)$$

Esta es la ecuación de una parábola. Los coeficientes de x y x^2 dependen del ángulo α, es decir, para distintas direcciones de la velocidad inicial se obtienen diferentes trayectorias. Así pues, la

ecuación dada describe una familia de trayectorias con velocidades iniciales v_0 iguales en módulo, pero distintas en dirección.

Mas podemos, asimismo, dar a esta ecuación otro sentido. Consideremos a x e y como las coordenadas de un blanco determinado, en el que da un proyectil en movimiento por cierta trayectoria. Entonces, para las coordenadas prefijadas del blanco x e y la ecuación (1) determina el ángulo bajo el cual hay que disparar el proyectil, a la velocidad inicial v_0, para que él dé en dicho blanco. Resolviendo la mencionada ecuación de segundo grado respecto de tg α, hallamos

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{gx}\left[v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - g\left(gx^2 + 2v^2y\right)}\right]. \qquad (2)$$

Si la ecuación tiene solución real, es decir, el discriminante es no negativo:

$$v_0^4 - g\left(gx^2 + 2v_0^2y\right) \geqslant 0, \qquad (3)$$

es posible dar en el blanco. Si no hay soluciones reales, es decir,

$$v_0^4 - g\left(gx^2 + 2v_0^2y\right) < 0,$$

no es posible dar en el blanco. Esto significa que el blanco se halla fuera de los márgenes de la frontera buscada. Las coordenadas del blanco, situado en la frontera, deben satisfacer la relación $v_0^4 - g\left(gx^2 + 2v_0^2y\right) = 0$. Expresando de aquí y como función de x, obtenemos la ecuación de la frontera en forma explícita:

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}. \qquad (4)$$

Esta es la ecuación de una parábola con el vértice en $x = 0$, $y = v_0^2/2g$. El coeficiente de x^2 es negativo, o sea, las ramas de la parábola están dirigidas hacia abajo y cortan el eje horizontal en los puntos $x = \pm v_0^2/g$ (fig. 7.2). Así pues, la frontera obtenida pasa, por los puntos que, en un principio, fueron establecidos por nosotros partiendo de razonamientos elementales.

Hemos hallado la sección de la superficie de frontera del plano vertical que pasa por el origen de coordenadas. Todo el plano puede ser obtenido girando esta parábola en torno del eje y.

En virtud de la solución aducida hagamos algunas observaciones más. Consideremos cierto punto situado más cerca que la frontera (p. ej., el punto A en la fig. 7.2). Para semejante punto la expresión subradical en la fórmula (2) es positiva y, por consiguiente, por él pasan dos trayectorias (para el valor prefijado de la velocidad inicial) correspondientes a dos posibles valores del ángulo α.

En balística una de estas trayectorias recibe el nombre de rasante y la otra, tangente a la frontera antes de dar en el blanco, se denomina curva. Por cada punto, perteneciente a la frontera, sólo pasa una trayectoria. Señalemos que la frontera es la envolvente de la familia de trayectorias con distintas direcciones de la velocidad inicial v_0 y con el valor fijado de ésta.

Ofrecemos otra posible vía para resolver este problema, relacionada con una interpretación más de la ecuación (1). Consideremos los blancos que se encuentran en una vertical, alejada del cañón a la distancia x, y hallemos en ella el punto más alto al que puede aún alcanzar el proyectil. Por lo visto, este punto pertenece a la frontera. De este modo, el problema se reduce a hallar el máximo de y, es decir, del segundo miembro de la ecuación (1), considerándola función del ángulo α. El segundo miembro es un trinomio de segundo grado con relación a tg α y tiene su máximo con tg $\alpha = v_0^2/gx$. El valor de y, correspondiente al máximo, se obtiene poniendo este valor de tg α en la ecuación (1):

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

lo que coincide con la ecuación (4) de la frontera obtenida antes. ▲

8. **El barro de las ruedas.** Un carro rueda de manera uniforme por un camino con el pavimento húmedo. ¿A qué altura máxima ascenderán las gotas de agua que se desprenden de la corona de las ruedas?

△ Este problema se parece en alto grado a los anteriores. La más importante peculiaridad consiste en que para su resolución no se puede ubicar el origen de coordenadas en el punto inicial de la trayectoria de las gotas, ya que el desprendimiento de éstas se produce en diferentes puntos de la corona de la rueda. Por esta razón, hagamos coincidir el origen de coordenadas con el centro de la rueda, es decir, vamos a considerar el movimiento de las gotas en el sistema de referencia ligado al carro, que está en movimiento uniforme y rectilíneo con relación a la tierra. Es evidente, que la altura máxima de ascención de las gotas por la vertical no depende de si examinamos su movimiento en el sistema de referencia ligado con la tierra o bien en el que está ligado con el carro en movimiento uniforme por el plano horizontal. Si la velocidad del carro es igual a v_0 y las ruedas no patinan, en el sistema de referencia elegido la velocidad de cualquier punto de la corona también será igual a v_0. (Demuestren esta afirmación por sí solos, es muy sencilla.) La posición de cualesquiera de los puntos, de los que se produce el desprendimiento de la gota separándose de la corona, se determina unívocamente por el ángulo φ (fig. 8.1).

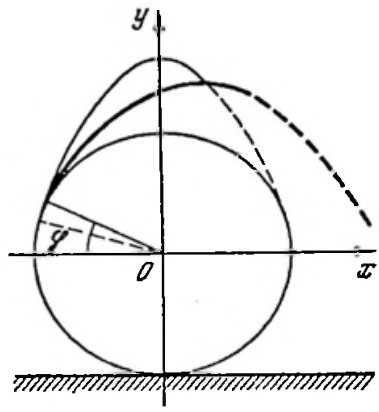


Fig. 8.1. Trayectoria de las gotas en el sistema de referencia relacionado con el carro

Las coordenadas corrientes de la gota, desprendida de la corona de la rueda en el punto caracterizado por el ángulo φ, se determinan con las relaciones

$$x(t) = -R\cos\varphi + v_0 \operatorname{sen}\varphi \cdot t, \tag{1}$$

$$y(t) = R\operatorname{sen}\varphi + v_0\cos\varphi \cdot t - gt^2/2. \tag{2}$$

Con el fin de hallar la altura máxima de ascensión de la gota $y_{máx}$, hay que poner en la ecuación (2) el tiempo de ascensión de la gota t_1 que, con la mayor facilidad, puede ser hallado del modo siguiente. En el punto más alto de la trayectoria la componente vertical de la velocidad v_y se anula: $v_y = v_0\cos\varphi - gt_1 = 0$, de donde

$$t_1 = \frac{v_0}{g}\cos\varphi. \tag{3}$$

Entonces, la altura máxima de ascensión de la gota desprendida de la corona en el punto que consideramos

$$y_{máx} = -\frac{v_0^2}{2g}\operatorname{sen}^2\varphi + R\operatorname{sen}\varphi + \frac{v_0^2}{2g}. \tag{4}$$

(En esta fórmula $\cos\varphi$ se expresa por intermedio de $\operatorname{sen}\varphi$.)

De (4) se deduce que la altura máxima de ascensión depende del ángulo φ, o sea, de en qué punto se produjo el desprendimiento de la gota. ¿De qué punto debe desprenderse la gota para que ésta ascienda a mayor altura que las demás? La expresión (4) para la altura máxima de ascensión es de por sí un trinomio de segundo grado respecto a $\operatorname{sen}\varphi$ y toma su valor máximo absoluto

$$h_{máx} = \frac{gR}{2v_0^2} + \frac{v_0^2}{2g} \tag{5}$$

con $\operatorname{sen}\varphi = gR/v_0^2$. Claro está, que este resultado tiene sentido si $gR \leqslant v_0^2$, es decir, si el carro se mueve con suficiente rapidez. Como es fácil cerciorarse, en caso contrario ninguna de las gotas que se desprenden no ascenderá sobre el punto superior de la corona. Demuestren esto independientemente.

Con ayuda de la relación (1) es fácil ver que el punto de ascensión máxima yace justamente sobre el eje de la rueda: poniendo (3) en (1) y teniendo en cuenta que $\operatorname{sen}\varphi = gR/v_0^2$, obtenemos $x = 0$.

La respuesta a la pregunta planteada en el problema, es decir, la fórmula (5) para la altura máxima de ascensión de las gotas, fue obtenida mediante la investigación en cuanto al máximo del trinomio de segundo orden (4) respecto de $\operatorname{sen}\varphi$. Este resultado puede obtenerse de otro modo. Vamos a razonar de la forma siguiente. Fijemos cierto valor de $y_{máx}$ y resolvamos la ecuación (4) con relación a $\operatorname{sen}\varphi$:

$$\operatorname{sen}\varphi_{1,2} = \frac{gR}{v_0^2} \pm \sqrt{\left(\frac{gR}{v_0^2}\right)^2 + 1 - \frac{2gy_{máx}}{v_0^2}}. \tag{6}$$

Aquí, los ángulos φ_1 y φ_2 determinan aquellos puntos de la corona de los que, al desprenderse las gotas, éstas alcanzan la altura máxima prefijada. Si no hay raíces reales, el valor prefijado de $y_{máx}$ no será alcanzado por ninguna de las gotas. Si hay dos raíces reales diferentes φ_1 y φ_2, la altura prefijada es la máxima para dos gotas. Esto se ve con claridad en la fig. 9.4 del problema 9, dedicado a la rueda «mojada». De todas las gotas, como se aprecia en la mencionada figura, sólo una de ellas alcanzará la altura máxima. Por lo tanto, esta altura máxima $h_{máx}$ será posible de hallar exigiendo que ambas raíces de la ecuación (6) se reúnan en una: igualando el discriminante a cero, obtenemos la respuesta, o sea, la fórmula (5).

Así pues, hemos obtenido una solución exhaustiva de este problema. Como los anteriores hemos resuelto este problema haciendo uso de las ecuaciones de movimiento (1) y (2) que ofrecen la dependencia entre las coordenadas de un sólido en movimiento y el tiempo. Estas ecuaciones contienen toda la información sobre el movimiento del sólido. Pero en múltiples casos una información tan completa no es necesaria. P. ej., en el problema que consideramos no nos interesan en absoluto las dependencias relacionadas con el tiempo sólo se requiere hallar la posición del punto de máxima ascensión de la gota, mientras que el momento de tiempo, cuando la gota resulta hallarse allí, no es de interés. En semejantes casos, con frecuencia, es más cómodo excluir desde el principio la información excesiva, haciendo uso de las leyes de la conservación. En el problema que consideramos se puede, de inmediato, obtener la relación (4) para la altura máxima de ascenso de las gotas, si aplicamos la ley de la conservación de la energía mecánica. Suponiendo igual a cero la energía potencial de la gota al nivel del eje de la rueda, tendremos para la energía total de la gota en el punto de desprendimiento

$$E_1 = mgR \operatorname{sen} \varphi + \frac{mv_0^2}{2}.$$

En el punto superior de la trayectoria la componente vertical de la velocidad se anula. Como la componente horizontal de la velocidad no varía, la energía en el punto superior

$$E_2 = mgy_{máx} + \frac{m(v_0 \operatorname{sen} \varphi)^2}{2}.$$

Igualando E_1 y E_2 obtenemos la fórmula (4). ¡Cómo ven, en muchos problemas no está mal pensar si se puede simplificar la solución empleando las leyes de la conservación! ▲

9. Gotas de una rueda en rotación. Una rueda «mojada» gira uniformemente, alrededor de un eje inmóvil, en el plano vertical. De la corona se desprenden gotas. Hallen la frontera de la parte «seca».

△ El movimiento de las gotas desprendidas se produce bajo el efecto de la fuerza de la gravedad que a todas las gotas les comunica

la misma aceleración g. Al comienzo, esto permite abstraerse de la presencia de la gravitación. Examinemos el movimiento de las gotas que se desprenden de la corona de la rueda en un mismo instante. Al no haber aceleración de la caída libre, las gotas se mueven por

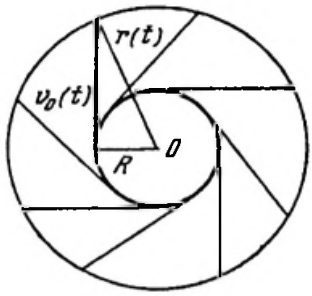


Fig. 9.1. En ausencia de la gravedad las gotas están en movimiento rectilíneo

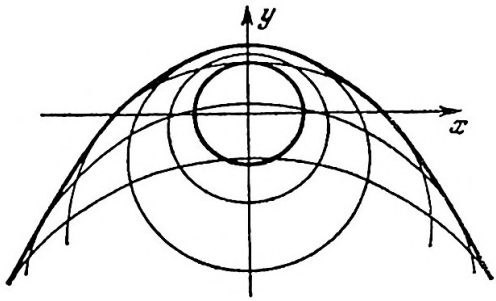


Fig. 9.2. La frontera de la región «mojada» como la envolvente de las circunferencias

líneas rectas. En todo momento de tiempo t todas las gotas yacen en una circunferencia de radio r (fig. 9.1) para el que, con ayuda del teorema de Pitágoras, podemos escribir

$$r^2(t) = R^2 + (v_0 t)^2, \qquad (1)$$

donde R es el radio de la rueda; v_0, la velocidad de los puntos de la corona.

El radio de la circunferencia r aumenta con el correr del tiempo, mientras que, además, en presencia de la gravitación, toda esa circunferencia «cae» con la aceleración de la caída libre g. Si el origen de coordenadas fue elegido en el centro de la rueda, en cualquier momento de tiempo t la ordenada del centro de la circunferencia es igual a $-gt^2/2$. En este sistema de coordenadas la ecuación de la circunferencia «cayente» tiene la forma

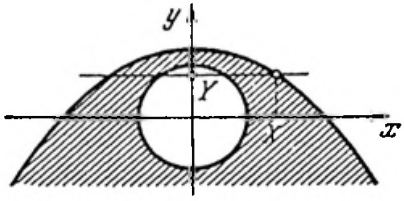


Fig. 9.3. La región «mojada» está sombreada

$$x^2 + (y + gt^2/2)^2 = r^2(t). \qquad (2)$$

La ecuación (2) es la de una completa familia de circunferencias: adjudicando a t diversos valores, obtenemos circunferencias en las que se hallan las gotas en distintos momentos de tiempo. Es fácil comprender que la frontera buscada es la envolvente de esta familia de circunferencias (fig. 9.2). Claro está, que el punto superior de esta frontera yace con precisión sobre el eje de la rueda. Con otras palabras, la ecuación (2) determina toda la región «mojada» (fig. 9.3)

y para resolver el problema debemos hallar la frontera del ámbito sombreado.

Busquemos esa frontera del modo siguiente. Advirtamos que las gotas desprendidas de la rueda en un mismo instante alcanzan la frontera en distintos momentos de tiempo: la frontera es tangente a diversas circunferencias. Trazando una recta horizontal a cierto nivel Y, hallemos en ella el punto y «mojado» más alejado del eje, sin preocuparnos a qué circunferencia él pertenece. Podemos hallar la abscisa X del punto de intersección de cualquier circunferencia con esa recta, poniendo en la ecuación (2) la ordenada $y = Y$ y el radio r de la ecuación (1):

$$X^2 = R^2 + v_0^2 t^2 - (Y + gt^2/2)^2. \tag{3}$$

Es fácil advertir que el segundo miembro de (3) es un trinomio de segundo orden respecto de t^2:

$$X^2 = -g^2 t^4/4 + (v_0^2 - gY)\, t^2 + R^2 - Y^2.$$

Su valor máximo

$$X^2 = R^2 + \frac{v_0^4}{g^2} - \frac{2v_0^2}{g} Y. \tag{4}$$

Resolviendo (4) con relación a Y, obtenemos la ecuación de la frontera de la región «seca»:

$$Y = -\frac{g}{2v_0^2} X^2 + \frac{gR^2}{2v_0^2} + \frac{v_0^2}{2g}. \tag{5}$$

Esta es la ecuación de una parábola cuyas ramas están dirigidas hacia abajo, en tanto que el vértice se halla en el eje y a la altura $gR^2/2v_0^2 + v_0^2/2g$.

La frontera ha sido hallada como la envolvente de la familia de circunferencias en las que se encuentran las gotas desprendidas en un mismo momento de tiempo. Por otro lado, la trayectoria de cada gota por separado es una parábola y, por ello, la frontera (5) hallada es la envolvente de dichas parábolas (fig. 9.4).

Es interesante señalar que los problemas 7 y 8 son casos particulares del presente problema. En efecto, de hecho, en el problema 8 era sólo necesario hallar el punto superior de la frontera de la región «mojada»: para $X = 0$

$$Y = h_{\text{máx}} = \frac{gR^2}{2v_0^2} + \frac{v_0^2}{2g}.$$

El problema 7 se obtiene de éste si hacemos tender a cero el radio de la rueda R, manteniendo la velocidad v_0 invariable. La ecuación de los blancos accesibles se obtiene de (5) si en la última ecuación hacemos $R = 0$:

$$Y = -\frac{g}{2v_0^2} X^2 + \frac{v_0^2}{2g}.$$

Al resolver el presente problema hemos supuesto de modo taciturno que la frontera buscada pasa fuera de la rueda. Lo mismo que en el problema anterior, es fácil cerciorarse de que esto es válido a condición de que $v_0^2 > gR$. En caso contrario ($v_0^2 \leqslant gR$) la frontera de la

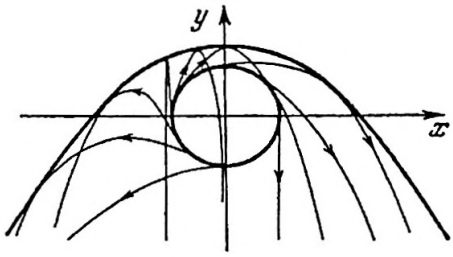


Fig. 9.4. La frontera de la región «mojada» como la envolvente de las parábolas, es decir, las trayectorias de las gotas

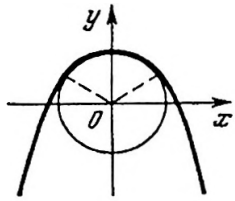


Fig. 9.5. La frontera de la región «mojada» con la rotación lenta de la rueda

región «mojada» pasa con su punto superior por la corona de la rueda (el arco de circunferencia) y, a continuación, pasa uniformemente a las ramas de la parábola (fig. 9.5). ▲

II. DINÁMICA Y LEYES DE LA CONSERVACIÓN

Cómo se produce el movimiento de un sólido, durante su interración con otros sólidos, es lo que estudia la dinámica. La interacción se describe en el lenguaje de las fuerzas que actúan sobre el sólido. La base de la dinámica del punto material son las tres leyes de Newton. La primera de ellas destaca aquellos sistemas de referencia en los que las ecuaciones de dinámica tienen la forma más sencilla, es decir, los llamados sistemas inerciales de referencia. La segunda ley de Newton establece la relación entre la aceleración con la que se mueve el punto material en el sistema inercial de referencia y las fuerzas que sobre él actúan. La tercera de ellas liga entre sí las fuerzas con las que los sólidos actúan unos sobre otros.

Se considera que en dinámica la interacción entre los sólidos está prefijada: p. ej., la interacción gravitacional de los puntos materiales se describe con la ley de la gravitación, mientras que la interacción electrostática de las cargas puntuales, con la ley de Coulomb. Las expresiones para las fuerzas que entran en las leyes de Newton deben ser tomadas de otras partes de la física, donde se estudia su naturaleza.

La resolución del problema dinámico se debe empezar por el análisis de todas las fuerzas que actúan sobre el sólido que nos interesa.

Detengámonos con mayor detalle en aquellos tipos de fuerzas con los que se tropieza en los problemas de este capítulo. La interacción gravitacional de los sólidos se realiza por medio de los campos de gravitación (newtonianos) creados por ellos. Un sólido con distribución esférico-simétrica de las masas (p. ej., el globo terrestre) crea en el espacio circundante un campo de gravitación igual que un punto material, de la misma masa, ubicado en su centro. En los problemas acerca del movimiento de los satélites de la Tierra es cómodo expresar la fuerza de atracción de la Tierra, que sobre ellos actúa, por intermedio de la distancia desde el satélite hasta el centro de la misma r, la aceleración de la caída libre g en la superficie de la Tierra y su radio R:

$$F = G\frac{mM}{r^2} = \frac{mgR^2}{r^2}\ , \qquad (1)$$

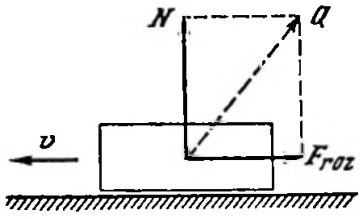
donde G es la constante universal de gravitación; M, la masa de la Tierra; m, la masa del satélite. Semejante aspecto de la fórmula para F es cómodo debido a que la fuerza que actúa sobre el satélite se expresa por magnitudes fáciles de recordar, es decir, $g = 9{,}8$ m/s^2, $R = 6370$ km.

En muchos de los problemas es preciso considerar el rozamiento entre los sólidos. En presencia del rozamiento la fuerza Q, con la que un sólido actúa sobre el otro, es cómodo examinarla como dos fuerzas (véase la figura): la fuerza N dirigida por la normal a la superficie de contacto (fuerza de la presión normal o bien fuerza de reacción del apoyo, que por su naturaleza es una fuerza elástica) y la fuerza de rozamiento F_{roz}, dirigida por la tangente. La comodidad consiste en que, durante el deslizamiento de los sólidos, los módulos de estas fuerzas componentes de una fuerza Q están ligados entre sí con la ley aproxima-

da de Coulomb — Amontons, establecida por vía experimental:

$$F_{roz} = \mu N. \qquad (2)$$

El coeficiente de rozamiento de deslizamiento μ depende del género de las superficies en contacto. Por regla, se desprecia la débil dependencia de la fuerza de rozamiento respecto del área de contacto y de la velocidad relativa de los sólidos. Para el rozamiento en reposo la ley (2) no tiene lugar: la fuerza de rozamiento en reposo puede variar desde cero hasta cierto valor máximo que, por regla, supera en cierto grado la fuerza de rozamiento de deslizamiento para estas superficies. Para simplificar, al resolver problemas el valor máximo de la fuerza de rozamiento en reposo se toma igual a μN.



La fuerza Q con la que la superficie rugosa actúa sobre el sólido se representa con comodidad como la suma de la fuerza de la reacción del apoyo N y la fuerza de rozamiento F_{roz}

La ecuación fundamental de dinámica, es decir, la segunda ley de Newton, es vectorial. En los problemas que vamos a considerar las fuerzas que actúan yacen en un mismo plano, por ello es posible elegir el sistema de coordenadas de modo que la ecuación vectorial de la segunda ley se reduzca a dos escalares.

La aplicación de la segunda y tercera leyes de Newton, al sistema de los sólidos en interacción, permite enunciar en forma muy sencilla la ley de movimiento del centro de masas del sistema de sólidos: el centro de masas se mueve del mismo modo que se movería un punto material de masa igual a la suma de las masas de todos los sólidos que entran en el sistema, bajo el efecto de una fuerza igual a la suma vectorial de todas las fuerzas externas que actúan sobre los sólidos del sistema que consideramos. En particular, de aquí se deduce que bajo la acción de sólo las fuerzas internas el centro de masas no puede adquirir aceleración.

La resolución de problemas de dinámica se facilita con frecuencia empleando las leyes de la conservación de la energía, de la cantidad de movimiento y del momento de la cantidad de movimiento. Es de particular eficacia el empleo de dichas leyes cuando las fuerzas que actúan no son constantes y la resolución directa de las ecuaciones de dinámica es imposible con ayuda de las matemáticas elementales. La ley de la conservación de la energía se utiliza extensamente al resolver problemas del movimiento de los aparatos cósmicos. Lo mismo que en (1) la expresión para la energía potencial del sólido en el campo gravitacional de la Tierra se escribe de modo más idóneo mediante la aceleración de la caída libre en la superficie terrestre:

$$E_p(r) = -G\frac{mM}{r} = -\frac{mgR^2}{r}. \qquad (3)$$

En la expresión (3) la energía potencial tiende a cero cuando $r \to \infty$, es decir, la energía potencial de gravitación del sólido, alejado al infinito, se toma igual a cero.

La velocidad de un satélite, en movimiento por una órbita circular de radio r, recibe el nombre de primera velocidad cósmica o velocidad orbital. Ella se puede hallar con ayuda de la segunda ley de Newton y la ley de la gravitación universal

$$v_I = \sqrt{gR^2/r}.$$

Para un satélite, en movimiento cerca de la superficie terrestre, la primera velocidad cósmica $v_I = \sqrt{gR} = 7{,}9$ km/s.

La velocidad mínima que hay que comunicar a un sólido, situado a la distancia r del centro de la Tierra, para que él se aleje al infinito lleva el nombre de segunda velocidad cósmica o velocidad de escape. Ella puede ser calculada con ayuda de la ley de la conservación de la energía:

$$v_{II} = \sqrt{2gR^2/r} = \sqrt{2}\, v_I.$$

Para un sólido que se encuentra en la superficie de la Tierra

$$v_{II} = \sqrt{2gR} = 11{,}2 \text{ km/s}.$$

El sólido se aleja a la infinidad independientemente de en qué dirección se le comunica la segunda velocidad cósmica, aunque, con ello, las trayectorias serán diferentes (¡pero todas ellas parabólicas!). Si al sólido se le comunica una velocidad mayor que la segunda cósmica, él se alejará por una hipérbola. Si la velocidad inicial es menor que la segunda cósmica, el sólido se moverá por una elipse, uno de cuyos focos coincidirá con el centro de la Tierra. Esta afirmación se denomina primera ley de Kepler, descubierta como resultado de las observaciones del movimiento de los planetas alrededor del Sol.

También vamos a utilizar al resolver los problemas la segunda y tercera leyes de Kepler. De acuerdo con la segunda ley de Kepler la velocidad areolar del satélite es constante. La tercera ley de Kepler afirma que los cuadrados de los períodos de revolución de los satélites son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de sus órbitas elípticas.

Las leyes de Kepler se pueden deducir con ayuda de las ecuaciones de dinámica y la ley de la gravitación universal.

Durante la resolución de los problemas, en los que se tropieza con el movimiento oscilatorio, hay que recordar que, al haber oscilaciones armónicas, cuando la resultante de todas las fuerzas está dirigida hacia la posición de equilibrio y es proporcional al desplazamiento, la frecuencia circular de las oscilaciones se determina con la relación

$$\omega = \sqrt{k/m},$$

donde m es la masa del sólido; k, el coeficiente de proporcionalidad entre la fuerza y el desplazamiento. La aplicación de esta fórmula a las pequeñas oscilaciones del péndulo simple de longitud l, proporciona $\omega = \sqrt{g/l}$.

1. La polea inmóvil. Por una polea inmóvil se hace pasar una cuerda inalargable, a cuyos extremos están fijados los pesos con masas m y M, siendo $m \ll M$ (fig. 1.1). Hallen la fuerza de tensión de la cuerda al moverse los pesos, despreciando el rozamiento, las masas de la polea y de la cuerda.

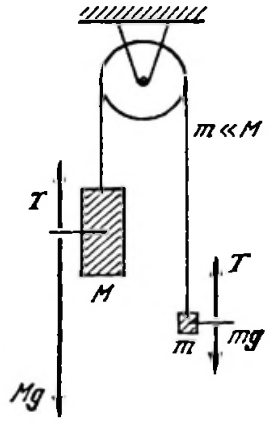


Fig. 1.1. Fuerzas que actúan sobre los pesos durante el movimiento

△ Para las idealizaciones indicadas en el planteamiento, es lógico que el problema sea trivial. Si $m \ll M$, el mayor peso caerá, prácticamente, con libertad, es decir, casi con la aceleración g. Pero, entonces, en virtud de que la cuerda es inalargable, el peso pequeño se verá obligado a ascender con esa misma aceleración. Para este fin, la fuerza que sobre él actúa por parte de la cuerda deberá ser dos veces mayor que la

fuerza de la gravedad. Por ello, la fuerza de tensión de la cuerda $T \approx 2\,mg$. Como podemos despreciar la masa de la polea, la fuerza de tensión de la cuerda es la misma en ambos lados de la polea.

Claro está, que semejante resultado puede también obtenerse de modo riguroso. Considerando las fuerzas que actúan sobre los pesos (fig. 1.1) y proyectando las ecuaciones de la segunda ley de Newton para cada uno de los pesos sobre la dirección vertical, obtenemos

$$Mg - T = Ma, \tag{1}$$

$$mg - T = -ma. \tag{2}$$

Excluyendo de estas ecuaciones la aceleración de los pesos a, hallamos

$$T = \frac{2mM}{m+M}\, g. \tag{3}$$

Para $m \ll M$ en el denominador se puede despreciar m en comparación con M. Esto nos da $T \approx 2\,mg$.

Ahora, supongamos que al comenzar a resolver este problema rigurosamente y habiendo escrito las ecuaciones (1) y (2), comprendimos que para la condición prefijada $m \ll M$ la aceleración a es prácticamente igual a g. Entonces, para hallar T se puede poner este valor de la aceleración $a = g$ en la ecuación (1) ó (2). En efecto, la sustitución de $a = g$ en la ecuación (2) proporciona el valor $T = 2mg$. No obstante, la sustitución en la ecuación (1) conduce a un inesperado resultado $T = 0$. ¿Por qué causa? Como sabemos, las ecuaciones (1) y (2) son precisas y la solución rigurosa sólo se podrá obtener al emplear estas dos ecuaciones.

Este ejemplo ilustra con brillante claridad la circunstancia de que en física las nociones de «pequeña magnitud» y «gran magnitud» están de por sí desprovistas de sentido. Si las magnitudes son «grandes» o «pequeñas» es obligatorio indicar en comparación con qué. Poniendo el valor aproximado $a = g$ en la ecuación (1) ó (2) expresamos la fuerza de tensión de la cuerda T por intermedio de la fuerza de la gravedad que actúa, correspondientemente, sobre el peso grande o sobre el peso ligero. Como la fuerza T es del mismo orden de magnitud que la fuerza de la gravedad del peso ligero mg, la ecuación (2) ofrece el resultado correcto.

La sustitución de $a = g$ en la ecuación (1) no conduce al resultado correcto, ya que en comparación con la magnitud grande Mg tanto el cero, como $2\,mg$, es casi lo mismo. Con el fin de que la ecuación (1) nos lleve al resultado correcto, hay que tener en ella en cuenta la pequeña diferencia entre a y g.

Al emplear la noción de magnitud grande o pequeña, de modo obligatorio hay que tomar en consideración con qué se compara dicha magnitud. Y aunque en muchos casos esto no se estipula explícitamente, pero siempre se sobreentiende. Así, p.ej., en este problema, despreciando la masa de la polea y de la cuerda, no estipulamos en

comparación con qué dichas magnitudes son pequeñas. Bueno, pues por cierto, ¿en comparación con qué? ▲

2. Problema no físico. Un sólido se tira al agua desde cierta altura sin velocidad inicial; con ello, se mide la profundidad de sumersión un segundo después de que aquél penetró en el agua. Fue establecido que si la altura inicial se varía k veces, la profundidad de sumersión cambiará l veces. ¿Con qué relaciones entre k y l el sólido se hunde en el agua? La resistencia del aire y del agua se desprecia.

△ Todo proceso físico es un complicado fenómeno. Al confeccionar el planteamiento del problema, de hecho, siempre simplificamos los fenómenos que consideramos, excluyendo los de poca importancia y, con frecuencia, por desgracia, también los de importancia. P. ej., resolviendo el problema del movimiento de un sólido, lanzado bajo cierto ángulo al horizonte, despreciábamos la resistencia del aire.

En el problema que resolvemos se propone, además, despreciar la resistencia del agua. Si el desprecio de la resistencia del aire está con frecuencia justificado (en particular a pequeñas velocidades), en este problema despreciar la resistencia del agua ya no se puede, puesto que, con semejante enfoque, los resultados que se obtienen no tendrán nada de común con la realidad: no tendría sentido comprobar semejante resultado en la práctica. En efecto, no tenemos en cuenta la fuente de salpicaduras que ha de elevar el sólido al chocar contra el agua; la ola que diverge por la superficie; la viscosidad del agua; no tomamos en consideración el movimiento del agua desalojada por el sólido.

Pero, a pesar de todo, tales problemas «no físicos» tienen derecho a existir: primero, gracias a la claridad de su planteamiento (en él se indica qué despreciar) ellos permiten aprender a aplicar las leyes de física para el análisis cualitativo de fenómenos que de modo artificial se han simplificado; segundo, en algunos casos tal solución puede ser la base (aproximación nula) para las posteriores especificaciones.

Pero retornemos a nuestro problema «no físico». A primera vista incluso con las indicadas simplificaciones, no está claro cómo empezar. Dirijámonos a la pregunta planteada en el problema: ¿a qué condición el sólido se hundirá en el agua? Un sólido se hunde si su masa m es mayor que la masa m_0 del agua de un mismo volumen que el del sólido. Así, pues, es preciso aclarar a qué condiciones $m_0/m < 1$.

El movimiento del sólido en el agua se produce bajo el efecto de dos fuerzas constantes: la de la gravedad mg y la de empuje de Arquímedes: $m_0 g$ y, por lo tanto, dicho movimiento será uniformemente variado con aceleración $a = g\,(1 - m_0/m)$. Como la velocidad del sólido antes de penetrar en el agua $v_0 = \sqrt{2gh}$, el desplazamiento de éste en el seno del agua durante el tiempo t

$$s_1 = \sqrt{2gh}\,t + \left(1 - \frac{m_0}{m}\right)\frac{gt^2}{2}.$$

En el segundo caso, cuando el sólido se tira desde una altura kh, el desplazamiento del sólido en el seno del agua en el transcurso de ese mismo tiempo t

$$s_2 = \sqrt{2kgh}\,t + \left(1 - \frac{m_0}{m}\right)\frac{gt^2}{2}.$$

De acuerdo con el planteamiento del problema $s_2/s_1 = l$, es decir,

$$\frac{\sqrt{2kgh} + (1 - m_0/m)\,gt/2}{\sqrt{2gh} + (1 - m_0/m)\,gt/2} = l. \qquad (1)$$

Designemos para mayor comodidad $(1 - m_0/m)\,gt/2$ por x. El sólido se hundirá si $m_0/m < 1$, es decir, si $x > 0$. Haciendo uso de la designación introducida escribamos la ecuación (1) así:

$$\sqrt{2kgh} + x = l\,(\sqrt{2gh} + x). \qquad (2)$$

Aclaremos a qué condición la raíz de esta ecuación $x = \sqrt{2gh}\,(\sqrt{k} - l)/(l - 1)$ es positiva. Con ayuda de un análisis elemental podemos cerciorarnos de que para $k > 1$ el valor de x es positivo si $l < \sqrt{k}$, mientras que con $k < 1$ el valor de $x > 0$ si $l > \sqrt{k}$.

Así, pues, el resultado obtenido puede enunciarse del siguiente modo. El sólido se hundirá en el agua si, al aumentar la altura inicial k veces, la profundidad de sumersión aumenta en el transcurso del primer segundo menos de $\sqrt{k}$ veces. Si en cambio la profundidad de sumersión crece en el primer segundo más de $\sqrt{k}$ veces el sólido emergerá.

Ahora, reflexionemos cómo se podrá precisar la solución del presente problema, si rehusamos algunas de las suposiciones simplificantes hechas más arriba. Resulta que es comparativamente fácil tomar en consideración el movimiento del agua desalojada por el sólido.

Ante todo, señalemos que con el movimiento uniforme del sólido en el líquido, la resistencia que éste opone a su movimiento está condicionada por las fuerzas del rozamiento viscoso. Pero con el movimiento variado el cuadro será otro por completo. Incluso durante el movimiento en el seno de un líquido perfecto hay que tener en cuenta que la aceleración se comunica no sólo al sólido, sino también a las partículas del propio líquido. ¿Cómo influirá esto sobre el movimiento del sólido?

Con el fin de poner en movimiento a un sólido de masa m, que se encontraba en reposo, comunicándole la velocidad v, hay que efectuar un trabajo igual a $mv^2/2$. Debido al arrastre del líquido que rodea al sólido, sus partículas adquirirán velocidades proporcionales a la velocidad del sólido v. Como resultado del arrastre por el sólido el líquido tendrá energía cinética proporcional a v^2, pero para comunicársela se requerirá trabajo adicional. Por esta razón, el trabajo

para poner en movimiento el sólido sumergido en el líquido es proporcional a v^2, pero mayor que $mv^2/2$. Escribiendo este trabajo en la forma

$$A = Mv^2/2,$$

donde $M > m$, llegamos a la conclusión de que durante la sumersión del sólido en el líquido él se moverá bajo el efecto de las fuerzas externas como si su masa también hubiese aumentado. La masa adicional, llamada asociada, caracteriza las propiedades de inercia del líquido circundante. El valor de la masa asociada depende de la densidad del líquido y de la forma del sólido.

Veamos qué varía en la solución del problema al tomar en consideración la masa asociada. Es evidente que la aceleración del sólido al moverse por el líquido bajo el efecto de la fuerza de la gravedad mg y la fuerza de empuje m_0g será igual a $a' = g\,(m - m_0)/M$. Precisamente con esta magnitud será sustituida la aceleración $a = g \times$ $\times (1 - m_0/m)$ en las expresiones para s_1 y s_2 y en la ecuación (1). Ahora, si con x designamos $g\,(m - m_0)\,t/2M$, la ecuación (2) tendrá la la forma anterior. Como el sólido se hunde con $m > m_0$, como antes de (2) hay que hallar las condiciones con las que $x > 0$.

De este modo, el hecho de tomar en cuenta la masa asociada no varía el resultado del presente problema. ▲

3. El trineo en la montaña. La vertiente de la montaña forma el ángulo α con el horizonte. ¿Bajo qué ángulo β (fig. 3.1) hay que tirar

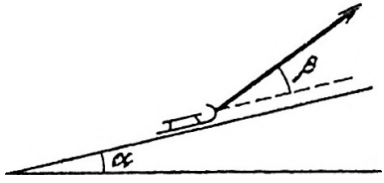


Fig. 3.1. ¿Bajo qué ángulo β hay que tirar de la cuerda?

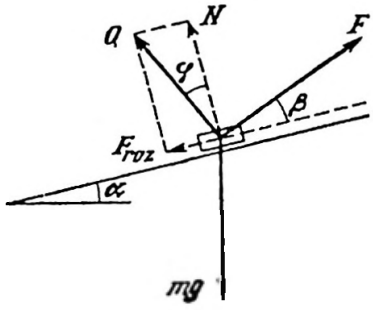


Fig. 3.2. Fuerzas que actúan sobre el trineo

de la cuerda para subir el trineo de forma uniforme a la montaña con el esfuerzo mínimo? ¿Cuál debe ser esa fuerza?

△ Considerando que el trineo es un punto material, podemos adoptar que todas las fuerzas que sobre él actúan, es decir, la fuerza de la gravedad mg, la fuerza de la reacción de la superficie de la montaña Q y la fuerza F con la que tiran de la cuerda, están aplicadas en un mismo punto (fig. 3.2). Con el movimiento uniforme del trineo la

suma vectorial de todas las fuerzas que actúan, es igual a cero:

$$F + Q + mg = 0. \tag{1}$$

Con el fin de investigar la ecuación (1) proyectemos esta igualdad vectorial sobre dos direcciones perpendiculares entre sí: a lo largo del plano inclinado y perpendicular a él. Con ello, debemos tener en cuenta que la proyección de la fuerza Q sobre la dirección de la normal al plano es la fuerza normal de la reacción N, en tanto que la proyección de Q sobre la dirección a lo largo del plano es la fuerza de rozamiento F_{roz}. Como resultado, en lugar de (1), obtenemos

$$F \cos \beta - F_{roz} - mg \operatorname{sen} \alpha = 0, \tag{2}$$

$$F \operatorname{sen} \beta + N - mg \cos \alpha = 0. \tag{3}$$

Para investigar la dependencia entre la fuerza F y el ángulo β es preciso excluir de estas ecuaciones N y F_{roz}, ya que ellas mismas dependen del ángulo β. Partiendo de la ley de Coulomb — Amontons

$$F_{roz} = \mu N. \tag{4}$$

Expresando la fuerza N de la ecuación (3) y poniéndola en (4), obtenemos

$$F_{roz} = \mu (mg \cos \alpha - F \operatorname{sen} \beta). \tag{5}$$

Tomando en consideración esta expresión para la fuerza de rozamiento, de la ecuación (2) hallamos

$$F = mg \frac{\operatorname{sen} \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \beta + \mu \operatorname{sen} \beta}. \tag{6}$$

El numerador de esta fórmula no depende de β y, por ello, la fuerza F será la mínima cuando el denominador sea el máximo. Por ello busquemos el máximo de la expresión

$$f(\beta) = \cos \beta + \mu \operatorname{sen} \beta. \tag{7}$$

Con el fin de hallar el máximo podemos igualar a cero la derivada de esta función: $f'(\beta) = 0$. También podemos hallar el máximo de forma elemental, reduciendo $f(\beta)$ a una función trigonométrica del ángulo β. Introduzcamos cierta magnitud φ de modo que tg φ sea igual al coeficiente de rozamiento μ:

$$\mu = \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{sen} \varphi / \cos \varphi. \tag{8}$$

Para todo μ se puede hacer semejante sustitución, ya que la tangente varía desde $-\infty$ hasta ∞. Poniendo μ de la relación (8) en la expresión (7) y reduciendo el segundo miembro al común denominador, obtenemos

$$f(\beta) = \frac{\cos \beta \cos \varphi + \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\cos (\beta - \varphi)}{\cos \varphi}. \tag{9}$$

Ahora, es evidente que la magnitud $f(\beta)$ es la máxima cuando $\beta = \varphi$, es decir, cuando

$$\beta = \operatorname{arctg} \mu. \tag{10}$$

Bajo este ángulo β se debe tirar de la cuerda del trineo. En este caso, la fuerza F será la menor. Con el fin de hallarla, pongamos en (6) la expresión (8) para μ y tomemos en consideración que en el caso que nos interesa $\varphi = \beta$. En virtud de esto, después de sencillas transformaciones, obtenemos

$$F = mg \operatorname{sen} (\alpha + \beta). \tag{11}$$

Analicemos el resultado obtenido. Ante todo, señalemos que la solución aducida sólo tiene sentido cuando el valor de β obtenido es tal que $\alpha + \beta \leqslant \pi/2$. Como se desprende de la fig. 3.2, si $\alpha + \beta > \pi/2$, la fuerza F se desviaría a la izquierda de la vertical y no podría arrastrar el trineo cuesta arriba. En el caso límite $\alpha + \beta = \pi/2$ la fuerza F está dirigida verticalmente hacia arriba y, como se deduce de la fórmula (11), es igual en módulo a la fuerza de la gravedad mg. Esto significa que la fuerza F mantiene el trineo suspendido, mientras que la fuerza Q es igual a cero.

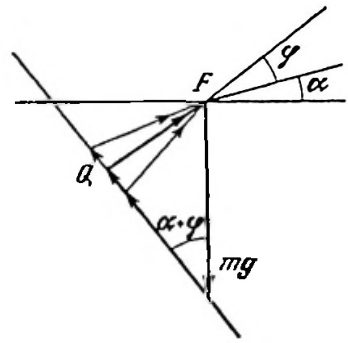


Fig. 3.3. Determinación gráfica de la fuerza mínima F

De este modo, la forma del resultado depende del ángulo α y del coeficiente de rozamiento μ. Si $\alpha + \operatorname{arctg} \mu < \pi/2$, a las preguntas planteadas ofrecen la respuesta las fórmulas (10) y (11). En caso contrario, la fuerza F debería estar dirigida verticalmente hacia arriba y ser igual en módulo a la fuerza de la gravedad mg.

Este problema tiene una bella solución gráfica. Con este fin, señalemos que la magnitud φ, introducida de modo formal mediante la relación (8), tiene un sencillo sentido físico: en virtud de la ley de Coulomb — Amontons (4), φ es el ángulo formado por la fuerza de la reacción del apoyo Q con la normal al plano inclinado (fig. 3.2). Por ello, la ecuación (1) se investiga gráficamente con facilidad.

Primero representemos en el diseño la fuerza mg, conocida en módulo y dirección (fig. 3.3). En lo que se refiere al sumando Q, sólo conocemos de antemano su sentido: como se ve en la fig. 3.2, él forma el ángulo $\varphi = \operatorname{arc\,tg} \mu$ con la normal al plano inclinado, o sea, el ángulo $\alpha + \beta$ con la vertical. Debido a esto, por el extremo del vector mg trazamos una recta que con la vertical forme el ángulo $\alpha + \varphi$. Sobre dicha recta trazamos la fuerza Q, haciendo coincidir su origen con el extremo del vector mg. A continuación, de acuerdo

con la ecuación (1), construimos la fuerza F que debe cerrar el triángulo de fuerza, es decir, unir el extremo del vector Q con el origen del vector mg. De la fig. 3.3 se desprende que el módulo de la fuerza F será el mínimo cuando su dirección forma un ángulo recto con el sentido de Q, es decir, el ángulo $\alpha + \varphi$ con el horizonte o, en otras palabras, el ángulo $\varphi = \text{arctg}\ \mu$ con la vertiente de la montaña.

En la fig. 3.3 vemos que esta solución sólo tiene sentido cuando $\alpha + \text{arctg}\ \mu < \pi/2$. Por regla, el coeficiente de rozamiento es pequeño y esta condición sólo no se cumple con ángulos α próximos a $\pi/2$. O sea, la solución expresada con la fórmula (10) sólo puede resultar incierta durante el ascenso a una montaña muy abrupta.

En conclusión proponemos reflexionar sobre el problema siguiente: ¿por qué las ruedas delanteras de un carro aldeano, a cuyos ejes se fijan las lanzas, por regla, son menores que las posteriores? ▲

4. Tablas sobre un plano inclinado. Sobre un plano inclinado, que con el horizonte forma el ángulo α, yacen dos tablas, una sobre otra (fig. 4.1). ¿Se podrán elegir tales valores de las masas de las tablas m_1 y m_2, los coeficientes de rozamiento de las tablas con el plano μ_1 y entre sí μ_2 que la tabla inferior se deslice por debajo de la superior? En el momento inicial las tablas están en reposo.

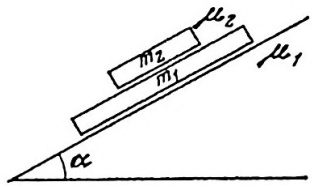


Fig. 4.1. Tablas sobre un plano inclinado

△ A primera vista este problema es de los más corrientes. Es preciso examinar todas las fuerzas que actúan sobre las tablas y, haciendo uso de las leyes de Newton, confeccionar las ecuaciones de movimiento. Después de resolverlas hallamos las aceleraciones a_1 y a_2 y, para dar respuesta a la pregunta planteada, sólo nos queda aclarar a qué condiciones la aceleración de la tabla inferior a_1 es mayor que la de la superior a_2. No obstante, si intentamos cumplir este programa, de inmediato tropezaremos con dificultades. Con el fin de resolver las mencionadas ecuaciones hay que conocer cómo están dirigidas todas las fuerzas que actúan. Pero, ¿cómo están dirigidas las fuerzas de rozamiento de las tablas entre sí? Esto depende de su velocidad relativa, es decir, de cuál de las tablas se desliza con mayor aceleración. Resulta un círculo vicioso: para hallar las aceleraciones hay que conocer el sentido de las fuerzas, mientras que para esto, hay que conocer cuál de las aceleraciones es mayor. Semejante situación es característica para muchos de los problemas donde se tiene en cuenta el rozamiento. Claro está que podemos, consecutivamente, considerar todas las posibles variantes y excluir aquellas que conducen a resultados absurdos. Pero con el fin de que no surjan semejantes problemas, puede ser hallado otro enfoque.

En el presente problema sólo tenemos que aclarar si es posible el movimiento de la tabla inferior con mayor aceleración. Supongamos que esto es posible, es decir, que hemos elegido tales valores de las masas y los coeficientes de rozamiento con los que $a_1 > a_2$. Entonces, el sentido de todas las fuerzas se determina unívocamente y está indicado en la fig. 4.2, donde F es la fuerza de rozamiento de la tabla inferior con el plano inclinado; $F_1 = -F_2$, las fuerzas de rozamiento de las tablas entre sí; N, la fuerza normal de la reacción del plano inclinado; $N_1 = -N_2$, las fuerzas de presión de las tablas, una contra otra. Al confeccionar las ecuaciones de movimiento de las tablas y al proyectarlas sobre el sentido del plano inclinado, obtenemos

$$m_1 g \operatorname{sen} \alpha - F - F_1 = m_1 a_1,$$
$$m_2 g \operatorname{sen} \alpha + F_1 = m_2 a_2.$$

De estas ecuaciones se desprende de inmediato que para cualesquiera masas y coeficientes de rozamiento

$$a_1 < g \operatorname{sen} \alpha, \quad a_2 > g \operatorname{sen} \alpha,$$

es decir, $a_1 < a_2$. Hemos obtenido una contradicción: con la suposición de que $a_1 < a_2$, de las ecuaciones de dinámica se desprende que

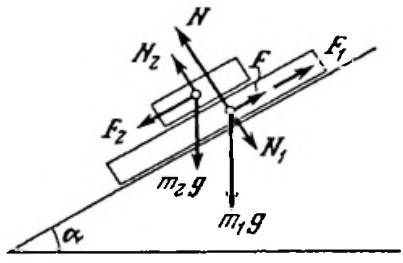


Fig. 4.2. Fuerzas que actúan a condición de que la tabla inferior se desliza por debajo de la superior

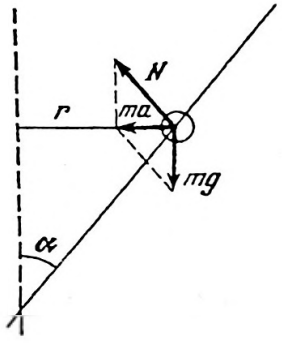


Fig. 5.1. Fuerzas que actúan sobre la bolita inmóvil con relación a la varilla

$a_1 > a_2$, Como las ecuaciones de dinámica sin duda alguna son ciertas, la contradicción obtenida quiere decir que la suposición acerca de la posibilidad del movimiento de la tabla inferior con mayor aceleración es errónea. ▲

5. **Una bolita en una varilla en rotación.** En una varilla lisa, situada bajo el ángulo α a la vertical, está montada una bolita (fig. 5.1). La varilla gira a velocidad angular ω en torno al eje vertical. Descri-

ban el movimiento de la bolita por la varilla. El rozamiento se desprecia.

△ ¿Puede estar la bolita en reposo con relación a la varilla? Supongamos que puede. Esto significa que existe tal punto en la varilla (a la distancia r del eje de rotación, véase la fig. 5.1) que al encontrarse en él la bolita está en reposo con respecto a la varilla, es decir, la fuerza de la gravedad mg, que sobre ella actúa, y la fuerza de la reacción de la varilla N comunican a la bolita la aceleración a igual a la aceleración centrípeda de este punto de la varilla. De la figura se deduce

$$mg \operatorname{ctg} \alpha = m a,$$

de donde se desprende (ya que $a = \omega^2 r$) que $r = (g/\omega^2) \operatorname{ctg} \alpha$. Cuando la bolita se encuentra en ese punto ella está en reposo con relación a la varilla. Así pues, existe la posición de equilibrio de la bolita en la varilla en rotación.

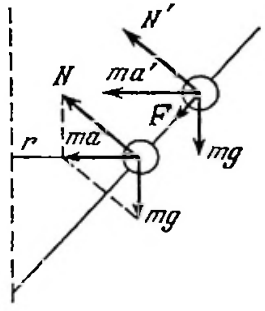


Fig. 5.2. Para que la bolita se mantenga en la posición desplazada hacia arriba se necesita la fuerza F que actúa hacia abajo a lo largo de la varilla.

¿Será el equilibrio estable? En otras palabras, ¿cómo se comportará la bolita si, por cualquier causa, ella se desvía un poco de dicha posición? Con el fin de aclarar esta cuestión operamos del modo siguiente: desviemos la bolita un poco hacia arriba por la varilla y aclaremos bajo qué condición la bolita se encontrará en equilibrio en el nuevo punto. Aquí ya serán insuficientes dos fuerzas mg y N, ya que en presencia de sólo estas dos fuerzas la posición de equilibrio se determina unívocamente por la fórmula (1). Se necesita la tercera fuerza. Ella podría ser la fuerza de rozamiento de la bolita con la varilla. Averigüemos en qué sentido debería estar dirigida (fig. 5.2). El módulo y el sentido de la fuerza de la gravedad no han cambiado, tampoco ha variado el sentido de la fuerza normal de la reacción de la varilla N. Como $ma' > ma$ es preciso que la fuerza de rozamiento esté dirigida hacia abajo por la varilla. Pero de acuerdo con el planteamiento del problema no hay semejante fuerza, por lo que la bolita se deslizará hacia arriba por la varilla. Con razonamientos análogos es posible mostrar que con un pequeño desplazamiento hacia abajo la bolita se deslizará hacia abajo, es decir, se alejará de la posición de equilibrio. Así pues, la posición de equilibrio de la bolita en la varilla en rotación será inestable.

¿Cuál será la conducta de la bolita en presencia del rozamiento? Como la fuerza de rozamiento en reposo puede variar desde cero hasta cierto valor máximo, de los razonamientos anteriores queda claro que

debe haber un sector completo de la varilla en cualquier punto del cual la bolita estará en reposo con relación a la varilla. Proponemos al lector que halle independientemente la posición de los límites de este sector cuando el coeficiente de rozamiento es conocido. Si al hacer lo indicado surgen dificultades, recomendamos que se familiaricen con el problema 7 «Un bloque sobre un plano inclinado». ▲

6. Una moneda sobre un soporte horizontal. Un soporte con una moneda que en él yace está en movimiento uniforme, en el plano horizontal, por una circunferencia de radio r a velocidad angular ω. El coeficiente de rozamiento de la moneda por el soporte es igual a μ. ¿Cuál será el movimiento estacionario de la moneda?

△ Por consideraciones de simetría, está claro que el movimiento estacionario de la moneda transcurre por la circunferencia con igual velocidad angular ω. En efecto, en el plano horizontal no hay ninguna dirección que se destaque desde el punto de vista físico. Por ello, cualesquiera que sean las condiciones iniciales, para el movimiento estacionario la trayectoria de la moneda, en el sistema inercial de referencia del laboratorio, será una circunferencia. De las condiciones iniciales sólo depende la posición del centro de dicha circunferencia. Cualquier otra posible trayectoria no posee semejante propiedad, es decir, la falta de direcciones destacadas. Las consideraciones de simetría permiten llegar a la conclusión de que, con relación al soporte, la moneda, si ella no patina, también se mueve por una circunferencia. Ahora, cuando en su total nos imaginamos el carácter del movimiento de la moneda, sólo nos queda establecer las relaciones cuantitativas entre sus características, en particular expresar los radios de las circunferencias que describe la moneda en uno u otro sistema de referencia, mediante los datos aducidos en el planteamiento.

En el plano horizontal sobre la moneda sólo actúa la fuerza de rozamiento por parte del soporte. Primero, consideremos el caso cuando la moneda se mueve junto con el soporte. Como con el movimiento de traslación del soporte todos sus puntos se mueven por iguales circunferencias de radio r, la moneda también se desplazará por esa misma circunferencia con aceleración $\omega^2 r$, dirigida hacia su centro. Como esta aceleración a la moneda se la comunica la fuerza de rozamiento en reposo, cuyo valor no puede sobrepasar μmg, el movimiento estacionario de la moneda transcurrirá junto con el soporte, cumpliéndose la condición $\omega^2 r \leqslant \mu g$, es decir, $\omega^2 r/\mu g \leqslant 1$.

Para los valores de este parámetro adimensional $\omega^2 r/\mu g > 1$ (es decir, siendo mayores la velocidad angular ω o bien el radio r, o por último, menor el coeficiente de rozamiento μ) la moneda patinará respecto del soporte. En este caso, la aceleración centrípeda será comunicada a la moneda por la fuerza de rozamiento de deslizamiento dirigida en sentido opuesto al vector v de la velocidad de la moneda

con relación al soporte. Durante el movimiento por la circunferencia la fuerza es perpendicular a la velocidad V de la moneda en el sistema inercial de referencia. Por ello, los vectores V y v son perpendiculares entre sí. La velocidad V de la moneda en el sistema de referencia del laboratorio es la suma vectorial de la velocidad v de la moneda respecto del soporte y la velocidad u del punto del soporte en el que, en el momento dado, se halla la moneda (aunque, claro está, las velocidades de todos los puntos del soporte son iguales durante su movimiento de traslación):

$$V = v + u. \tag{1}$$

La imagen gráfica de la relación (1) se ofrece en la fig. 6.1, donde se ha tenido en cuenta la indicada ortogonalidad de los vectores V y v. De dicha figura se desprende que al patinar la moneda su velocidad V en el sistema de laboratorio siempre es menor que la del soporte $u = \omega r$. En correspondencia con el planteamiento, el vector u gira a velocidad angular ω, por ello, asimismo, todo el triángulo de fuerzas en la fig. 6.1 gira como un todo, así que la disposición mutua de todos los vectores queda invariable. Esto significa, que el ángulo α entre los vectores u y v de hecho caracteriza el retardo de fase del vector V de la velocidad de la moneda respecto del vector u de la velocidad del soporte.

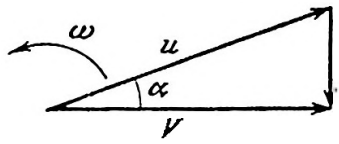


Fig. 6.1. Disposición mutua de los vectores de las velocidades V de la moneda y u del soporte

Con el fin de determinar el radio R de la trayectoria circular de la moneda en el sistema de referencia del laboratorio, hacemos uso de la segunda ley de Newton, es decir, igualamos la fuerza de rozamiento de deslizamiento μmg al producto de la masa de la moneda m por la aceleración $\omega^2 R$: $\mu g = \omega^2 R$. De aquí

$$R = \mu g/\omega^2, \quad \omega^2 r/\mu g \geqslant 1. \tag{2}$$

Es de interés señalar que con el patinaje de la moneda el radio R de su trayectoria de movimiento no depende del radio r de las circunferencias por las que se mueven los puntos del soporte. No obstante, como se desprende de (2), el radio R no sobrepasa r y sólo se hace igual a él al alcanzar el valor límite del parámetro $\omega^2 r/\mu g = 1$, cuando cesa el patinaje.

Tampoco ofrece dificultades el cálculo del radio ρ de la circunferencia por la que la moneda se mueve con relación al soporte. Todas las velocidades que figuran en la fórmula (1) están ligadas con los radios de las correspondientes circunferencias mediante las relaciones

$$V = \omega R, \quad v = \omega \rho, \quad u = \omega r. \tag{3}$$

Como el triángulo de velocidades en la fig. 6.1 es rectángulo, con ayuda del teorema de Pitágoras y las relaciones (3), obtenemos

$$r^2 = \rho^2 + R^2, \text{ de donde } \rho = \sqrt{r^2 - R^2}. \quad (4)$$

Poniendo aquí el valor hallado de R de (2), obtenemos

$$\rho = r\sqrt{1 - (\mu g/\omega^2 r)^2}, \quad \omega^2 r/\mu g \geqslant 1. \quad (5)$$

Vemos que el radio ρ de la huella que la moneda traza sobre el soporte también es menor que el radio r de la trayectoria del soporte.

La correlación entre ρ y R puede ser variada. En caso de movimiento «rápido», cuando $\omega^2 r/\mu g \gg 1$, la moneda en el sistema inercial de referencia del laboratorio está, prácticamente, inmóvil ($R \ll r$), mientras que el soporte debajo de ella describe una circunferencia de radio r, de modo que $\rho \approx r$.

En caso de movimiento lento del soporte, cuando $\omega^2 r/\mu g \gg 1$, la moneda casi no se atrasa del soporte, describiendo en el sistema de referencia del laboratorio una circunferencia de casi el mismo radio ($R \approx r$), de modo que $\rho \approx 0$.

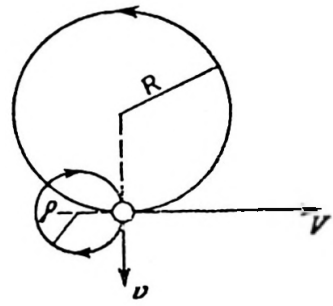


Fig. 6.2. Trayectoria de movimiento de la moneda y su huella en el soporte

En la fig. 6.2 se muestran la trayectoria de movimiento de la moneda en el sistema de referencia del laboratorio (circunferencia de radio R) y la huella que la moneda traza en el soporte (la circunferencia de radio ρ) para el caso cuando $R > \rho$. Si en el sistema de referencia del laboratorio la moneda se mueve por la circunferencia en sentido antihorario, entonces, con relación al soporte, su movimiento será en sentido horario.

Es de interés considerar el desfasaje α entre el movimiento del soporte y de la moneda en los casos límites que analizamos de movimiento rápido y lento del soporte. Realicen esto por su cuenta, teniendo en cuenta que, como se desprende de la fig. 6.1, $\cos \alpha = V/u = R/r$. ▲

7. Un bloque en un plano inclinado. El plano inclinado que forma el ángulo α con el horizonte, se mueve de forma horizontal con una aceleración a en la dirección indicada en la fig. 7.1. ¿Cómo se moverá un bloque que yace en él, si el coeficiente de rozamiento del bloque por el plano inclinado es igual a μ?

△ Para empezar, consideremos el caso más sencillo cuando el plano está en reposo o en movimiento uniforme ($a = 0$). En este caso la conducta del bloque se investiga con suma facilidad. Si $\mu \geqslant \operatorname{tg} \alpha$

el bloque está en reposo en el plano inclinado, si $\mu < \operatorname{tg} \alpha$, él se desliza hacia abajo con aceleración.

Ahora, aclaremos al cumplir qué condición el bloque yacerá inmóvil en el plano inclinado durante el movimiento acelerado de éste. Es evidente, que en semejante caso la aceleración del bloque debe coincidir con la del plano. Con este fin, es necesario que la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre el bloque sea igual al producto de su masa por la aceleración a. Sobre el bloque actúan la fuerza de la gravedad mg, la fuerza de la reacción del plano inclinado N y la fuerza de rozamiento en reposo F. Recordemos que esta última fuerza puede variar desde cero hasta el valor máximo igual a μN. Es posible que ella esté dirigida tanto hacia arriba, como hacia abajo a lo largo del plano inclinado. Si la aceleración del plano a_0 es

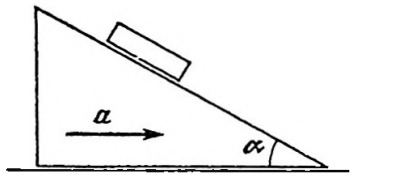


Fig. 7.1. El plano inclinado se desplaza con la aceleración prefijada a

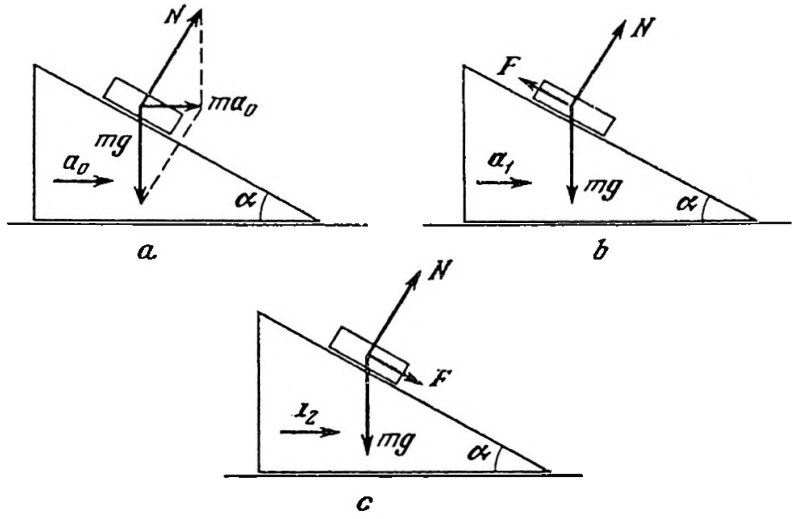


Fig. 7.2. Fuerzas que actúan sobre el bloque con distintas aceleraciones del plano inclinado

tal que $mg + N = ma_0$, on hay fuerza de rozamiento: $F = 0$ (fig. 7.2 *a*). ¡Naturalmente, esto no significa que, de golpe y porrazo, la tabla se ha hecho lisa! Simplemente, si $a = a_0$ la velocidad relativa del bloque y de la superficie es también igual a cero, al

no haber fuerza de rozamiento, por lo que ésta no surge. De la fig. 7.2 *a* se desprende que $a_0 = g \operatorname{tg} \alpha$.

Si la aceleración del plano inclinado a es algo menor que a_0 y no hay rozamiento, es decir, cuando $\mu = 0$, el bloque se deslizaría hacia abajo; cuando $\mu \neq 0$ surge la fuerza de rozamiento dirigida hacia arriba a lo largo del plano inclinado y el bloque quedará inmóvil. Pero como la fuerza de rozamiento en reposo no puede superar μN, si la aceleración del plano es suficientemente pequeña, menor que cierto valor a_1, el bloque se deslizará hacia abajo. Este valor de la aceleración a_1 se halla partiendo de la condición de que la fuerza de rozamiento F es igual a su valor máximo μN y está dirigida hacia arriba por el plano inclinado (fig. 7.2 *b*). Compongamos la ecuación de movimiento del bloque $mg + N + F = ma_1$ y proyectémosla sobre la la dirección a lo largo del plano inclinado y por la normal hacia él:

$$\left.\begin{aligned} mg \operatorname{sen} \alpha - \mu N &= ma_1 \cos \alpha, \\ N - mg \cos \alpha &= ma_1 \operatorname{sen} \alpha. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Excluyendo N, hallamos

$$a_1 = g \frac{\operatorname{sen} \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu \operatorname{sen} \alpha}. \quad (2)$$

Así pues, si la aceleración del plano $a < a_1$ el bloque se desplaza hacia abajo.

Señalemos que si $\mu > \operatorname{tg} \alpha$ la aceleración a_1 será negativa. ¿Qué sentido tiene esto? Recordemos que para $\mu \geqslant \operatorname{tg} \alpha$ el bloque no se deslizará y cuando $a = 0$ (el plano inclinado está inmóvil o en movimiento uniforme). Tampoco se deslizará el bloque si $a < 0$, cuando la aceleración del plano está dirigida a la izquierda, hasta que el módulo de la aceleración no supera a $|a_1|$. En efecto, las ecuaciones (1) son ciertas, asimismo, cuando la aceleración a_1 está dirigida a la izquierda si se entiende por a_1 su proyección sobre el sentido horizontal.

Así pues, hemos hallado la condición de deslizamiento del bloque con cualesquiera μ y α:

$$a < g \frac{\operatorname{sen} \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu \operatorname{sen} \alpha}.$$

Ahora, supongamos que la aceleración del plano a es algo mayor que a_0. Entonces, si $\mu = 0$ el bloque se desplazaría hacia arriba a lo largo del plano; si $\mu \neq 0$ surge la fuerza de rozamiento en reposo, dirigida hacia abajo a lo largo del plano, y el bloque queda inmóvil en el plano. Con el crecimiento de a también aumenta la fuerza de rozamiento y cuando la aceleración se hace tal que la fuerza de rozamiento F alcanza su máximo valor μN, el bloque comienza a deslizarse hacia arriba. Aclaremos con qué aceleración del plano a_2 la fuerza de rozamiento será igual a μN (fig. 7.2 *c*). Confeccionando,

como antes lo hicimos, la ecuación de movimiento del bloque $mg + N + F = ma_2$ y proyectándola sobre las mismas direcciones:

$$mg \operatorname{sen} \alpha + \mu N = ma_2 \cos \alpha, \quad N - mg \cos \alpha = ma_2 \operatorname{sen} \alpha,$$

hallamos

$$a_2 = g \frac{\operatorname{sen} \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \operatorname{sen} \alpha}.$$

Así pues, si la aceleración del plano $a > a_2$ el bloque se desliza hacia arriba. Señalemos que a_2 si $\mu = \operatorname{ctg} \alpha$ se reduce a la infinidad. Esto quiere decir que si $\mu \geqslant \operatorname{ctg} \alpha$ el bloque no se deslizará hacia arriba cualquiera que sea la aceleración del plano.

Reuniendo en conjunto los resultados obtenidos podemos escribir las condiciones de inmovilidad del bloque en el plano inclinado:

$$g \frac{\operatorname{sen} \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu \operatorname{sen} \alpha} \leqslant a \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} g \dfrac{\operatorname{sen} \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \operatorname{sen} \alpha}, & \mu < \operatorname{ctg} \alpha; \\ \infty, & \mu \geqslant \operatorname{ctg} \alpha. \end{cases} \blacktriangle$$

8. Un bloque sobre una cuña móvil. En la parte superior de una cuña de masa M, que puede desplazarse sin rozamiento por una superficie horizontal (fig. 8.1), se coloca un bloque de masa m y se suelta

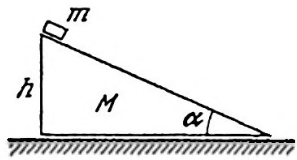


Fig. 8.1. En el momento inicial el bloque y la cuña están inmóviles

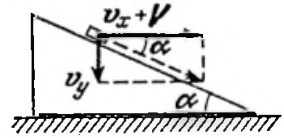


Fig. 8.2. La velocidad del bloque con relación a la cuña está dirigida a lo largo de la superficie de la cuña

sin darle un empujón inicial. ¿Qué velocidad horizontal adquirirá la cuña hacia el momento en que el bloque se deslice hasta el fin? ¿Qué ángulo formará con el horizonte el vector velocidad del bloque v si el ángulo en la base de la cuña es igual a α? La altura de la cuña es h. El rozamiento entre el bloque y la superficie de la cuña se desprecia.

△ Lo más sencillo sería dar respuesta a las preguntas planteadas empleando las leyes de la conservación del impulso (de la cantidad de movimiento) y la energía. Pero en nuestro caso, las leyes de la conservación son insuficientes. Además, es preciso utilizar la ligazón cinemática entre las velocidades de la cuña y el bloque, que expresa la condición de que el movimiento del bloque transcurre por la superficie de la cuña.

Designemos las componentes horizontal y vertical de la velocidad del bloque con relación a la tierra por v_x y v_y, mientras que la velocidad de la cuña en ese mismo momento, por $-V$. Como al deslizarse el bloque la cuña se desplaza a la izquierda, la componente horizontal de la velocidad del bloque respecto de la cuña es igual a $v_x + V$

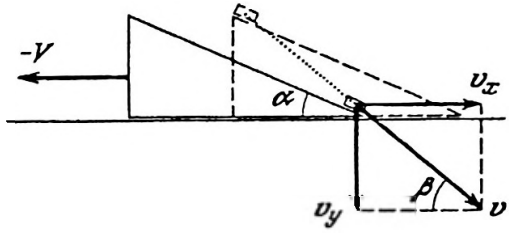


Fig. 8.3. El vector de velocidad v y la trayectoria del bloque (línea de trazos) con relación a la tierra

(fig. 8.2). La velocidad total del bloque con relación a la cuña debe estar dirigida a lo largo de su superficie, por ello, con ayuda de la fig. 8.2, hallamos de inmediato

$$v_y = (v_x + V) \operatorname{tg} \alpha. \tag{1}$$

Esta es la relación cinemática buscada.

El vector velocidad del bloque con relación a la tierra v forma el ángulo β con el horizonte, cuya tangente es igual a la razón v_y/v_x (fig. 8.3). Por ello, mediante la relación (1) tenemos

$$\operatorname{tg} \beta = v_y/v_x = (1 + V/v_x) \operatorname{tg} \alpha. \tag{2}$$

Las magnitudes v_x y V se pueden ligar con ayuda de la condición de la conservación de la componente horizontal del impulso del sistema, la cual expresa el hecho de que el centro de masas del sistema no se desplaza en sentido horizontal:

$$mv_x = MV. \tag{3}$$

La relación (3) permite escribir la fórmula (2) para tg β en la forma

$$\operatorname{tg} \beta = (1 + m/M) \operatorname{tg} \alpha. \tag{4}$$

En la fig. 8.3 se muestra con una línea de puntos la trayectoria del bloque con relación a la tierra. Si la masa del bloque es mucho menor que la de la cuña, es decir $m/M \ll 1$, de la fórmula (4) obtenemos $\beta \approx \alpha$. Así debe ser, ya que en este caso límite la cuña, prácticamente, no se pone en movimiento. En el otro caso límite, $m/M \gg 1$ el ángulo $\beta \approx \pi/2$: la cuña ligera se desliza de debajo del pesado bloque que, en realidad, cae a plomo.

Sólo nos queda hallar la velocidad horizontal de la cuña en el momento en que el bloque se deslice hasta su base. Esto se puede

hacer si empleamos, además, la ley de la conservación de la energía mecánica. Como no hay rozamiento, la energía potencial inicial del bloque se convierte en su total en la energía cinética del bloque y la cuña:

$$mgh = \frac{m(v_x^2 + v_y^2)}{2} + \frac{MV^2}{2}. \qquad (5)$$

Poniendo primero en esta ecuación v_y de la expresión (1) y, a continuación, v_x de la ley de la conservación del impulso (3), hallamos

$$V^2 = \frac{2gh}{(M/m)^2 + (1 + M/m)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + M/n}. \qquad (6)$$

De modo independiente, consideren las expresiones que se obtienen de la fórmula (6) en los casos límites $m/M \ll 1$ y $m/M \gg 1$ y expliquen los resultados. ▲

9. Bolitas en un hilo largo. De un hilo muy largo está suspendida una bolita de masa m_1, a la que con hilo de largura l se cuelga una bolita de masa m_2 (fig. 9.1). ¿Qué velocidad inicial v_0 hay que comunicar en sentido horizontal a la bolita inferior para que el hilo que une las bolitas se desplace hasta ocupar la posición horizontal?

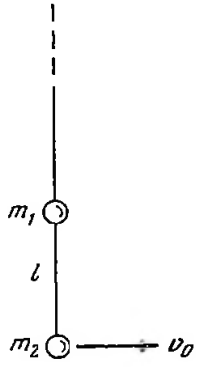


Fig. 9.1. Posición inicial del hilo con las bolitas

△ ¿Qué importancia tiene el hecho que la bolita superior esté suspendida de un hilo muy largo? Esto significa que ella se moverá, prácticamente, por una recta horizontal, mientras que el hilo largo permanecerá en posición vertical. Si comprendemos este hecho, la posterior resolución no deberá provocar dificultades de principio. Todas las fuerzas externas que actúan sobre el sistema, es decir, la fuerza de tensión del hilo superior y las fuerzas de la gravedad que obran sobre las bolitas, están dirigidas verticalmente, por ello la componente vertical del impulso total del sistema se conserva. En el momento en que las bolitas se encuentren a igual altura la componente horizontal v_h de la velocidad de la segunda bolita será igual a la velocidad de la primera bolita. Esto se desprende de la inextensibilidad del hilo que las une. Por esto, la conservación de la componente horizontal del impulso del sistema se puede escribir en la forma

$$m_2 v_0 = (m_1 + m_2)\, v_h. \qquad (1)$$

Designando la componente vertical de la velocidad de la bolita inferior por v_v, escribamos asimismo la ecuación de la ley de la conser-

vación de la energía mecánica:

$$\frac{m_2 v_0^2}{2} = \frac{(m_1+m_2)\, v_h^2}{2} + \frac{m_2 v_v^2}{2} + m_2 g l. \qquad (2)$$

De la ecuación (2) se desprende que el valor mínimo de la velocidad v_0 corresponde al caso cuando la componente vertical v_v se anula en el momento que a nosotros nos interesa: $v_v = 0$. Sustituyendo en (2)

$$v_h = v_0 m_2/(m_1 + m_2)$$

de (1) obtenemos

$$v_{0\ \text{mín}} = \sqrt{2gl\,(1 + m_2/m_1)}. \qquad (3)$$

Si la bolita inferior es mucho más ligera que la superior, es decir, $m_2 \ll m_1$, la bolita superior, prácticamente, quedará inmóvil. En este caso límite la fórmula (3) proporciona un valor correcto de la velocidad inicial $v_{0\ \text{mín}} = \sqrt{2\,gl}$, lo que es evidente, asimismo, partiendo de razonamientos elementales. Si por el contrario, $m_1 \ll m_2$, la presencia de la bolita ligera m_1 no se reflejará, prácticamente, en el mo vimiento del hilo con la bola pesada m_2 (parece como si el sistema «nosintiera» la presencia de la bolita ligera). Con esto, el hilo que une las bolitas ocupará la posición horizontal sólo cuando todo el hilo largo se d esvíe hasta esta misma posición, es decir, con $v_{0\ \text{mín}} = \sqrt{2\,gL}$, donde L es la longitud sumaria de ambos hilos. Claro está que en este caso, la fórmula (3) no es aplicable, ya que fue obtenida en la suposición de que el hilo superior todo el tiempo está en posición vertical. ▲

10. Una bala atraviesa un globo. Una bala de masa m en vuelo horizontal penetra en un globo de masa M, inicialmente en reposo, y sale de él a una velocidad dos veces menor que la primaria. ¿Qué parte de la energía cinética se transformará en la energía interna?

△ Designemos la velocidad de la bala antes de chocar con el globo por v, mientras que la adquirida por el globo V. De acuerdo con el planteamiento, la velocidad de la bala al salir del globo es igual a $v/2$, por ello la ecuación de la ley de la conservación del impulso en la proyección sobre la dirección horizontal toma la forma

$$mv = MV + mv/2. \qquad (1)$$

De esta ecuación se puede obtener de inmediato la velocidad V adquirida por el globo:

$$V = mv/2\,M. \qquad (2)$$

El incremento de la energía interna, o sea, la cantidad de calor Q desprendida durante la interacción inelástica de la bala con el globo,

se puede hallar con ayuda de la ley de la conservación de la energía:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{MV^2}{2} + \frac{m\,(v/2)^2}{2} + Q. \qquad (3)$$

Poniendo aquí V de (2), hallamos

$$Q = \frac{mv^2}{8}\left(3 - \frac{m}{M}\right). \qquad (4)$$

Como la energía cinética inicial de la bala $E_0 = mv^2/2$, para la razón Q/E_0 buscada, de (4) obtenemos

$$\frac{Q}{E_0} = \frac{1}{4}\left(3 - \frac{m}{M}\right). \qquad (5)$$

Pero, ¿acaso podemos considerar que la fórmula hallada da respuesta a la pregunta planteada? Ella expresa la magnitud buscada por intermedio de los datos aducidos en el planteamiento del problema, pero es prematuro poner punto y aparte, ya que el resultado obtenido debe ser todavía investigado. Es evidente que la razón Q/E_0 debe ser positiva, por ello se impone la conclusión de que la fórmula (5) es aplicable si $m/M < 3$. P. ej., supongamos que la razón $m/M = 2$. Entonces, la fórmula (5) proporciona para Q/E_0 el valor 1/4. Al parecer todo está bien, ya que Q/E_0 se ha obtenido positivo y es menor que la unidad. Pues, a pesar de todo, este resultado no tiene sentido con los datos aducidos en el planteamiento del problema. En efecto, examinemos la fórmula (2). De ella se desprende que para $m/M = 2$ la velocidad $V = v$: ¡el globo atravesado por la bala vuela a una velocidad que supera dos veces la de la bala $v/2$! Hemos obtenido un absurdo físico. Ya en el proceso de resolución después de obtener la fórmula (2), era necesario prestar atención a que después de atravesar el globo, la bala sólo puede tener la velocidad $v/2$ al verificar la condición $v/2 > V$, es decir, cuando

$$m/M < 1. \qquad (6)$$

Sólo en conjunto con la condición (6) la fórmula (5) nos ofrece la respuesta a la pregunta planteada en este problema. Ahora, queda claro que en dependencia de la razón entre las masas m/M, puede convertirse en energía interna desde la mitad (si $m \to M$) hasta tres cuartos (si $m \to 0$) de la energía cinética inicial.

Ahora, reflexionemos acerca de si tiene algún sentido la fórmula (5) cuando $1 \leqslant m/M \leqslant 3$. Si $m = M$, de la fórmula (2) se deduce que $V = v/2$, es decir, el globo y la bala tienen igual velocidad. Después de chocar, los sólidos vuelan en conjunto, es decir, la bala se atasca en el globo. En semejante caso se habla de un choque perfectamente inelástico. Claro que no hay que pensar que semejante choque sólo es posible con $m = M$: aquí ha sucedido así en virtud de que en el planteamiento se ha prefijado la velocidad final igual a $v/2$. Si se verifica la desigualdad rigurosa $1 < m/M < 3$, después

del choque el globo vuela adelante a la velocidad V determinada por la fórmula (2): $v/2 < V < 3v/2$. Durante tal choque inelástico se convierte en energía interna hasta la mitad de la energía cinética inicial. Por último, si $m/M = 3$, como se desprende de (4), $Q = 0$, es decir, no se desprende calor en absoluto: durante el choque se conserva la energía mecánica. Éste es el caso de choque perfectamente elástico. ▲

11. La tabla que se desliza. En el extremo de una tabla de longitud L y masa M se encuentra un pequeño bloque de masa m (fig. 11.1). La tabla puede deslizarse sin rozamiento por el plano horizontal. El coeficiente de rozamiento del bloque por la superficie de la tabla es igual a μ. ¿Qué velocidad horizontal v_0 hay que comunicarle de golpe a la tabla para que ella se deslice por debajo del bloque?

△ Al comunicar a la tabla la velocidad horizontal v_0, mediante un brusco empujón o bien golpe, el bloque no recibe velocidad inicial con relación a la tierra, ya que la fuerza de rozamiento que sobre él actúa por parte de la tabla no puede sobrepasar μmg y en el transcurso del corto tiempo del golpe no puede comunicar al bloque un notorio impulso. Después del golpe en el sistema de referencia relacionado con la tierra, el bloque se mueve uniformemente acelerado y la tabla, uniformemente retardada.

Si la velocidad inicial de la tabla v_0 no es grande, puede llegar un momento tal en que las velocidades de la tabla y el bloque adquieran iguales valores. En este momento el deslizamiento cesa, a continuación ambos sólidos se ponen en movimiento uniforme a igual velocidad v como un sólido enterizo y, claro está, la tabla ya no saldrá de debajo del bloque. Por el contrario, si la velocidad inicial de la tabla es suficientemente grande, la velocidad de ésta y del bloque pueden no tener tiempo para igualarse en el transcurso del tiempo durante el que el bloque se desliza a lo largo de toda la tabla. En semejante caso, la tabla se deslizará de debajo del bloque.

Designemos por s la distancia que recorre el bloque por la tabla hasta el momento cuando cesa el deslizamiento. Es evidente, que al verificarse la desigualdad $s < L$ la tabla no se desliza de debajo del bloque. Si esta desigualdad no se verifica la tabla se deslizará de debajo del bloque.

Este problema es un claro ejemplo de que al resultado llegaremos de modo más sencillo y rápido si utilizamos las leyes de la conservación, en comparación con la aplicación directa de las leyes de dinámica. Resulta que, para obtener de inmediato el resultado, es suficiente escribir dos ecuaciones, correspondientes a las leyes de la conservación del impulso y la energía.

Como según el planteamiento entre la tabla y el plano no hay rozamiento, el impulso del sistema, dirigido en sentido horizontal, queda invariable. Ya que después de cesar el deslizamiento ambos

sólidos estarán en movimiento a igual velocidad v, tendremos

$$Mv_0 = (M + m)\, v. \tag{1}$$

Con el fin de aplicar la ley de la conservación de la energía, ante todo, hay que calcular el trabajo de las fuerzas de rozamiento que actúan entre el bloque y la tabla. Estas fuerzas son iguales en módulo y de sentido opuesto. La fuerza de rozamiento que actúa sobre el bloque lo acelera haciendo que aumente su energía cinética. El trabajo de esta fuerza es positivo. La fuerza de rozamiento, que obra sobre la tabla, la frena; el trabajo de esta fuerza es negativo. Está claro, que con relación a la tierra el punto de aplicación de la fuerza de rozamiento, que actúa sobre la tabla, realiza el desplazamiento s_1 que es mayor que el recorrido del punto de aplicación de la segunda fuerza de rozamiento s_2 en la magnitud s (fig. 11.2). Por esta razón, el trabajo sumario de las fuerzas de rozamiento es negativo e igual a $-\mu mgs$.

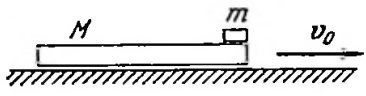


Fig. 1.1. La tabla recibe instantáneamente la velocidad incial v_0

Así pues, la ecuación de la ley de conservación de la energía se escribe en la forma

$$\frac{(M+m)\, v^2}{2} - \frac{Mv_0^2}{2} = -\mu mgs. \tag{2}$$

Expresando v de (1) y poniéndola en (2), hallamos

$$s = \frac{1}{2} \frac{M}{m+M} \frac{v_0^2}{\mu g}. \tag{3}$$

Si el valor de s calculado con la fórmula (3) resulta ser mayor que L, esto significará que, con semejante velocidad inicial de la tabla v_0,

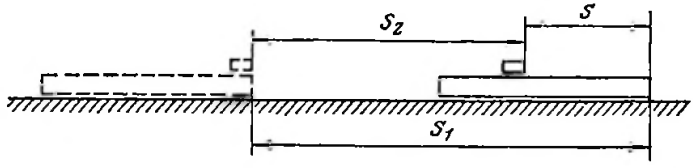


Fig. 11.2. El desplazamiento de la tabla s_1 es mayor que el desplazamiento del bloque s_2 en la magnitud s

ella se deslizará de debajo del bloque. De aquí, hallamos el valor de v_0 necesario para eso:

$$v_0 > \sqrt{2\mu gL\,(1 + mM)}. \tag{4}$$

La resolución del problema, basado directamente en la aplicación de las leyes de Newton, hubiera sido más larga. Con semejante re-

solución, ante todo, hubiese sido necesario, después de determinar la aceleración de los sólidos, escribir las ecuaciones que determinan la dependencia entre las velocidades de la tabla y el bloque con relación a la tierra y el tiempo. Esto daría la posibilidad de hallar el momento de tiempo en el que dichas velocidades se igualan. Después de esto, habiendo escrito las ecuaciones que expresan la dependencia entre las posiciones de la tabla s_1 y del bloque s_2 y el tiempo (fig. 11.2), es posible hallar aquella distancia s a la que se desplazará el bloque con relación a la tabla hacia el momento en que cesa el deslizamiento. Hagan los indicados cálculos por su cuenta y cerciórense de que ellos conducen a ese mismo resultado (3). ▲

12. Una bolita sobre una varilla. Una varilla imponderable con una bolita en el extremo superior comienza a caer, sin velocidad inicial, desde la posición vertical (fig. 12.1). El extremo inferior de la varilla se apoya en un escalón. ¿Qué ángulo formará con la vertical la velocidad de la bolita en el momento del choque con el plano horizontal?

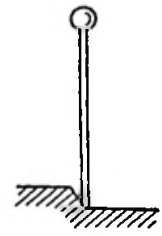


Fig. 12.1. Posición inicial de la varilla

△¿No les parece extraño que en las condiciones no hay ningún dato cuantitativo, tal como la longitud de la varilla y la masa de la bola? Para empezar analicemos el problema desde el punto de vista de las dimensiones. Tenemos que hallar un ángulo, es decir, una magnitud adimensional. Si el ángulo buscado dependiera de las dimensiones lineales, esto sería sólo de la razón adimensional de dos longitudes. No obstante, el sistema que consideramos se caracteriza por un solo parámetro, la longitud de la varilla. Por ello, el ángulo que buscamos no puede depender de dicha longitud. En virtud de razonamientos análogos, él tampoco depende de la masa de la bolita, así como de la aceleración de la caída libre g, ya que la dimensión de g contiene el tiempo. Así pues, el resultado no depende de la fuerza de la gravedad, aunque si no estuviese presente dicha fuerza la varilla no caería. El resultado debe ser expresado con un número que no depende de dónde se efectúe semejante experimento: en la Tierra, la Luna o en cualquier otro planeta.

En una superficie perfectamente lisa, desde el estado de equilibrio inestable, la bolita caería verticalmente, mientras que el extremo de la varilla se deslizaría por la superficie. El escalón obstaculiza el deslizamiento de la varilla a la izquierda. Si el extremo inferior comienza a moverse a la derecha, la bolita caerá verticalmente, es decir, su velocidad está dirigida por la vertical.

Es de mayor interés el caso cuando la varilla comienza a caer a la derecha. La bolita se mueve por un arco de circunferencia hasta el

instante en que la fuerza de la reacción de la varilla, que sobre aquélla obra, se anula. El posterior movimiento hasta el choque contra el plano horizontal transcurre por una parábola, ya que sobre la bolita sólo actúa la fuerza de la gravedad.

Primero hallemos el ángulo α que forma la varilla con la vertical en el momento cuando la fuerza de la reacción de la varilla se anula. Escribamos la ecuación de la segunda ley de Newton en las proyecciones sobre la dirección hacia el centro de la circunferencia (fig. 12.2):

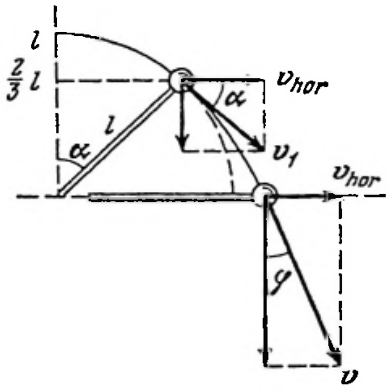


Fig. 12.2. La varilla en caída

$$mv_1^2/l = mg\cos\alpha \qquad (1)$$

(l es la longitud de la varilla). La velocidad de la bolita v_1 que entra en (1) se puede expresar mediante el ángulo α con ayuda de la ley de la conservación de la energía:

$$mgl\,(1 - \cos\alpha) = mv_1^2/2. \qquad (2)$$

Poniendo v_1^2 de (2) en (1) obtenemos la ecuación para determinar α, la que nos proporciona $\cos\alpha = 2/3$. Así pues, el movimiento libre de la bolita comienza a una altura $2l/3$ a la velocidad $v_1 = \sqrt{2gl/3}$. La proyección horizontal de la velocidad de la bolita

$$v_h = v_1\cos\alpha = (2/3)\sqrt{2gl/3} \qquad (3)$$

queda en lo ulterior invariable.

Consideremos ahora el momento del choque de la bolita contra el plano horizontal. El módulo de la velocidad v en dicho momento será el mismo que en caso de la caída libre desde la altura l: $v = \sqrt{2gl}$. El sentido de la velocidad se halla del modo más sencillo expresando el seno del ángulo φ, formado por el vector de la velocidad v con la vertical (fig. 12.2) como la razón v_h/v:

$$\operatorname{sen}\varphi = v_h/v = 2/3\sqrt{3} = 0{,}385, \text{ de donde}$$

$$\varphi = 22°40'.$$

Si fuese necesario determinar no sólo el ángulo φ, sino también la velocidad o bien el lugar de la caída de la bolita sobre el plano, sería necesario conocer la longitud de la varilla l. Señalemos que el problema analizado tiene mucho en común con el problema extensamente conocido acerca del deslizamiento de una arandela a partir de una semiesfera o de un semicilindro. ▲

13. Rizo normal. Un pequeño sólido se desliza sin rozamiento por un canalón que, a continuación, se convierte en un rizo circular «looping» de radio R (fig. 13.1). ¿Desde qué altura mínima h debe descender el sólido sin velocidad inicial para que él no se separe del canalón? ¿Cuál ha de ser la altura inicial con el fin de que el sólido pueda vencer el rizo con la parte superior cortada de forma simétrica (fig. 13.2)?

△ Como es sabido, el movimiento del sólido bajo el efecto de la sola fuerza de la gravedad transcurre por una trayectoria parabólica.

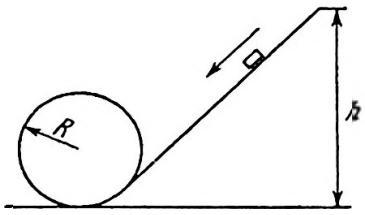


Fig. 13.1. «Rizo normal»

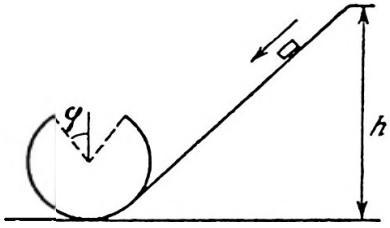


Fig. 13.2. «Rizo normal» con un corte

Por ello, para el movimiento por un canalón circular dispuesto en el plano vertical, además de la fuerza de la gravedad, sobre el sólido deben actuar, asimismo, otras fuerzas. Al no haber rozamiento tal fuerza sólo puede ser la reacción N del canalón, dirigida por la normal a su superficie (fig. 13.3). Es evidente, que el sólido no se separará del canalón mientras esta fuerza sea no nula. Si se produce el desprendimiento del sólido del canalón, en el punto donde éste se produce la fuerza N se anula. Después del desprendimiento del canalón el movimiento del sólido sólo se produce bajo el efecto de la fuerza de la gravedad y el sólido se desplaza por una parábola.

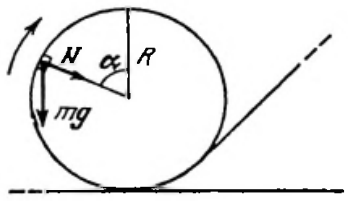


Fig. 13.3. Fuerzas que actúan sobre el sólido

Supongamos que sin desprenderse el sólido se mueve por el canalón y calculemos la fuerza de la reacción N del canalón en un punto tomado al azar, cuya posición se determina con el ángulo α (fig. 13.3). Compongamos la ecuación de la segunda ley de Newton para dicho punto:

$$mg + N = ma. \qquad (1)$$

Con el fin de hallar el módulo de la fuerza N, proyectemos la fórmula (1) sobre la dirección radial. Como la componente normal de la aceleración es igual a v^2/R, de (1) tenemos

$$mg \cos \alpha + N = \frac{mv^2}{R}, \qquad (2)$$

de donde

$$N = mg\left(\frac{v^2}{gR} - \cos\alpha\right). \tag{3}$$

En esta expresión la velocidad v también depende del ángulo α y es preciso hallarla para determinar N. Esto se puede hacer empleando la proyección de la ecuación (1) sobre la dirección tangente. Sin embargo, semejante vía requiere hábitos de integración. Por esta razón, para hallar la velocidad es más cómodo emplear la ley de la conservación de la energía mecánica.

Como la fuerza de reacción del canalón es en todo punto perpendicular a la velocidad del sólido y, por lo tanto, no realiza trabajo, la reserva total de la energía mecánica queda invariable. En el punto inicial el sólido sólo posee energía potencial, igual a mgh. En el punto que consideramos la energía mecánica se suma de la cinética $mv^2/2$ y de la potencial $mgR\ (1 + \cos\alpha)$ (fig. 13.3). Por ello,

$$mgh = mv^2/2 + mgR\ (1 + \cos\alpha), \tag{4}$$

de donde

$$v^2 = 2gR\ (h/R - 1 - \cos\alpha). \tag{5}$$

Poniendo el valor hallado de la velocidad en la fórmula (3), obtenemos la fuerza de la reacción N:

$$N = mg\left(2\frac{h}{R} - 2 - 3\cos\alpha\right). \tag{6}$$

De esta última expresión se infiere que la fuerza N tiene su mayor valor en el punto inferior del canalón, al que corresponde $\alpha = \pi$, $\cos\alpha = -1$:

$$N_{máx} = mg\ (2h/R + 1). \tag{7}$$

De (7) se desprende que la fuerza, con la que el sólido presiona contra el canalón en el punto inferior, es mayor que la fuerza de la gravedad mg. Sólo en el caso cuando la altura inicial h es igual a cero (o sea, el sólido simplemente yace en el punto inferior del canalón), él presiona contra el canalón con una fuerza igual a mg.

De la expresión (6) también se deduce que la fuerza N decrece monótonamente a medida que el sólido asciende por el canalón y alcanza el valor mínimo absoluto en el punto superior al que corresponde $\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$:

$$N_{mín} = mg\ (2h/R - 5). \tag{8}$$

Si el sólido no se separa del canalón en el punto superior, quiere decir que no se separará de él en ningún otro punto. Por ello, la fórmula (8) permite hallar aquella altura inicial mínima $h_{mín}$ con la que el sólido realiza una vuelta completa sin separarse del canalón. Haciendo en (8) $N_{mín} = 0$, hallamos

$$h_{mín} = 5R/2. \tag{9}$$

Ahora consideremos el movimiento del sólido por el rizo con corte. Con el fin de que, en tal caso, el sólido efectúe «la vuelta de campana» es preciso que al salir del borde del corte en el punto A y de volar parte del recorrido por una parábola, bajo el efecto de la fuerza de la gravedad, él, precisamente, llegue a la continuación del canalón en el punto B (fig. 13.4). Después de separarse del canalón, el movimiento transcurre según la ley

$$r = vt + gt^2/2 \qquad (10)$$

si el origen de referencia del tiempo t y de la posición r se han elegido en el instante del desprendimiento y en el punto de separación. Ya que en el punto A de separación la velocidad v está dirigida por la tangente al canalón, proyectando la ecuación (10) sobre los sentidos horizontal (x) y vertical (y) y exigiendo que la trayectoria pase por el punto B (trayectoria 1 en la fig. 13.4), obtenemos

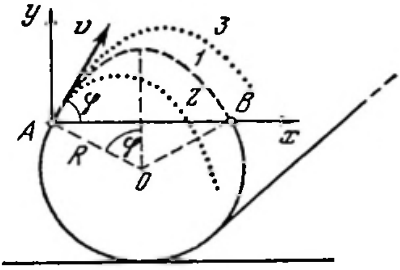


Fig. 13.4. En el corte del «rizo», entre los puntos A y B el sólido se mueve por una parábola

$$2R \operatorname{sen} \varphi = v \cos \varphi \cdot t, \quad 0 = v \operatorname{sen} \varphi \cdot t - gt^2/2. \qquad (11)$$

Hallando t del a segunda ecuación y poniéndolo en la primera, obtenemos

$$v^2 = gR/\cos \varphi. \qquad (12)$$

Precisamente, semejante velocidad debe poseer el sólido en el momento de separación para que vaya a parar al punto B.

Prestemos ahora atención a que la fórmula (12) fue obtenida sólo partiendo de consideraciones cinemáticas al examinar el vuelo libre del punto A al B. Por esto, hay que comprobar que teniendo esta velocidad en el punto A el sólido puede en realidad ir a parar al B, moviéndose por el canalón. Con otras palabras: hemos de cerciorarnos de que a esa velocidad el sólido presiona contra el canalón, es decir, que la fuerza N calculada con la fórmula (3), siendo $\alpha = \varphi$, es mayor que cero. Poniendo v^2 de (12) en (3), obtenemos

$$N = mg\,(1/\cos \varphi - \cos \varphi).$$

Esta expresión es no negativa para todos φ desde 0 hasta $\pi/2$, valores que sólo son de interés. La velocidad en el punto A está relacionada con la altura inicial h que buscamos mediante la relación (5), en la que, como es lógico, debemos sustituir el ángulo α por φ:

$$v^2 = 2gR\,(h/R - 1 - \cos \varphi). \qquad (13)$$

Igualando los segundos miembros de las expresiones (12) y (13), hallamos

$$h = R\,[1 + \cos\varphi + 1/(2\cos\varphi)]. \qquad (14)$$

Esta fórmula proporciona el valor de la altura inicial h, con el que el sólido vence el rizo con corte, precisamente de la manera que necesitamos: después de abandonar el canalón en el punto A de nuevo hará contacto con él en el punto B. El contacto con el canalón en este punto se realizará sin choque, pues la velocidad del sólido, al moverse éste por una parábola, estará dirigida por la tangente al canalón.

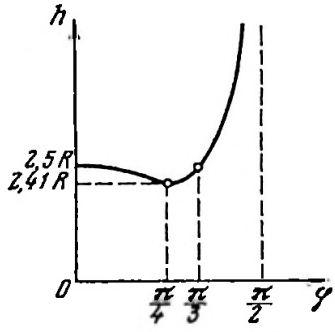


Fig. 13.5. Con $0 < \varphi < \pi/3$ la altura inicial h casi no depende del ángulo φ

Si la altura inicial se elige menor que el valor que ofrece la fórmula (14), entonces, si incluso el sólido llega por el canalón hasta el punto A, el mismo volará a continuación por la parábola *2* en la fig. 13.4 y chocará con el canalón debajo del punto B. En tanto que si la altura inicial se elige mayor de la necesaria, el sólido se desprenderá del canalón a través del corte describiendo la parábola *3*.

Investiguemos la dependencia entre la altura inicial necesaria h y el ángulo φ que caracteriza el corte. Como se deduce de la fórmula (14) si $\varphi = 0$, es decir, cuando falta el corte, $h = 5R/2$, lo que coincide con la altura inicial mínima (9), necesaria para vencer el rizo cerrado (enterizo). Con el aumento del ángulo φ la altura inicial decrece, alcanzando el mínimo igual a $h = (1 + \sqrt{2})\,R$ para $\varphi = \pi/4$. En efecto, los sumandos dependientes de φ en la fórmula (14) $\cos\varphi + 1/(2\cos\varphi)$ pueden ser escritos en la forma

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{1}{x}\right),$$

donde con x está designado $\sqrt{2}\cos\varphi$. Pero $x + 1/x$ tiene un mínimo igual a dos cuando $x = 1$, de donde se obtienen los valores de la altura mínima h y del ángulo $\varphi = \pi/4$, precisamente. Con el posterior aumento del ángulo φ la altura h crece monótonamente y tiende al infinito cuando $\varphi \to \pi/2$ (fig. 13.5). Como es fácil cerciorarse, para $\varphi = \pi/3$ la altura h es de nuevo igual a $5R/2$. Así pues, si el ángulo del corte es menor que $\pi/3$, la altura inicial necesaria es menor que en el caso de rizo sin corte.

Es de interés señalar que el punto *1* superior de la trayectoria en el corte del canalón (fig. 13.4), con cualesquiera ángulos φ, yace por encima de la continuación de la circunferencia. Efectivamente, la

altura máxima de elevación del sólido, después de separarse en el punto A, es igual a

$$v^2 \operatorname{sen}^2\varphi/(2g),$$

lo que después de poner v^2 de (12), proporciona

$$R \operatorname{sen}^2\varphi/(2\cos\varphi).$$

Por ello, como se deduce de la fig. 13.4, la altura de este punto de la trayectoria sobre el centro de la circunferencia O es igual a

$$H = R\cos\varphi + \frac{R}{2}\,\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{\cos\varphi} = \frac{R}{2}\left(\cos\varphi + \frac{1}{\cos\varphi}\right).$$

Esta expresión, para todos φ desde 0 hasta $\pi/2$, es mayor que R. ▲

14. Dos bolitas ligadas. Dos pequeñas bolitas iguales, ligadas entre sí con un hilo inextensible e imponderable de largura l (fig. 14.1), yacen en una superficie lisa horizontal. A una de las bolitas se le comunica la velocidad v_0 dirigida verticalmente hacia arriba.

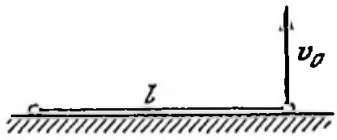


Fig. 14.1. Dos bolitas iguales están ligadas mediante un hilo inextensible

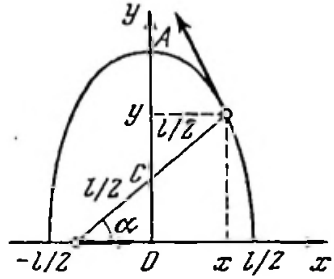


Fig. 14.2. La bolita superior se mueve por una elipse con semiejes $l/2$ y l

¿Cuál debe ser la velocidad inicial para que el hilo siempre quede tensado, mientras que la bolita inferior no se separe de la superficie horizontal? El rozamiento de la bolita contra la superficie se desprecia. Al investigar las condiciones de desplazamiento de la bolita inferior, consideremos que la fuerza de tensión del hilo es máxima con la posición vertical de éste.

△ Supongamos que la velocidad inicial v_0 es tal que se cumplen dichas condiciones, es decir, durante el movimiento de las bolitas el hilo está constantemente tensado, mientras que la bolita inferior no se desprende (separa) de la superficie. ¿Por qué trayectorias se moverán entonces las bolitas? Está claro que la bolita inferior se moverá de modo rectilíneo, en tanto que la superior describirá cierta curva (fig. 14.2). Con el fin de aclarar de qué curva se trata, hagamos uso de que, siendo vertical la velocidad inicial, el centro de masas de las

bolitas, cuando no hay rozamiento entre la bolita inferior y la superficie de la mesa, sólo puede moverse por la vertical.

Introduzcamos el sistema de coordenadas de modo que el eje x esté dirigido por la horizontal a lo largo del hilo que une las bolitas, mientras que el eje y, verticalmente, pasando por el centro de masas de las bolitas. Con semejante elección de los ejes, la bolita inferior se moverá a lo largo del eje x, el centro de masas C, a lo largo del eje y, en tanto que la bolita superior, por una curva que yace en el plano x, y. Directamente de la fig. 14.2 se desprende que las coordenadas de la bolita superior x e y se pueden expresar mediante el ángulo α, formado por el hilo tensado con el horizonte.

$$x = (l/2)\cos\alpha, \quad y = l\,\mathrm{sen}\,\alpha. \tag{1}$$

Si de estas relaciones excluimos el ángulo α, obtendremos la ecuación de la trayectoria de la bolita superior. Dividiendo la primera relación entre $l/2$ y la segunda, entre l, elevándolas al cuadrado y sumándolas, hallamos

$$\frac{x^2}{(l/2)^2} + \frac{y^2}{l^2} = 1. \tag{2}$$

Ésta es la ecuación de una elipse con semiejes $l/2$ y l.

Con el fin de aclarar a qué velocidad inicial v_0 el movimiento de las bolitas será tal, precisamente, hay que calcular la fuerza de tensión del hilo que las une. La velocidad v_0 deberá ser lo suficientemente grande para que la fuerza de tensión del hilo no se anule en ningún punto de la trayectoria. Por otro lado, dicha velocidad no ha de ser demasiado grande, ya que si la componente vertical de la fuerza de tensión del hilo supera la fuerza de la gravedad mg, que actúa sobre la bolita, la bolita inferior se desprenderá de la superficie de la mesa.

Para la velocidad inicial dada la fuerza de tensión T del hilo se debilita a medida que la bolita asciende. Esto sucede en virtud de que al acercarse la bolita superior al punto más alto de la trayectoria su velocidad disminuye, mientras que la fuerza de la gravedad que sobre ella actúa desempeña un papel cada vez más notorio en la curvatura de su trayectoria y, por lo tanto, el papel de la fuerza de tensión disminuye. Por esta razón, con el fin de hallar la velocidad inicial mínima, con la que el hilo queda aún tensado hasta el punto superior A de la trayectoria, confeccionemos en dicho punto la ecuación de la segunda ley de Newton para la bolita superior. Como en el punto A la aceleración está dirigida verticalmente hacia abajo, es decir, por la normal a la trayectoria, ella será igual a la razón entre el cuadrado de la velocidad v_1 de la bolita en el mencionado punto y el radio de curvatura de la trayectoria R. Por ello,

$$T + mg = mv_1^2/R. \tag{3}$$

El hilo queda tensado si la fuerza de tensión T, calculada con la ecuación (3), es positiva: $T > 0$. Como vemos, para hallar T hay que conocer v_1 y R.

La velocidad v_1 se puede determinar de la forma más sencilla mediante la ley de la conservación de la energía. Como el centro de masas de las bolitas no se desplaza por el plano horizontal, en todo momento de tiempo las componentes horizontales de ambas bolitas son iguales en módulo y están dirigidas en direcciones opuestas. Por esta razón, en el momento cuando la bolita pasa por el punto más alto de la trayectoria, las velocidades de ambas bolitas son iguales a v_1. Como en ese momento la energía potencial es igual a mgl, tendremos

$$\frac{mv_0^2}{2} = 2\,\frac{mv_1^2}{2} + mgl, \tag{4}$$

de donde

$$v_1^2 = v_0^2/2 - gl. \tag{5}$$

Ahora, hay que hallar el radio de curvatura de la elipse en el punto A. Esto se puede hacer como en el problema 3 del capítulo «Cinemática», donde se determinó el radio de curvatura de una cicloide. La idea básica consiste en que la curva que consideramos se representa como la trayectoria de cierto movimiento mecánico, suficientemente sencillo, y éste se investiga según los métodos de cinemática, haciendo uso de que el radio de curvatura entra en la fórmula para la componente normal de la aceleración.

En lugar de analizar el movimiento real de la bolita superior, con el que el ángulo α depende de forma bastante complicada del tiempo, examinemos un movimiento auxiliar de cierto punto por esa misma elipse considerando que el ángulo α varía uniformemente con el tiempo: $\alpha = \omega t$. Para tal movimiento auxiliar las ecuaciones (1) toman la forma

$$x = (l/2)\cos \omega t, \quad y = l \operatorname{sen} \omega t. \tag{6}$$

Derivando estas ecuaciones respecto al tiempo hallamos las proyecciones sobre los ejes de coordenadas de la velocidad del movimiento auxiliar:

$$v_x = -(\omega l/2) \operatorname{sen} \omega t, \quad v_y = \omega l \cos \omega t. \tag{7}$$

Derivando respecto al tiempo las ecuaciones (7) obtenemos las proyecciones de la aceleración:

$$a_x = -(\omega^2 l/2)\cos \omega t, \quad a_y = -\omega^2 l \operatorname{sen} \omega t. \tag{8}$$

Examinemos el momento cuando el punto que realiza el movimiento auxiliar pasa por el punto A de la trayectoria elíptica en la fig. 14.2. A este momento corresponde $\omega t = \pi/2$ y las ecuaciones (7) y (8) nos proporcionan

$$v_x = -\omega l/2, \; a_x = 0; \quad v_y = 0, \; a_y = -\omega^2 l. \tag{9}$$

En el punto A la velocidad del movimiento auxiliar $v = \omega l/2$, en tanto que la aceleración está dirigida por la normal a la trayectoria y en módulo es igual a $a = \omega^2 l$. Ya que la aceleración está ligada con el radio de curvatura de la trayectoria R por medio de la relación $a = v^2/R$, para el radio de curvatura de la elipse en el punto A obtenemos

$$R = v^2/a = l/4. \qquad (10)$$

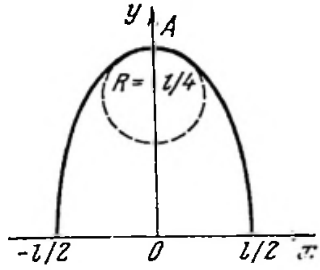


Fig. 14.3. El radio de curvatura de la elipse en el punto A es igual a $l/4$

Así pues, el arco de la elipse cerca del punto A se puede considerar como una parte de la circunferencia de radio $l/4$ que viene mostrada en la fig. 14.3 con una línea de trazos.

Pongamos los valores hallados de la velocidad de la bolita v_1 de la fórmula (5) y el radio de curvatura R de (10) en la ecuación de la segunda ley de Newton (3). Como resultado, hallamos para la fuerza de tensión del hilo

$$T = 2mv_0^2/l - 5\,mg. \qquad (11)$$

Para la posición vertical del hilo la fuerza de tensión T de éste se puede calcular de modo menos laborioso, sin determinar el radio de curvatura de la trayectoria. Con este objeto es suficiente comprender que ambas bolitas participan en un complicado movimiento: el movimiento describiendo la circunferencia de radio $l/2$ en torno del centro del hilo se compone con la velocidad de dicho centro por la vertical. Por ello, las aceleraciones de las bolitas a_1 y a_2 son iguales a las sumas de las aceleraciones a_1' y a_2', relacionadas con el movimiento por la circunferencia, y la aceleración a_0 del centro del hilo. Para la posición vertical del hilo todas estas aceleraciones están dirigidas por la vertical (fig. 14.4). Los módulos de las aceleraciones a_1' y a_2' son los mismos e iguales a $v_1^2/(l/2)$. La bolita inferior está constantemente en movimiento por la horizontal, por eso para la posición vertical del hilo su aceleración total a_2 es nula. De la fig. 14.4 se desprende que con esto $a_0 = a_2' = v_1^2/(l/2)$. Por esta

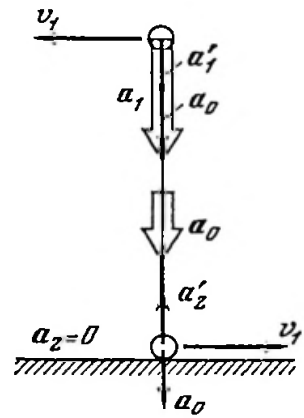


Fig. 14.4. La aceleración de cada una de las bolitas es la suma de la aceleración a_0 de la parte media del hilo y las aceleraciones a_1' y a_2' ligadas al movimiento por la circunferencia

razon la aceleración de la bolita superior

$$a_1 = a_1' + a_0 = 4v_1^2/l. \qquad (12)$$

Escribiendo la ecuación de la segunda ley de Newton para la bolita superior

$$T + mg = ma_1$$

y poniendo aquí la aceleración a_1 de la fórmula (12) y la velocidad v_1 de la fórmula (5), llegamos a la misma expresión (11) para la fuerza de tensión del hilo.

De la fórmula (11) se deduce que la fuerza de tensión del hilo no se anula ($T > 0$) si la velocidad inicial v_0 de la bolita satisface la condición

$$v_0^2 > 2{,}5\ gl. \qquad (13)$$

Ahora, aclaremos con qué condición la bolita inferior no se desprenderá de la superficie. En el momento inicial actúa sobre la bolita inmóvil la fuerza de reacción de la superficie igual a mg. Durante el movimiento hacia arriba de la otra bolita, cuando el hilo forma cierto ángulo con el horizonte, dicha fuerza disminuye, ya que surge la componente vertical de la fuerza de tensión del hilo. Con el fin de que la bolita no se separe de la superficie es necesario que la componente vertical de la fuerza de tensión no alcance el valor igual a mg, incluso con la posición vertical del hilo. Así pues, la bolita no se desprenderá si el valor de T calculado con la fórmula (11) no supera mg:

$$2mv_0^2/l - 5mg < mg,$$

de donde, para el valor máximo tolerable de la velocidad inicial, obtenemos

$$v_0^2 < 3gl. \qquad (14)$$

Resumamos. Si la velocidad inicial de la bolita v_0 yace en el intervalo

$$2{,}5\ gl < v_0^2 < 3\ gl,$$

durante el movimiento de las bolitas el hilo siempre permanecerá tensado, mientras que la bolita inferior se deslizará por la superficie de la mesa. La bolita superior describirá la mitad de una elipse (fig. 14.2) y chocará con la superficie. Antes del choque su velocidad en módulo será igual a v_0 y estará dirigida verticalmente hacia abajo. Si el choque contra la superficie es absolutamente elástico, la mencionada velocidad cambiará su dirección por la opuesta y la bolita describirá esa misma trayectoria en sentido inverso. ▲

15. Una varilla con bolitas. Sobre una superficie horizontal, idealmente lisa, está en posición vertical una pesa (halterio) formada por dos bolitas iguales unidas mediante una varilla imponderable

de largura l. A la bolita inferior se le comunica instantáneamente la velocidad v_0 en sentido horizontal (fig. 15.1). ¿Con qué valores de v_0 la bolita se deslizará sin separarse de la superficie? ¿Cuál será la velocidad de la bolita superior en el momento de su choque contra la superficie horizontal?

△ A todas las preguntas planteadas en el problema es mucho más sencillo responder si consideramos el movimiento de la pesa en un sistema de referencia donde su centro de masas está en movimiento por la vertical. Es evidente que semejante sistema de referencia se mueve, con relación al sistema de referencia del laboratorio, a la

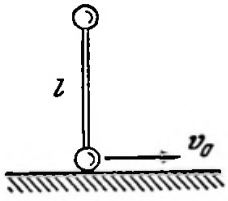


Fig. 15.1. Posición inicial de la pesa

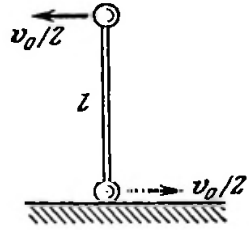


Fig. 15.2. La velocidad de las bolitas en el momento inicial en el sistema de referencia que se desplaza a la derecha a velocidad $v_0/2$

velocidad constante $v_0/2$, dirigida horizontalmente, y que también es inercial. En este sistema de referencia las velocidades de las bolitas son, en el momento inicial, iguales a $v_0/2$ y están dirigidas horizontalmente en direcciones opuestas (fig. 15.2).

Aclaremos con qué condición la bolita inferior se separará de la superficie. Está claro, que en semejante caso la fuerza de reacción de la superficie será nula y, por lo tanto, la pesa caerá con la aceleración de la caída libre. Además, como la pesa gira alrededor del centro de masas, la bolita inferior tendrá la aceleración centrífuga a_{cen}, relacionada con el mencionado movimiento, dirigida hacia arriba:

$$a_{cen} = \frac{(v_0/2)^2}{l/2} = \frac{v_0^2}{2l}. \qquad (1)$$

La bolita se desprenderá de la superficie si $a_{cen} > g$. En el caso contrario ($a_{cen} < g$) la bolita no se separará. Para ello, su velocidad deberá satisfacer la condición

$$v_0^2 < 2gl. \qquad (2)$$

Con el fin de hallar la velocidad de la bolita superior en el momento del choque podemos emplear la ley de la conservación de la energía. En ese momento, en el sistema de referencia introducido, su velocidad v_1 está dirigida verticalmente hacia abajo, mientras que la velocidad de la bolita inferior, en deslizamiento por la superficie,

se anula (fig. 15.3). En efecto, en este sistema de referencia el centro de masas cae por la vertical. En el momento en que la pesa choca contra la superficie la varilla, que une las bolitas, se dispone horizontalmente, por lo que las componentes horizontales de las velocidades

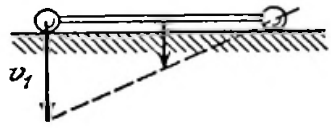


Fig. 15.3. Velocidad de las bolitas en el momento de la caída de la pesa sobre el plano horizontal en ese mismo sistema de referencia

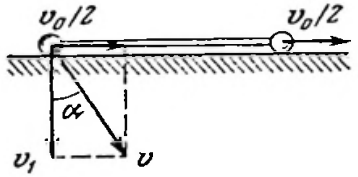


Fig. 15.4. Velocidad de las bolitas en el sistema de referencia del laboratorio

de todos sus puntos, incluidos los de la parte central y de los extremos, en el momento de la caída son nulas.

Así pues, en el sistema de referencia introducido la ley de la conservación de la energía se puede escribir en la forma

$$\frac{mv_1^2}{2} = mgl + 2\,\frac{m\,(v_0/2)^2}{2}\,, \tag{3}$$

de donde

$$v_1^2 = 2gl + v_0^2/2. \tag{4}$$

En el sistema de referencia del laboratorio la velocidad v de la bolita que cae, en el momento del choque, se determina con la expresión

$$v^2 = v_1^2 + (v_0/2)^2 = 2gl + 3v_0^2/4. \tag{5}$$

Como se deduce de la fig. 15.4, la dirección de esta velocidad forma el ángulo α con la vertical, cuya tangente es igual a la razón entre $v_0/2$ y v_1:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_0/2}{v_1} = \frac{v_0/2}{\sqrt{2gl + v_0^2/2}} = \frac{1}{2\sqrt{1/2 + 2gl/v_0^2}}\,. \tag{6}$$

Señalemos que la elección adecuada del sistema de referencia durante la resolución de este problema nos ha permitido, en esencia, hacer uso de la sencilla fórmula (3) que expresa la ley de la conservación de la energía. ▲

16. La paradoja de la energía cinética. Un automóvil de juguete, con la cuerda dada hasta el tope, puede acelerarse hasta lograr la velocidad v. Despreciando las pérdidas de energía por el rozamiento, podemos considerar que la energía potencial de la cuerda dada (el muelle torsionado) W se ha convertido por completo en la energía

cinética del juguete. Examinemos ese mismo proceso en otro sistema inercial de referencia, que se mueve a velocidad v con relación a la Tierra, al encuentro del auto de juguete. En este sistema de referencia la velocidad definitiva del juguete es igual a $2v$, o sea, dos veces mayor, en tanto que su energía cinética, es cuatro veces mayor, es decir, $4W$. Como en este sistema de referencia, desde el principio, el auto tenía una energía potencial W, al desenrollarse el muelle, su energía cinética creció en $3W$ y no en W como en el sistema de referencia inicial. Sin embargo, ¡la energía potencial de la cuerda dada es en ambos casos igual a W! Expliquen esta paradoja.

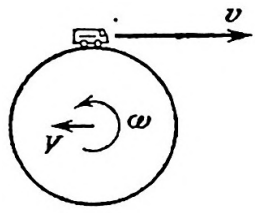


Fig. 16.1. Al acelerarse el juguete de cuerda comunica a la Tierra no sólo movimiento de avance a la velocidad V, sino también la rotación a velocidad angular ω

△ La paradoja surge en virtud de que en los razonamientos aducidos no se tuvo en cuenta la energía cinética de la Tierra y su variación durante la interacción de las ruedas del juguete con la carretera. Si la mencionada variación se tiene minuciosamente en cuenta, no surgirá ninguna paradoja y la ley de la conservación de la energía, como es lógico, se cumplirá.

Para empezar, examinemos el sistema de referencia en el que la Tierra está inmóvil. Hasta la aceleración del automóvil el impulso total, en este sistema de referencia, es igual a cero. Durante la aceleración del auto éste adquiere la velocidad v, mientras que la Tierra, la velocidad V dirigida en sentido opuesto ($V < 0$). El impulso (la cantidad de movimiento) total del sistema queda invariable, por lo que

$$mv + MV = 0, \tag{1}$$

donde m es la masa del juguete; M, la masa de la Tierra.

Como la fuerza que actúa sobre la Tierra por parte de las ruedas no pasa por el centro de nuestro planeta, entonces, además del movimiento de traslación a la velocidad V, la Tierra se pone asimismo en rotación a cierta velocidad angular ω (fig. 16.1). Por ahora, olvidémonos de esta rotación del planeta y consideremos que la Tierra sólo está en movimiento de traslación.

Al desenroscarse el muelle (soltar la cuerda) su energía potencial W se convierte en la energía cinética del juguete y de la Tierra:

$$W = \frac{mv^2}{2} + \frac{MV^2}{2}. \tag{2}$$

Expresando V de la ecuación (1) y poniéndola en (2), hallamos

$$W = \frac{mv^2}{2}\left(1 + \frac{m}{M}\right). \tag{3}$$

Como la masa del juguete m es muchísimo menor que la de la Tierra ($m/M \ll 1$), como se deduce de la fórmula (3), prácticamente, toda la energía de la cuerda se convierte en la energía cinética del juguete.

Ahora, consideremos ese mismo proceso desde el punto de vista del segundo sistema de referencia, en el que la velocidad del juguete y de la Tierra es al principio igual a v. En este sistema de referencia, el impulso total es igual a $(m + M)v$. Después de la aceleración la velocidad del juguete es igual a $2v$, en tanto que designamos la velocidad de la Tierra con V_1. Basándonos en la ley de la conservación del impulso

$$m\,(2v) + MV_1 = (m + M)v. \tag{4}$$

La energía cinética del juguete después de la aceleración es igual a $m\,(2v)^2/2$, mientras que la de la Tierra $MV_1^2/2$. La variación de la energía cinética total

$$\Delta E = \frac{m\,(2v)^2}{2} + \frac{MV_1^2}{2} - \frac{(m+M)\,v^2}{2}. \tag{5}$$

Expresemos V_1 de la ecuación (4) y pongámosla en (5):

$$\Delta E = 3\frac{mv^2}{2} + \frac{M}{2}\left[\left(1 - \frac{m}{M}\right)^2 v^2 - v^2\right]. \tag{6}$$

Después de sencillas transformaciones algebraicas, la expresión (6) se reduce a la forma

$$\Delta E = \frac{mv^2}{2}\left(1 + \frac{m}{M}\right). \tag{7}$$

Comparando el segundo miembro de (7) con la fórmula (3) vemos que también en este caso la variación de la energía cinética de todo el sistema es igual a la energía potencial de la cuerda (muelle) W.

La variación de la energía cinética del juguete durante la aceleración es, en realidad, en este sistema de referencia tres veces mayor que la variación de esta energía en el sistema de referencia relacionado con la Tierra. No obstante, ahora la variación de la energía cinética de la Tierra es del mismo orden que el cambio de la energía del juguete, a diferencia de la variación de la energía de nuestro planeta en el sistema inicial de referencia, donde ella era insignificante. En el nuevo sistema de referencia las ruedas del juguete frenan durante la aceleración el movimiento de la Tierra y su energía cinética decrece. El aumento de la energía cinética del juguete en este sistema de referencia se produce no sólo a cuenta de la energía potencial del muelle, sino también a cuenta de la disminución de la energía cinética terrestre.

El ejemplo que hemos estudiado muestra con evidencia con que prudencia hay que tratar el problema de lo que es esencial en el fe-

nómeno que consideramos y lo que podemos desechar. Es posible emplear cualquier sistema de referencia, además, cuando el problema se resuelve con exactitud, la elección del sistema de referencia es indiferente. Sin embargo, al hallar una solución aproximada las exclusiones tolerables en un sistema de referencia pueden ser inadmisibles en el otro. P. ej., al utilizar el sistema de referencia ligado con la Tierra, en el problema que hemos examinado hubiéramos podido despreciar la variación de la energía cinética de la Tierra y considerar que la variación de la energía cinética del automóvil es igual a la energía de la cuerda. Si se hace uso de otro sistema de referencia, incluso para la solución aproximada tampoco se puede despreciar la variación de la energía cinética terrestre, a pesar de que la variación de la velocidad de nuestro planeta es igual en uno y en otro sistema de referencia, de lo que es fácil cerciorarse.

Examinemos ahora qué cambiará en los razonamientos si se toma en consideración la rotación de la Tierra provocada por el juguete. En el segundo miembro de la fórmula (2), además de la energía cinética del movimiento de traslación de la Tierra, estará también presente la energía cinética de su rotación. El orden de su valor será el mismo que la energía cinética del movimiento de traslación de la Tierra. Por ello, en el sistema de referencia, donde la Tierra estaba inmóvil, ambas energías cinéticas pueden ser despreciadas y considerar que toda la energía potencial de la cuerda se transforma en la energía cinética del juguete.

En el segundo sistema de referencia (donde al principio las velocidades del juguete y la Tierra son iguales a v) la energía cinética de rotación de la Tierra será la misma que en el primer sistema de referencia, ya que la velocidad angular ω, adquirida por la Tierra, es igual en todos los sistemas inerciales de referencia. Por esta razón, a diferencia de la energía cinética del movimiento de traslación de la Tierra la energía de la rotación puede también despreciarse en el segundo sistema de referencia. ▲

17. Vuelo espacial fantástico. Es bien sabido que para realizar un viaje interplanetario, es preciso comunicar a la nave cósmica, situada en la superficie de la Tierra, una velocidad inicial de 11,2 km/s (segunda velocidad cósmica). No obstante, si el lanzamiento de la nave se efectúa no desde la superficie terrestre, sino desde un túnel excavado a lo largo de todo el planeta, a través de su centro, se obtiene un resultado formidable. Resulta que a la nave cósmica que cae libremente por semejante túnel, al pasar por el centro de la Tierra, es suficiente comunicarle una velocidad adicional de sólo 5,8 km/s, lo que constituye tan sólo el 52% de la segunda velocidad cósmica. Entonces, al salir del túnel la nave tendrá, precisamente, la velocidad de 11,2 km/s y podrá realizar el viaje cósmico. Esto quiere decir que para el lanzamiento de una misma nave será necesario un cohete más

pequeño y que se consumirá una cantidad considerablemente menor de combustible. Expliquen por qué razón es posible tal ganancia.

△ Ante todo, hemos de aclarar qué velocidad adquirirá el cohete durante su caída libre por el túnel hasta el centro de la Tierra. Esto se puede hacer con ayuda de la ley de la conservación de la energía, sólo que, para empezar, hay que revelar cómo se diferencian entre sí los valores de la energía potencial en la superficie terrestre y en el centro de la Tierra.

Vamos a considerar que la Tierra es una esfera homogénea enteriza. Aclaremos cómo depende la fuerza de la gravedad, que actúa sobre el sólido, de la posición que éste ocupa en el túnel. Es evidente

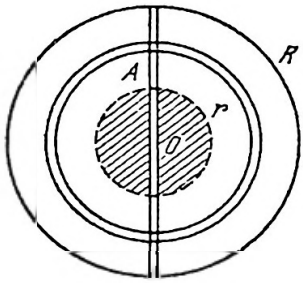


Fig. 17.1. La fuerza de gravedad en el punto A es igual a la fuerza de atracción hacia la parte sombreada del globo terráqueo

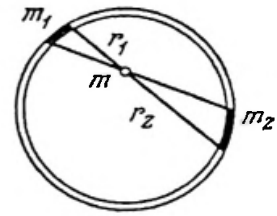


Fig. 17.2. Las fuerzas de gravitación que actúan sobre la masa m por parte de los sectores m_1 y m_2 se equilibran

que en el centro de la Tierra esa fuerza será igual a cero. Esto se desprende directamente de la simetría de la figura. Es posible hallar la fuerza de la gravedad en todo punto, tomado al azar, con ayuda del mismo procedimiento con el que se determina la intensidad del campo electrostático dentro de una esfera cargada uniformemente.

Dividamos mentalmente el globo terráqueo en finas capas esféricas concéntricas (fig. 17.1). De acuerdo con el principio de la superposición, la fuerza total que obra sobre el sólido en el túnel, es igual a la suma vectorial de las fuerzas que sobre él actúan por parte de capas por separado. Es fácil cerciorarse de que la fuerza de la gravitación, que obra por parte de cualesquiera de las capas sobre el sólido ubicado dentro de dicha capa, es igual a cero. Esto se desprende de inmediato de la construcción mostrada en la fig. 17.2. Las partes de la cubierta con masas m_1 y m_2 atraen al sólido de masa m con fuerzas proporcionales a esas masas e inversamente proporcionales a los cuadrados de las distancias r_1 y r_2. Como se desprende de la figura, las propias masas m_1 y m_2 son proporcionales a los cuadrados de las respectivas distancias. Como resultado, las fuerzas de la gravitación que actúan desde los sectores destacados de la capa esférica se equilibran,

lo que demuestra la afirmación enunciada. Precisamente con ayuda de semejante razonamiento, la ausencia de la fuerza de la gravitación dentro de la cubierta esférica fue ya establecida por Newton.

Así pues, sobre el sólido en el punto A del túnel (fig. 17.1) sólo actúa la fuerza de la gravedad por parte de la esfera sombreada, sobre la superficie de la cual se encuentra el mismo. Como la masa de la esfera sombreada es proporcional al cubo de su radio r, en tanto que la

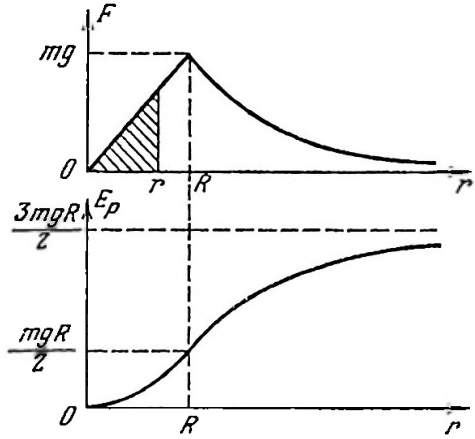


Fig. 17.3. Dependencia entre la fuerza de gravedad y la energía potencial y la distancia hasta el centro de la Tierra

fuerza de la gravitación es proporcional a la masa (es decir, a r^3), pero, simultáneamente, inversamente proporcional al cuadrado del radio, dicha fuerza será proporcional al radio de la esfera: $F \sim r$. Ya que para $r = R$ en la superficie de la Tierra la fuerza de la gravedad es igual a mg, a una distancia arbitraria r del centro, si $r \leqslant R$, tenemos

$$F(r) = mgr/R. \qquad (1)$$

Para $r > R$ la fuerza de la gravedad decrece de modo inversamente proporcional al cuadrado de la distancia; la gráfica de la dependencia entre la fuerza de la gravedad y el radio r se muestra en la fig. 17.3.

Ahora, es fácil encontrar la expresión para la energía potencial del sólido situado en el túnel. Con este fin, elevemos mentalmente el sólido desde el centro de la Tierra a una distancia r, desplazándolo uniformemente. Es evidente, que para esto la fuerza externa deberá ser igual en cada punto a la fuerza de la gravedad $F(r)$ y estar dirigida en sentido opuesto. El trabajo de esta fuerza, igual al área del triángulo sombreado $mgr^2/2R$, determina la variación de la energía

potencial ΔE_p:

$$\Delta E_p = \frac{mgr^2}{2R}. \quad (2)$$

Por regla, la energía potencial se toma igual a cero cuando el sólido se encuentra a una distancia infinitamente grande de la Tierra (como, p.ej., en la fórmula (3) de la introducción a este capítulo). En este problema es más cómodo tomar la energía potencial igual a cero cuando el sólido se halla en el centro de la Tierra. Entonces, con ayuda de la fórmula (2) hallamos que si $r \leqslant R$

$$E_p(r) = \frac{mgr^2}{2R}. \quad (3)$$

Con ello, en la superficie de la Tierra la energía potencial será igual a $mgR/2$, en tanto que a una distancia infinitamente grande de la Tierra, $3mgR/2$. La gráfica de la dependencia entre la energía potencial y r también se muestra en la fig. 17.3.

La fórmula (3) permite determinar la velocidad v del cohete en el centro de la Tierra durante su caída libre desde la superficie. Igualando la energía potencial en la superficie $mgR/2$ y la energía cinética del cohete en el centro de la Tierra $mv^2/2$, obtenemos

$$v = \sqrt{gR}. \quad (4)$$

Como vemos, esta velocidad es igual a la primera cósmica para un satélite en movimiento cerca de la superficie del planeta (v_I = = 7,9 km/s).

Ahora, supongamos que en el momento cuando el cohete atraviesa el centro terráqueo se ponen en marcha los motores que hacen que su velocidad varíe en Δv. Entonces, al aproximarse a la superficie de la Tierra, en la salida del túnel, el cohete tendrá la velocidad v_1 que se halla partiendo de la ley de la conservación de la energía:

$$\frac{m(v+\Delta v)^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mgR}{2}. \quad (5)$$

Exijamos que v_1 sea igual a la segunda velocidad cósmica $v_{II} = \sqrt{2gR}$. Entonces, para el incremento necesario de la velocidad Δv, después de poner en la ecuación (5) $v = \sqrt{gR}$ de ella, resolviendo la ecuación cuadrática, obtenemos

$$\Delta v = \sqrt{gR}(-1 \pm \sqrt{3}). \quad (6)$$

Tomando la raíz con signo más, obtenemos el valor $\Delta v = (\sqrt{3} - 1)\sqrt{gR} = 5{,}8$ km/s. La segunda raíz corresponde a la variación del sentido de la velocidad del cohete, como resultado de la puesta en marcha de los motores, por la opuesta (es decir, el frenado con la posterior aceleración) y que, en el ejemplo que consideramos, no es de interés.

Es natural reflexionar acerca de la siguiente cuestión: ¿a cuenta de qué se obtiene semejante «ganancia» de energía al emplear el túnel? Al quemar el combustible en los motores del cohete, determinada parte de su energía interna se convierte en la energía cinética del cohete y de los gases expulsados. Si hasta la puesta en marcha de los motores el cohete estaba inmóvil sobre la superficie terrestre, en virtud de la ley de la conservación del impulso cierta parte (¡bastante grande!) de la energía, que se desprende, pasará obligatoriamente a energía cinética de los gases. Pero si los motores se ponen en marcha en el momento en que el cohete tiene ya cierta velocidad, la parte de energía cinética transmitida a los gases puede ser menor. P. ej., si durante el movimiento por el túnel la velocidad de salida de los gases de la tobera del motor del cohete es igual a velocidad de éste con relación a la Tierra, la velocidad de los gases expulsados respecto de la Tierra será igual a cero. Con otras palabras, en el sistema de referencia ligado con nuestro planeta, los gases expulsados no tendrán energía cinética y toda la energía mecánica desprendida será «comunicada» al cohete. Éste recibirá asimismo la energía cinética del combustible que él poseía antes de ponerse en marcha los motores.

Es de interés señalar que la caída libre del cohete por el túnel es de por sí una oscilación armónica junto al centro de la Tierra, con la cual el cohete atraviesa el globo terrestre, por su diámetro, desde un extremo del túnel hasta otro. Esto se produce en virtud de que la fuerza de la gravedad que actúa en el túnel está dirigida hacia el centro de la Tierra y es proporcional a la distancia hasta él. Con ayuda de la fórmula (1) es fácil hallar el período de tales oscilaciones. Como la frecuencia $\omega = \sqrt{g/R}$, el período $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{R/g}$, lo que coincide con el período satelitario de un satélite por una órbita circular baja.

Claro está, que la realización del fantástico proyecto cósmico descrito aquí se encuentra fuera de los márgenes de las posibilidades técnicas. Es evidente que tanto la excavación de semejante túnel por el centro de la Tierra, como crear en su interior el vacío necesario, para que la caída libre del cohete se produzca sin resistencia, es imposible. Pero, sin duda alguna, la propia idea del empleo del campo gravitacional para economizar el combustible de las naves cósmicas es de gran interés. P. ej., en el viaje espacial tras los límites del Sistema Solar, sería posible emplear el campo gravitacional de uno de los planetas pesados para la aceleración previa y poner en marcha los motores de la nave para comunicarle el impulso necesario en las proximidades de dicho planeta. ▲

18. Variación de la órbita. Como resultado del rozamiento en las capas altas de la atmósfera, la energía mecánica de un satélite de la Tierra disminuyó el 2% después de muchas vueltas. En tal caso, la órbita del satélite siguió siendo circular. ¿Cómo cambiaron los pará-

metros de la órbita: el radio r, la velocidad v, el período satelitario T?

△En el sistema de referencia ligado con la Tierra la energía mecánica E del satélite es la suma de su energía cinética y potencial de interacción con la Tierra (R es el radio del planeta):

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{mgR^2}{r}. \qquad (1)$$

Como la órbita del satélite es circular, su velocidad es constante y está ligada con el radio de la órbita por la relación

$$v^2 = gR^2/r. \qquad (2)$$

La expresión para la energía del satélite (1), con ayuda de (2), se puede representar en la forma

$$E(r) = -\frac{mgR^2}{r} + \\ + \frac{mgR^2}{2r} = -\frac{mgR^2}{2r}. \qquad (3)$$

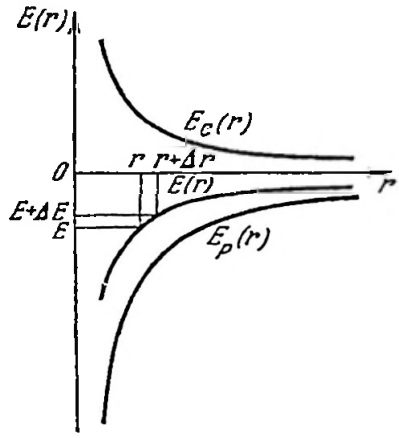


Fig. 18.1. Dependencia entre las energías cinética, potencial y total del satélite de la Tierra y el radio de la órbita

Ilustremos la relación (3) por vía gráfica. En la fig. 18.1 se muestra la dependencia entre las energías potencial, cinética y la total del satélite y el radio de la órbita circular. De la figura se deduce que el aumento de la energía mecánica del satélite conduce al crecimiento del radio de la órbita. Como con nuestra elección del origen de la cuenta de la energía potencial, la energía total del satélite siempre es negativa, la variación relativa de la energía $\Delta E/E$ es positiva durante su disminución ($\Delta E < 0$). Como de acuerdo con el planteamiento la energía total disminuyó el 2% , $\Delta E/E$ es positiva e igual a 0.02. La relación (3) nos permite ligar la variación de la energía del satélite con el cambio del radio de la órbita Δr:

$$E(r+\Delta r) = -\frac{1}{2}\frac{mgR^2}{r+\Delta r} = E(r) + \Delta E. \qquad (4)$$

El segundo miembro de esta expresión, cuando $\Delta r/r \ll 1$, se puede escribir aproximadamente del siguiente modo:

$$-\frac{1}{2}\frac{mgR^2}{r(1+\Delta r/r)} \approx -\frac{1}{2}\frac{mgR^2}{r}\left(1-\frac{\Delta r}{r}\right) = E(r)\left(1-\frac{\Delta r}{r}\right). \qquad (5)$$

Comparando (4) y (5), obtenemos

$$E + \Delta E = E\left(1-\frac{\Delta r}{r}\right), \text{ es decir, } \frac{\Delta r}{r} = -\frac{\Delta E}{E} = -0{,}02.$$

El radio de la órbita también ha disminuido el 2%.

La variación de la velocidad del satélite cuando cambia la órbita es fácil de expresar por medio de la variación del radio de la órbita con ayuda de la relación (2):

$$(v + \Delta v)^2 = gR^2/(r + \Delta r). \qquad (6)$$

Como $\Delta v/v \ll 1$, el segundo miembro de esta última relación se puede escribir, aproximadamente, en la forma

$$v^2 \left(1 + \frac{\Delta v}{v}\right)^2 \approx v^2 \left(1 + 2\frac{\Delta v}{v}\right).$$

Transformando el segundo miembro de la fórmula (6) del mismo modo que al pasar de (4) a (5), obtenemos

$$v^2 \left(1 + 2\frac{\Delta v}{v}\right) = \frac{gR^2}{r}\left(1 - \frac{\Delta r}{r}\right),$$

de donde hallamos, tomando en consideración (2),

$$\frac{\Delta v}{v} = -\frac{\Delta r}{2r} = \frac{\Delta E}{2E} = 0{,}01.$$

La velocidad del satélite aumentó el 1% . ¡Presten atención al hecho de que el débil frenado del satélite en las capas superiores de la atmósfera conduce al aumento de su velocidad!

Nos queda hallar la variación del período satelitario. Esto es fácil de hacer conociendo $\Delta r/r$ y $\Delta v/v$, ya que el período está ligado con el radio de la órbita y la velocidad del satélite por la relación $T = 2\pi r/v$. Escribiendo el valor del período satelitario para el radio de la órbita y la velocidad del satélite cambiados:

$$T + \Delta T = 2\pi (r + \Delta r)/(v + \Delta v)$$

y transformando el segundo miembro del mismo modo que lo hicimos más arriba

$$2\pi \frac{r(1 + \Delta r/r)}{v(1 + \Delta v/v)} \approx T\left(1 + \frac{\Delta r}{r} - \frac{\Delta v}{v}\right),$$

hallamos

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta r}{r} - \frac{\Delta v}{v} = -\frac{3\Delta E}{2E} = -0{,}03.$$

El período satelitario ha disminuido el 3% .▲

19. La energía de un satélite. El satélite gira en torno a la Tierra por una órbita circular de radio r. ¿En qué proporción se distribuirá la energía que le comunicaron durante el lanzamiento entre los incrementos de las energías potencial y cinética?

△ Es cómodo expresar la energía cinética del satélite $mv^2/2$, en movimiento por una órbita circular, por intermedio del radio r de ésta:

$$E_c = mgR^2/2r. \qquad (1)$$

Cuando el satélite se halla en la superficie terrestre él ya posee energía potencial. Si, como por regla, elegimos el origen de la cuenta de la energía potencial en el infinito, en la superficie de la Tierra la energía potencial del satélite

$$E_p\,(R) = -\,mgR,$$

mientras que en la órbita

$$E_p\,(r) = -\,mgR^2/r.$$

Por consiguiente, durante la puesta del satélite en órbita se le comunicó la energía potencial

$$E_p = E_p\,(r) - E_p\,(R) = mgR\,(1 - R/r). \qquad (2)$$

Escribiendo la razón entre (1) y (2), hallamos

$$E_p/E_c = 2\,(r - R)/R.$$

Pero $r - R$ es igual a la altura de la órbita H sobre la superficie terrestre. Así pues,

$$E_p/E_c = 2H/R,$$

es decir, la razón entre la energía potencial y la energía cinética comunicadas es proporcional a la altura de la órbita. ▲

20. Retorno de la órbita. Una nave cósmica se mueve por una órbita circular. Con el fin de pasar a la trayectoria de aterrizaje, a la nave se le comunica la velocidad adicional Δv conectando por corto tiempo el motor de retrofreno. Analizar dos procedimientos de paso a la trayectoria de aterrizaje: 1) la velocidad adicional se comunica en la dirección opuesta a la velocidad orbital; 2) la velocidad adicional se comunica verticalmente hacia abajo, es decir, en dirección al centro de la Tierra. ¿Cuál de los procedimientos es más conveniente desde el punto de vista energético? Investigar también el caso límite del retorno de una órbita circular de baja altitud, cuya altura h sobre la superficie de la Tierra es mucho menor que el radio de ésta R ($h \ll R$).

△ Al comunicarle a la nave la velocidad adicional Δv, aquélla pasa de la órbita circular a la elíptica. De acuerdo con la primera ley de Kepler, uno de los focos de la elipse se encuentra en el centro de la Tierra. Para cualquiera de los procedimientos de paso a la trayectoria de aterrizaje, la velocidad adicional será la menor si la elipse tan sólo hace contacto con la superficie terrestre (con mayor precisión, con el límite de las capas densas de la atmósfera) y no la corta. En efecto, para cumplir esta condición se requiere la menor «distorsión» de la trayectoria circular inicial. En la fig. 20.1 el punto de aterrizaje elegido se designa con la letra A. Este punto es el perigeo de la trayectoria elíptica de descenso.

Al aplicar el primer procedimiento, la conexión del motor sólo varía el módulo, pero no el sentido de la velocidad. Por ello, en el punto donde se pone en marcha el motor de retrofreno, la trayectoria circular inicial y la trayectoria elíptica de descenso obtenida tienen una tangente común dirigida a lo largo del vector velocidad. Examinando la fig. 20.1 es fácil comprender que el mencionado punto es el apogeo de la trayectoria elíptica y, por consiguiente, yace en la continuación de la recta que pasa por el perigeo (punto A) y el centro de la Tierra.

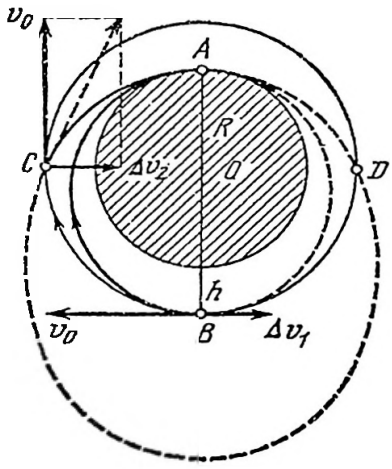


Fig. 20.1. Posibles trayectorias de descenso de la órbita circular al punto A en la superficie

Al aplicar el segundo procedimiento la velocidad adicional Δv se comunica en dirección perpendicular a la órbita circular y, por lo tanto, con ello varía tanto el módulo, como el sentido de la velocidad orbital. Esto significa que la trayectoria elíptica de descenso corta la órbita circular en el punto donde se pone en marcha el motor de retrofreno (el punto C en la fig. 20.1).

Con el fin de determinar la velocidad adicional Δv necesaria en cada uno de los mencionados casos, haremos uso de la ley de la conservación de la energía y de la segunda ley de Kepler, de acuerdo con la que durante el movimiento por la órbita la velocidad areolar es invariable. Para el primer procedimiento las ecuaciones que expresan dichas leyes se pueden escribir en la forma

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mgR^2}{r} = \frac{mv_1^2}{2} - mgR, \tag{1}$$

$$rv = Rv_1, \tag{2}$$

donde $v \equiv v_0 - \Delta v_1$ es la velocidad en el apogeo (en el punto B fig. 20.1); v_0, la velocidad en la órbita circular; r, el radio de la órbita circular; v_1, la velocidad en el punto de aterrizaje A. Poniendo v_1 de (2) en (1) y reagrupando los términos, obtenemos

$$v^2\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) = \frac{2gR^2}{r}\left(1 - \frac{r}{R}\right). \tag{3}$$

Considerando en el primer miembro de la ecuación (3) la diferencia de los cuadrados $(1 - r^2/R^2)$ como el producto $(1 + r/R)\cdot(1 - r/R)$ y dividiendo los miembros primero y segundo por $(1 - r/R)$, halla-

mos

$$v = \sqrt{\frac{2gR^2}{r}} \frac{1}{\sqrt{1+r/R}}.$$

Teniendo en cuenta que $\sqrt{gR^2/r}$ es la velocidad de la nave por la órbita circular v_0 y poniendo $v = v_0 - \Delta v_1$, obtenemos

$$\Delta v_1 = v_0 \left(1 - \sqrt{\frac{2}{1+r/R}}\right). \quad (4)$$

En el caso de una órbita circular de altitud baja ($h \ll R$) esta fórmula precisa se puede escribir aproximadamente en forma más sencilla. Transformemos la raíz en el segundo miembro de (4) poniendo en lugar de r la suma del radio de la Tierra R y la altura de la órbita circular h ($r = R + h$):

$$\sqrt{\frac{2}{1+r/R}} = \sqrt{\frac{2}{1+(R+h)/R}} = \sqrt{\frac{2}{2+h/R}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1+h/2R}} \approx \frac{1}{1+h/4R} \approx 1 - \frac{h}{4R}.$$

Poniendo esta expresión en la fórmula (4), obtenemos

$$\Delta v_1 \approx v_0 h/4R. \quad (5)$$

Pasemos a hallar la velocidad adicional Δv_2 al efectuar el segundo procedimiento de transición a la trayectoria de aterrizaje. Ante todo, señalemos que al comunicar a la nave la velocidad adicional en dirección al centro de la Tierra, su velocidad areolar no varía, por lo que en cualquier punto de la trayectoria elíptica de descenso la velocidad areolar será la misma que en la órbita circular inicial, es decir, igual a rv_0. Escribamos esta condición para el punto de aterrizaje A en el que designaremos con v_2 la velocidad:

$$rv_0 = Rv_2. \quad (6)$$

Junto con la ecuación de la ley de la conservación de la energía

$$\frac{m(v_0^2 + \Delta v_2^2)}{2} - \frac{mgR^2}{r} = \frac{mv_2^2}{2} - mgR \quad (7)$$

obtenemos un sistema de ecuaciones respecto de las incógnitas v_2 y Δv_2. En la ecuación (7) se ha tomado en consideración que la velocidad adicional Δv_2 es perpendicular a la velocidad en la órbita circular y el cuadrado de la velocidad resultante se determina por el teorema de Pitágoras (fig. 20.1). Poniendo v_2 de (6) en la ecuación (7), teniendo en cuenta que la velocidad en la órbita circular $v_0 = \sqrt{gR^2/r}$ y expresando con v_0 el último sumando en el segundo miembro de (7), obtenemos

$$v_0^2 + \Delta v_2^2 - 2v_0^2 = v_0^2 \frac{r^2}{R^2} - 2v_0^2 \frac{r}{R},$$

de donde

$$\Delta v_2^2 = v_0^2 \left(\frac{r^2}{R^2} - 2\,\frac{r}{R} + 1 \right). \tag{8}$$

Así pues,

$$\Delta v_2 = v_0 \left(\frac{r}{R} - 1 \right). \tag{9}$$

Poniendo en esta fórmula $r = R + h$, obtenemos

$$\Delta v_2 = v_0 h/R. \tag{10}$$

Comparando las fórmulas (5) y (10), hallamos que al emplear el primer procedimiento de paso a la trayectoria de aterrizaje desde una órbita circular de baja altitud ($h \ll R$) la velocidad adicional Δv necesaria es 4 veces menor.

La velocidad en el punto A que hay que extinguir para efectuar la toma de tierra suave es menor al utilizar el primer procedimiento. Esto se desprende directamente de la ley de la conservación de la energía, al realizar la comparación de los dos procedimientos. En efecto, como la variación de la energía potencial es la misma con los dos procedimientos de descenso, la energía cinética en el punto A es mayor en el caso en que ella es mayor inmediatamente después de la puesta en marcha del motor de retrofreno. Así pues, en lo que se refiere a lo que acabamos de decir, el primer procedimiento también es preferible. Una velocidad más alta de entrada en las capas densas de la atmósfera, fenómeno, característico del segundo procedimiento, presenta requisitos más rigurosos a la pantalla térmica de la nave. Las ventajas del primer procedimiento se advierten con toda evidencia si se trata del aterrizaje en un cuerpo celeste exento de atmósfera (p. ej., en la Luna), donde la velocidad debe ser extinguida por el motor.

¿En qué punto de la órbita circular debe ponerse en marcha el motor de retrofreno para que el aterrizaje se realice en el punto A? Al aplicar el primer procedimiento de descenso, como hemos visto, dicho punto yace en la recta que pasa por el punto A y el centro de la Tierra (punto B, fig. 20.1). ¿Y al utilizar el segundo procedimiento? En la fig. 20.1 el punto C, donde se pone en marcha el motor, yace en una recta que pasa por el centro de la Tierra y que forma un ángulo recto con el radio de nuestro planeta trazado en el punto A. En realidad esto es así. P.ej., podemos cerciorarnos de ello del modo siguiente.

Examinemos el triángulo COO' en la fig. 20.2, construido si el punto C se une con los focos de la trayectoria elíptica O y O'. De acuerdo con la primera ley de Kepler el foco O coincide con el centro de la Tierra. Calculemos los lados s y d de dicho triángulo, empleando las propiedades de la órbita elíptica por la que se desplaza la nave

después de la puesta en marcha del motor. Con ello, resulta que $d^2 + r^2 = s^2$, es decir, para el triángulo COO' es cierto el teorema de Pitágoras y, por lo tanto, él es rectángulo.

Como se desprende de la fig. 20.2, el lado d es igual a la diferencia de r' y R:

$$d = r' - R. \qquad (11)$$

La suma de las distancias desde cualquier punto de la elipse hasta los focos es una magnitud constante para la elipse dada. Igualando las sumas de las distancias hasta los focos desde los puntos C y E, obtenemos

$$s + r = r' + R,$$

de donde

$$s = r' + R - r. \qquad (12)$$

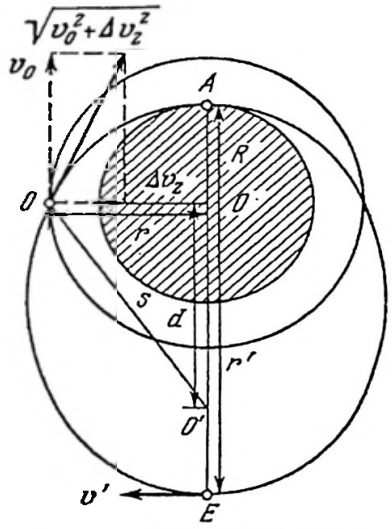


Fig. 20.2. Para el cálculo del punto de puesta en funcionamiento del motor de retrofreno

Así pues, para hallar d y s hay que calcular r', o sea, la distancia desde el centro de la Tierra hasta el apogeo de la órbita elíptica. Esto se puede hacer empleando la ley de la conservación de la energía y la constancia de la velocidad areolar. Igualando dichas magnitudes en las puntos C y E, obtenemos

$$rv_0 = r'v', \qquad (13)$$

$$\frac{m(v_0^2+\Delta v_2^2)}{2} - \frac{mgR^2}{r} = \frac{mv'^2}{2} - \frac{mgR^2}{r'}. \qquad (14)$$

Pongamos en la ecuación (14) v' de (13), Δv_2 de (9), y, como antes, sustituyamos gR^2 por $v_0^2 r$. Como resultado se obtiene

$$\left(\frac{r}{R} - 1\right)^2 = \left(1 - \frac{r}{r'}\right)^2. \qquad (15)$$

Esta ecuación cuadrática para r' tiene dos raíces. Una de ellas, $r' = R$, corresponde al perigeo de la órbita, es decir, al punto A. Esta raíz aparece debido a que el segundo miembro de la ecuación (13) tiene la misma forma para el apogeo y el perigeo, en tanto que la ecuación (14) es cierta para todos los puntos de la trayectoria. La segunda raíz

$$r' = Rr/(2R - r) \qquad (16)$$

corresponde a la distancia buscada hasta el apogeo.

Ahora sólo nos queda poner r' de (10) en las fórmulas (11) y (12) y cerciorarnos de que $d^2 + r^2 = s^2$.

Examinando la fig. 20.1 es fácil darse cuenta de que para una órbita circular de baja altitud, cuando las trayectorias elípticas de descenso poco se diferencian de la circular, el retorno a la Tierra según

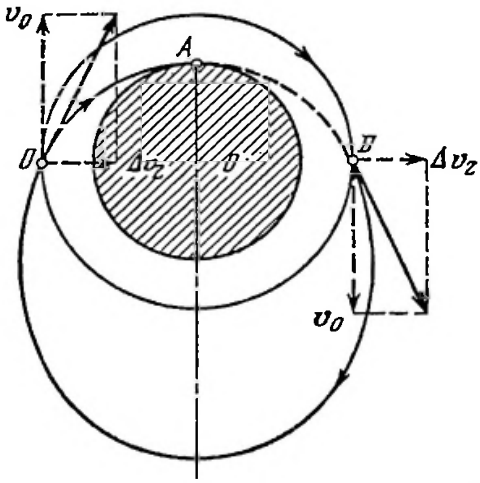


Fig. 20.3. El descenso de la nave al punto A es posible al transmitirle en el punto D un impulso dirigido desde el centro de la Tierra.

el primer procedimiento ocupa, aproximadamente, media vuelta en torno a la Tierra, mientras que usando el segundo, un cuarto de vuelta.

En conclusión hagamos la siguiente indicación. Al determinar la velocidad adicional Δv_2 sólo hemos tomado la raíz positiva de la ecuación (8). ¿Tiene sentido físico la raíz negativa de la mencionada ecuación

$$\Delta v_2 = -v_0 (r/R - 1)? \qquad (17)$$

El signo menos ante esta expresión sólo puede significar que la velocidad adicional está dirigida no hacia el centro de la Tierra, sino en sentido opuesto, es decir, desde dicho centro. ¿Qué trayectoria tendremos en dicho caso? ¿Tiene ella alguna relación con el problema que resolvemos, es decir, el hallazgo de la trayectoria de descenso?

Estudiemos una vez más la fig. 20.1. La elipse, correspondiente al segundo procedimiento de descenso, corta dos veces la órbita circular inicial de la nave: en los puntos C y D. De la simetría de la figura está claro que en dichos puntos los módulos de las velocidades en la órbita elíptica son iguales. Si en dichos puntos descomponemos las velocidades en sus componentes por dos direcciones perpendiculares entre sí, o sea, a lo largo de la trayectoria circular y a lo largo de la dirección hacia el centro de la Tierra, como está claro en la fig. 20.3, las correspondientes componentes de la velocidad serán iguales

en módulo. Por esa razón, si en el momento cuando la nave pasa por el punto D de la órbita circular, le comunicamos la velocidad adicional Δv_2 dirigida por el radio en sentido opuesto al centro de la Tierra (es decir, ¡verticalmente hacia arriba!), la nave se alejará primero de la Tierra por la trayectoria elíptica, pero después, desplazándose por ella, llegará de todos modos al punto A.

La ecuación (8) tiene la raíz (17) correspondiente al mencionado caso. Esto no provoca asombro: tanto la ley de la conservación de la energía (7), como la ley de la constancia de la velocidad areolar (6) tienen la misma forma, independientemente de si la velocidad adicional Δv_2 está dirigida hacia o desde el centro de la Tierra.

En el caso de una órbita circular de baja altitud, el retorno a la Tierra por medio de semejante procedimiento extraordinario ocupará, aproximadamente, como se desprende de la fig. 20.3, tres cuartos de vuelta en torno a la Tierra. ▲

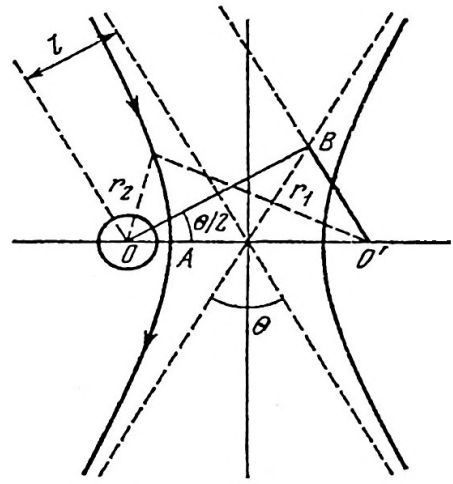


Fig. 21.1. Trayectoria hiperbólica de vuelo del meteorito en las proximidades de la Tierra

21. Un meteorito. ¿En qué ángulo variará el sentido de la velocidad de un meteorito que pasa junto a la Tierra en virtud del efecto de la atracción terrestre? La velocidad del meteorito a gran distancia de la Tierra es v_0, el parámetro de impacto l.

△ El carácter cualitativo de la dependencia entre el ángulo de desviación del meteorito y la velocidad v_0 y el parámetro de impacto l, es decir, la distancia desde el centro de la Tierra a la que pasaría el meteorito si no hubiera atracción por parte de la misma (fig. 21.1), se puede establecer de inmediato: a la velocidad prefijada v_0 dicho ángulo es tanto menor cuanto mayor es l. Esto está claro, ya que sobre un meteorito que vuela a gran distancia la atracción terrestre, debilitada por la distancia, influye muy débilmente. Cuando l está prefijado la desviación es tanto menor, cuanto mayor es la velocidad v_0. En efecto, a gran velocidad el tiempo de sobrevuelo es pequeño y a la fuerza de la gravitación terrestre le falta tiempo para provocar una notoria encorvadura de la trayectoria del meteorito.

Con el fin de obtener un resultado cuantitativo hay que emplear ciertas propiedades de la trayectoria hiperbólica, por la que se desplaza el meteorito, si éste se acerca a la Tierra desde el infinito. Una hipérbola es el lugar geométrico de los puntos para los cuales la

diferencia entre las distancias a dos puntos prefijados O y O', llamados focos, es constante: $r_1 - r_2 = \text{const}$ (fig. 21.1). Uno de los focos de la hipérbola O coincide con el centro de la Tierra, el segundo foco O', yace en la recta que pasa por el centro de la Tierra y el punto A de la trayectoria más próximo a él. A distancias infinitamente grandes de la Tierra tanto al aproximarse, como al alejarse, la velocidad del meteorito está dirigida por las asíntotas de la hipérbola, es decir, el problema consiste en hallar el ángulo θ entre las asíntotas. El punto de intersección de éstas yace en el centro entre los focos.

Igualemos la diferencia entre las distancias de los focos O y O' hasta un punto indefinidamente alejado ($O'B$ en la fig. 21.1) y hasta el punto más próximo al centro de la Tierra (A en la fig. 21.1). Del triángulo $OO'B$, hallamos

$$O'B = 2l \operatorname{tg}(\theta/2), \quad OO' = \frac{2l}{\cos(\theta/2)}.$$

La diferencia de las distancias desde los focos hasta el punto A

$$AO' - AO = (OO' - AO) - AO.$$

Designemos con r la distancia AO desde el centro de la Tierra hasta el punto más cercano de la trayectoria. Ahora, la condición de igualdad de la diferencia de las distancias hasta los puntos elegidos puede ser escrita en la forma

$$2l \operatorname{tg}(\theta/2) = \frac{2l}{\cos(\theta/2)} - 2r.$$

Traspasando $2r$ al primer miembro, elevando ambos miembros al cuadrado y haciendo uso de la identidad $1/\cos^2\alpha = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha$, obtenemos

$$\operatorname{tg}(\theta/2) = \frac{l^2 - r^2}{2lr}. \tag{1}$$

Para el parámetro de impacto l prefijado, la distancia r hasta el punto más próximo al centro de la Tierra de la trayectoria depende de la velocidad v_0 en el infinito. Con el fin de excluir r de la fórmula (1) hacemos uso de la ley de la conservación de la energía

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mgR^2}{r} \tag{2}$$

(v es la velocidad del meteorito en el punto A; R, el radio de la Tierra) y de la segunda ley de Kepler que en el caso de movimiento por el campo central es asimismo cierta para las trayectorias abiertas:

$$lv_0 = rv. \tag{3}$$

El segundo miembro de esta igualdad es evidente, ya que en el punto A de la trayectoria más próximo a la Tierra, el vector velocidad

v es perpendicular al radio terrestre. El primer miembro de la última igualdad se evidencia si examinamos la fig. 21.2.

De la ley de la conservación de la energía (2) y de la fórmula (3) hallamos con facilidad

$$(l^2 - r^2)/r = 2gR/v_0^2$$

que después de ponerla en (1) nos proporciona

$$\operatorname{tg}(\theta/2) = gR^2/lv_0^2. \qquad (4)$$

Esta fórmula resuelve el problema planteado: determina el ángulo de desviación del meteorito en función del parámetro de impacto y la velocidad en el infinito. El ángulo $\theta/2$ crece monótonamente desde 0 hasta $\pi/2$ al disminuir el producto lv_0^2 desde ∞ hasta 0, lo que concuerda con los razonamientos cualitativos aducidos más arriba.

Durante la resolución del problema supusimos que la trayectoria del meteorito no hace contacto con la Tierra. Las ecuaciones (2) y (3) permiten hallar la condición a la que deben satisfacer el parámetro de impacto l y la velocidad del meteorito en el infinito v_0 con el fin de que en realidad sea así. Haciendo en las mencionadas ecuaciones la distancia mínima r hasta el centro de la Tierra igual al radio terrestre R y excluyendo v de ellas, hallamos

$$l_{\min} = R\sqrt{1 + 2gR/v_0^2}.$$

Con valores menores del parámetro de impacto el meteorito caerá sobre la Tierra.

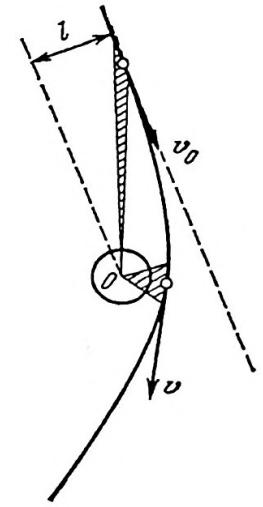


Fig. 21.2. Aplicación de la segunda ley de Kepler a la órbita hiperbólica

Consideremos algunos casos particulares.

1. El valor máximo absoluto del ángulo de desviación $\theta_{\max}$ se obtiene de (4) con el valor mínimo absoluto posible (a la velocidad v_0 prefijada) del parámetro de impacto $l_{\min}$, para la cual se puede escribir la expresión de forma algo diferente haciendo uso de que $2gR$ es igual al cuadrado de la segunda velocidad cósmica v_{II}:

$$l_{\min} = R\sqrt{1 + (v_{II}/v_0)^2}$$

($l_{\min}$ y $\theta_{\max}$ corresponden a la trayectoria que casi hace contacto con el globo terráqueo). Así pues,

$$\theta_{\max} = 2\operatorname{arctg}\frac{(v_{II}/v_0)^2}{2\sqrt{1 + (v_{II}/v_0)^2}}. \qquad (5)$$

Si es pequeña la velocidad en el infinito en comparación con la segunda velocidad cósmica: $v_0 \ll v_{II}$, en el denominador de (5), bajo el signo de la raíz es posible despreciar la unidad:

$$\theta_{máx} \approx 2 \operatorname{arctg} (v_{II}/2v_0),$$

es decir, $\theta_{máx} \to \pi$ cuando $v_0/v_{II} \to 0$: con pequeña velocidad inicial y la elección conveniente de su sentido (o sea, tal que el meteorito pase junto a la Tierra), después de la circunvalación de la Tierra, el sentido de la velocidad del meteorito cambia, prácticamente, por el opuesto.

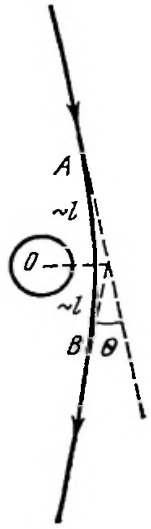


Fig. 21.3. Para el cálculo del pequeño ángulo de desviación del meteorito

2. Como se desprende de (4), el ángulo de desviación del meteorito será pequeño al verificarse la desigualdad $gR^2/lv^2 \ll 1$. En tal caso, en (4) podemos sustituir la tangente por su argumento:

$$\theta \approx 2gR^2/lv_0^2. \qquad (6)$$

El segundo miembro de esta expresión es la razón entre el valor absoluto de la energía potencial del meteorito a la distancia l del centro de la Tierra mgR^2/l y su energía cinética en el infinito $mv_0^2/2$.

Es de interés señalar que el resultado aproximado (6) para la desviación a un ángulo pequeño con una precisión de hasta el factor numérico del orden de la unidad, se puede obtener de modo elemental. Examinemos la fig. 21.3 referente a este caso. De manera ruda se puede considerar que la interacción entre el meteorito y la Tierra sólo es considerable en el sector de la trayectoria AB, de una longitud del orden l, más próximo a la Tierra: los demás sectores son casi rectilíneos, ya que la fuerza de la atracción terrestre es paralela, prácticamente, a la velocidad del meteorito. En el movimiento que analizamos el módulo de la velocidad, en realidad, no varía y la duración del efecto de la fuerza de la atracción terrestre sobre el meteorito se puede tomar igual a $\Delta t \approx l/v_0$. La fuerza se puede hacer aproximadamente igual a mgR^2/l^2. Así pues, el incremento del impulso del meteorito Δp en el sentido perpendicular a la dirección de su movimiento, según el orden de su valor, constituye

$$\Delta p = F\Delta t \approx mgR^2/lv_0.$$

De aquí es fácil obtener para el ángulo de desviación θ

$$\theta \approx \frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta p}{mv_0} = \frac{gR^2}{lv_0^2}. \quad \blacktriangle$$

22. Dispersión de las partículas α. Una partícula α que vuela a velocidad v_0 se dispersa elásticamente por un núcleo inmóvil y varía la dirección de su movimiento a 90°. Determinen la velocidad del núcleo después del choque.

△ El choque de una partícula α con un núcleo se puede considerar como un choque perfectamente elástico, para el que se verifican las leyes de la conservación de la energía y del impulso. Sean m y M las masas de la partícula α y del núcleo; v y V, sus velocidades después del choque. Entonces, las leyes de la conservación de la energía y el impulso se escriben en la forma

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{MV^2}{2}, \quad (1)$$

$$mv_0 = mv + Mv. \quad (2)$$

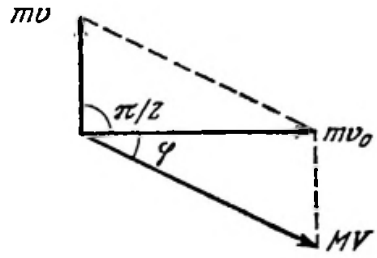


Fig. 22.1. Conservación del impulso durante la dispersión de la partícula α bajo ángulo recto por un núcleo inmóvil

A la igualdad (2) le corresponde el paralelogramo de impulsos mostrado en la fig. 22.1. Como de acuerdo con el planteamiento, la partícula α se dispersa a 90°, en dicha figura los triángulos son rectángulos. El sentido del movimiento del núcleo después del choque forma cierto ángulo φ con la dirección inicial del movimiento de la partícula α. De la fig. 22.1 se deduce que

$$\operatorname{tg} \varphi = v/v_0. \quad (3)$$

Con el fin de hallar la velocidad de la partícula α y del núcleo después del choque apliquemos al triángulo rectángulo en la fig. 22.1 el teorema de Pitágoras:

$$M^2V^2 = m^2 (v_0^2 + v^2). \quad (4)$$

Poniendo de aquí V^2 en la ecuación de la ley de la conservación de la energía (1), obtenemos

$$v^2 = v_0^2 \frac{M-m}{M+m}. \quad (5)$$

Poniendo este valor de v^2 en la igualdad (4), hallamos

$$V^2 = v_0^2 \frac{2m^2}{M(M+m)}. \quad (6)$$

Tomando en consideración (5), la expresión (3) para la tg φ toma la forma

$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\frac{M-m}{M+m}}. \tag{7}$$

De la fórmula (5) o de la (7) se deduce que la dispersión de la partícula α a 90° cuando ella choca con un núcleo inmóvil sólo es posible en el caso en que su masa es menor que la del núcleo: $m < M$. La condición del problema no se puede verificar si las partículas α se dispersan por los núcleos de hidrógeno, tritio o bien helio.

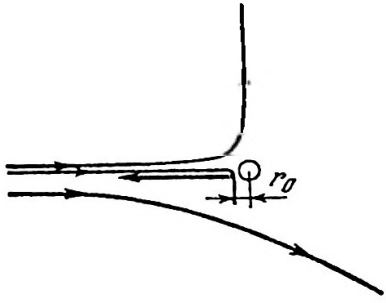


Fig. 22.2. Trayectoria hiperbólica de las partículas α en el campo coulombiano de núcleo

A pesar de que el proceso examinado ha sido llamado choque, en realidad la partícula α puede no ponerse en contacto directo con el núcleo. Sobre la partícula α en vuelo actúa desde el núcleo la fuerza coulombiana de repulsión de modo que la trayectoria de la partícula es una hipérbola (fig. 22.2). La partícula α se aproxima lo más cerca posible al núcleo durante el choque central, en virtud del cual ella se dispersa hacia atrás. Con el fin de apreciar el orden del valor de la menor distancia r_0 a la que puede acercarse al núcleo la partícula α, vamos a considerar que el núcleo permanece inmóvil, e igualamos la energía cinética inicial de la partícula α a la energía potencial del sistema en el momento cuando la partícula α se detiene:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2Ze^2}{r_0}, \tag{8}$$

donde Ze es la carga del núcleo. Si la velocidad de la partícula α en vuelo es tal que el valor de r_0, calculado con la fórmula (8), resulta ser mayor que la dimensión del núcleo $R \approx 10^{-13}$ cm, en el proceso del choque con el núcleo sobre la partícula α sólo actúa la fuerza coulombiana, mientras que las fuerzas nucleares de acción próxima no desempeñan papel alguno.

Si en la fórmula (8) hacemos r_0 igual al radio de acción de las fuerzas nucleares $R \approx 10^{-13}$ cm, es posible apreciar la velocidad máxima (o la energía) de la partícula α con la que ella aún se dispersa por el núcleo sin hacer que varíe su estado interno. P. ej., para Z del orden de 80 (en el oro que Rutherford empleaba para sus experimentos $Z = 79$) esta velocidad constituye, aproximadamente, 10^6 m/s. Con ello, gracias a que las fuerzas de interacción coulombianas son potenciales, se conserva la energía mecánica del sistema. Como resul-

tado, el modelo del choque perfectamente elástico describe adecuadamente la dispersión, aunque, desde el punto de vista mecánico del fenómeno, el choque no se produce.

Haciendo uso de la fórmula (6), la energía cinética adquirida por el núcleo durante la dispersión de la partícula α a un ángulo recto, se puede escribir en la forma

$$\frac{MV^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} \frac{2m}{M+m}. \qquad (9)$$

Prestemos atención a que la energía que se transmite al núcleo durante el choque es una insignificante parte de la energía inicial de la partícula α, cuando su masa es mucho mayor que la de la partícula α : $M \gg m$. Esta conclusión obtenida para el caso particular de dispersión a un ángulo recto sigue siendo asimismo cierta en el caso de dispersión a cualesquiera ángulos.

Al obtener la relación (9) sólo se hizo uso de las leyes de la conservación. Por ello, la conclusión acerca de que una partícula ligera durante el choque elástico con una partícula pesada puede transmitirle sólo una pequeña parte de su energía cinética es universal y aplicable, en particular, a los choques elásticos de los electrones con los iones y los átomos neutros en el plasma. Esto conduce a interesantes singularidades en las propiedades del plasma.

Examinemos, p. ej., semejante experimento: en el plasma se inyecta un haz de electrones rápidos. Después de que los electrones del haz sufran aunque sólo sea un choque cada uno con los iones o los átomos, el carácter direccional del movimiento de los electrones se perderá por completo. Se producirá la completa caotización de la distribución de los electrones en cuanto al sentido de la velocidad. Pero cada uno de los electrones debe sufrir múltiples choques con las partículas pesadas antes de que se produzca la nivelación de los valores medios de las energías cinéticas de las partículas ligeras y pesadas. Como resultado, en el transcurso de un intervalo de tiempo bastante grande, los electrones y los iones en el plasma parecerá que se hallan a diversas temperaturas. ¡A pesar de que los electrones e iones se encuentran en ese mismo volumen, están por completo mezclados y, constantemente, chocan entre sí, ellos se comportan como dos sistemas termodinámicos, casi aislados entre sí, entre los que casi no hay intercambio de calor! ▲

23. Choque de una bola con una cuña. Una bola de masa m, en vuelo horizontal a la velocidad v, después del choque perfectamente elástico contra la superficie oblicua de una cuña, rebota en sentido vertical hacia arriba (fig. 23.1). La cuña de masa M se encuentra sobre una superficie horizontal lisa y después del choque se desliza por ella. ¿A qué altura rebotará la bola?

△ La altura h de ascenso de la bola sobre el punto contra el que

se produjo el choque, se determina por la velocidad vertical v_1 que la bola adquiere como resultado del choque:

$$h = v_1^2/2g.$$

Por ello, la solución del problema se reduce a hallar dicha velocidad v_1.

Para empezar, examinemos el caso límite cuando la masa de la cuña es mucho mayor que la de la bola: $M \gg m$. Claro está, que la maciza cuña, prácticamente, no se moverá de su sitio durante el choque de una ligera bola, es decir, podemos considerar que la cuña está fijada en la superficie horizontal. Para que, en realidad, la bola rebote hacia arriba, la cara oblicua de la cuña debe en tal caso formar el ángulo $\pi/4$ con el horizonte. Como de acuerdo con el planteamiento el choque de la bola contra la cuña es perfectamente elástico, la velocidad de la bola sólo variará en sentido quedando invariable en módulo: $v_1 = v$. Por lo tanto, $h = v^2/2g$.

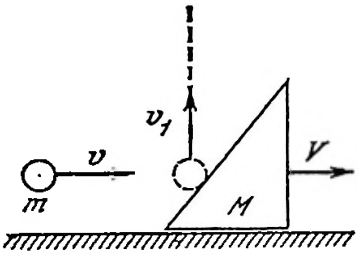


Fig. 23.1. Choque de la bola contra la superficie oblicua de la cuña

¿Qué pasará si la masa de la cuña es comparable con la de la bola?

Intentemos aplicar las leyes de la conservación del impulso y la energía considerando que durante el choque la interacción entre la bola y la cuña y la interacción de la cuña con la superficie horizontal se producen instantánea y simultáneamente. Según el planteamiento, entre la cuña y la superficie donde ella descansa, no hay rozamiento. Por ello, la proyección de la ley de la conservación del impulso sobre la dirección horizontal se escribe en la forma

$$mv = MV, \tag{1}$$

donde V es la componente horizontal de la velocidad de la cuña después del choque. Con el fin de escribir la proyección de la ley de la conservación del impulso sobre la dirección vertical, hay que tener en cuenta que durante el choque la cuña está en interacción con la superficie, es decir, con la Tierra:

$$mv_1 = (M + M_T)V_1. \tag{2}$$

En esta expresión V_1 es la velocidad vertical de la cuña y la Tierra después del choque; M_T, la masa de la Tierra.

A las ecuaciones (1) y (2) adicionemos la ley de la conservación de la energía durante el choque elástico:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{MV^2}{2} + \frac{(M+M_T)V_1^2}{2}. \tag{3}$$

Debido a la gran masa de la Tierra, podemos despreciar el último sumando en el segundo miembro de (3) que contiene la energía cinética de nuestro planeta, adquirida como resultado del choque. Para cerciorarnos de esto, expresemos la velocidad V_1 de la ecuación (2) y pongámosla en (3). En este caso, el último sumando en (3) toma la forma

$$\frac{(M+M_T)V_1^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2}\,\frac{m}{M+M_T}. \qquad (4)$$

Ya que la razón $m/(M+M_T) \ll 1$, como se desprende de (4), la energía cinética transmitida a la Tierra es despreciablemente pequeña.

Ahora, expresando la velocidad horizontal de la cuña V a partir de (1) y poniéndola en (3), de la que hemos excluido el último sumando, hallamos la velocidad vertical de la bola después del choque v_1 que es la que nos interesa:

$$v_1^2 = v^2\,\frac{M-m}{M}. \qquad (5)$$

Hemos obtenido un resultado que al parecer es satisfactorio: p. ej., éste corresponde al caso límite de la cuña fijada ($m \ll M$) que examinamos más arriba. Precisamente con tal solución de este problema se puede tropezar en muchos manuales.

Pero es posible razonar de otro modo. Al resolver el problema habíamos supuesto que se produce un sólo choque, es decir, el choque

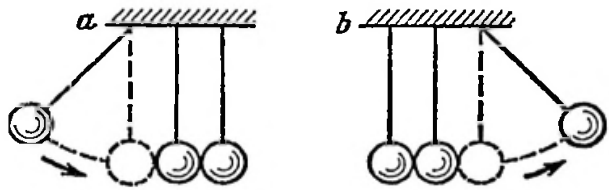


Fig. 23.2. Durante el choque elástico la bola central queda en su lugar

de la bola contra la cuña que permanece en la Tierra. Mas, en realidad, en el choque participan tres sólidos: la bola, la cuña y la Tierra. ¿Acaso podemos considerar, en efecto, que se produce un choque, o bien es necesario examinar consecutivamente el choque de la bola con la cuña y de ésta con la Tierra?

Con el fin de cerciorarse de que semejante suposición es posible, recordemos el ejemplo de otro choque elástico en que, asimismo, toman parte tres sólidos: de largos hilos de igual longitud están suspendidas tres bolas de hueso iguales que hacen contacto entre sí. Una de las bolas extremas se desvía a cierto ángulo y se suelta (fig. 23.2 *a*). Resulta que después del choque sólo una de las bolas, la suspendida

en el otro lado, bota, mientras que la bola de en medio queda en su lugar (fig. 23.2 *b*). El resultado de este experimento indica que la colisión que se produce no se puede considerar como un choque de la bola desviada contra un sistema de dos bolas inmóviles suspendidas. Para explicar el experimento, hay que examinar dos choques elásticos que transcurren sucesivamente, es decir, el de la bola desviada con la central y, a continuación, el de ésta con la segunda extrema.

En caso de un choque elástico frontal de bolas de igual masa, la bola que choca se detiene, mientras que la que está en reposo adquiere la velocidad igual a la de la bola que ejerce el choque. Si suponemos que el choque se produce instantáneamente, después del primer choque, de inmediato, la bola central ha adquirido ya velocidad, pero no ha tenido tiempo para desplazarse de aquella posición en la que se encontraba antes del choque. En el transcurso del siguiente momento se produce el choque de la bola central contra la segunda extrema. Como resultado de este choque la bola central se detiene, en tanto que la bola extrema adquiere esa misma velocidad y, a continuación, su hilo se desvía de la vertical.

Si en cambio consideramos que la primera bola choca con el sistema de dos bolas inmóviles (que al parecer, están unidas entre sí), como resultado de semejante choque estas dos bolas deberían haber botado a igual velocidad. Pero esto no se produce en el experimento.

Así pues, incluso si las bolas están suspendidas haciendo contacto entre sí, debemos examinar su interacción como una sucesión de choques aislados entre ellas.

Sin duda alguna, el resultado del experimento con las tres bolas no se puede transpasar sin restricciones al choque que consideramos de la bola con la cuña y la superficie, ya que tanto las condiciones del experimento, como los sólidos en interacción son aquí otros. No obstante, en semejante caso también podemos realizar el intento de considerar dos choques sucesivos: de la bola contra la cuña y de ésta con la Tierra. Con esto, variará en cierto grado la anotación de las leyes de la conservación. La ecuación (1), que expresa la conservación de la componente horizontal del impulso, permanecerá invariable también en el caso cuando sólo examinamos el primer choque, o sea, el de la bola contra la cuña. La ecuación (2) para la componente vertical del impulso debe ser sustituida por otra, ya que después del primer choque sólo se mueve la cuña y no ésta junto con la Tierra:

$$mv_1 = MV_1. \tag{6}$$

La ley de la conservación de la energía para el primer choque se escribe en la forma

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{M(V^2 + V_1^2)}{2}. \tag{7}$$

Expresando V de la ecuación (1), V_1 de la ecuación (6) y poniéndolas en (7), obtenemos

$$v_1^2 = v^2 \frac{M-m}{M+m}. \qquad (8)$$

Vemos que el valor de la velocidad vertical de la bola que rebota v_1, proporcionado por la expresión (8), es menor que el valor v_1 de la respuesta anterior (5). Esto es comprensible, ya que ahora la cuña, después del primer choque, tiene una energía cinética ligada no sólo con su movimiento horizontal, sino también con el vertical. Claro está, habiendo adquirido, después del primer choque, la componente vertical de la velocidad la cuña no tiene tiempo para desplazarse por la vertical, ya que de inmediato se produce el segundo choque: el de la cuña contra la Tierra. Como, de acuerdo con el planteamiento del problema, después del choque, la cuña se desliza por el plano horizontal (y no rebota hacia arriba), su choque con la Tierra debe considerarse inelástico. La velocidad vertical de la cuña se extingue durante este choque y la parte correspondiente de la energía cinética de la cuña se transforma en calor.

Si el choque de la cuña contra la Tierra fuese perfectamente elástico, la componente vertical de la velocidad de la cuña V_1 cambiaría su dirección por la opuesta y la cuña, siguiendo a la bola, saltaría hacia arriba a cierta altura.

El valor de la velocidad v_1 de (8) de la bola que rebotó también satisface el caso límite $m \ll M$ cuando $v_1 = v$. En algunos manuales de problemas se tropieza, asimismo, con semejante solución del problema que consideramos. Comparando los resultados (5) y (8), vemos que por su forma es difícil dar preferencia a cualquiera de las soluciones aducidas. En efecto, ambas satisfacen la condición límite $m \ll M$. Prestemos atención a que tanto la fórmula (5), como la (8) sólo tienen sentido si $m < M$, es decir, cuando la masa de la cuña es mayor que la de la bola. Esto quiere decir que si $M < m$ la bola no puede rebotar de la cuña hacia arriba verticalmente. Por esta razón, el planteamiento del problema no será contradictorio sólo cuando la bola es más ligera que la cuña.

Esta conclusión está ligada con que, en el caso general, para el choque elástico de un cuerpo en movimiento con otro inmóvil, el cambio de dirección del cuerpo que entra en colisión, como resultado del choque puede ser cualquiera sólo cuando la masa del cuerpo que choca es menor que la del «blanco». Pero si la masa del «proyectil» m es mayor que la del «blanco» M, el «proyectil» no puede desviarse a un ángulo que supere $\varphi_{máx}$ y que se halla de la relación

$$\text{sen } \varphi_{máx} = M/m.$$

Si $M < m$ este ángulo límite siempre es menor que $\pi/2$.

Así pues, la propia forma de los resultados no da la posibilidad de elegir, entre ellos, el correcto. La correspondencia a los casos lí-

mites es la condición necesaria para que el resultado sea correcto, pero, claro está, no es la suficiente. Podemos intentar a plantear preguntas adicionales, la respuesta a las cuales ayudará a elegir la solución correcta. P.ej., aquí podríamos hacer la pregunta de qué ángulo α debe constituir la cara oblicua de la cuña con la horizontal para que la bola rebote, en realidad, verticalmente hacia arriba.

Construyamos el vector de la variación del impulso de la bola durante el choque $\Delta p = mv_1 - mv$ (fig. 23.3). Semejante variación del impulso se provoca por la fuerza que actúa sobre la bola por parte de la cara oblicua de la cuña. Como el choque es elástico y no hay rozamiento, la mencionada fuerza, sin falta, está dirigida perpendicularmente a la superficie de la cuña. Ahora, de la fig. 23.3 se desprende de inmediato que $\operatorname{tg} \alpha = v/v_1$. Como $v_1 \leqslant v$, $\operatorname{tg} \alpha \geqslant \pi/4$, donde el signo de igualdad corresponde al caso límite.

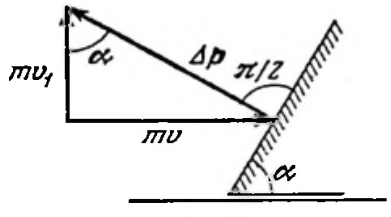


Fig. 23.3. Para el cálculo del ángulo de inclinación de la cara de la cuña

En las dos soluciones aducidas del problema, el valor de v_1 es diferente, por ello también lo será el ángulo α. No obstante, el valor límite de α si $m \ll M$ es igual en ambos casos y, de nuevo, no podemos dar preferencia a ninguna de las soluciones.

A pesar de todo, ¿cuál de las soluciones es correcta? Con el fin de dar en el quid del problema, hemos de analizar con suma atención las condiciones de la aplicación de las suposiciones que hicimos durante la resolución del problema. Para ello, es necesario profundizar en mayor grado en el mecanismo de las transformaciones energéticas durante las colisiones elásticas. Por esta razón, primero vamos a examinar en los siguientes problemas ejemplos más sencillos y, a continuación, retornaremos a la pregunta planteada. ▲

24. Duración del choque. Apreciar el tiempo que dura el choque elástico de sólidos, considerando la colisión de una varilla que choca con su cara contra una pared inmóvil indeformable (fig. 24.1).

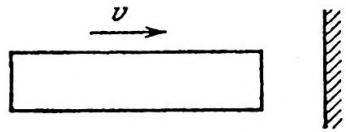


Fig. 24.1. Choque de una varilla con la pared

△ En el problema anterior considerábamos que el choque elástico entre sólidos transcurre instantáneamente. Pero es evidente en absoluto que semejante suposición es una idealización. El choque de sólidos reales siempre ocupa un espacio finito de tiempo τ. En efecto, si la variación del impulso del sólido transcurriera durante el choque de manera instantánea, la fuerza de interacción de los sólidos

sería, al chocar éstos, infinitamente grande, lo que no sucede, como es lógico. ¿De qué puede depender la duración del choque? Supongamos que examinamos el rebote de un sólido elástico de una pared indeformable. Al producirse el choque la energía cinética del sólido en el transcurso de la primera mitad del choque se convierte en la energía potencial de la deformación elástica del sólido. Durante la segunda mitad se produce la transformación inversa de la energía de la deformación en la energía cinética del sólido que rebota. Por esto, es evidente que las propiedades elásticas del sólido desempeñan determinado papel al producirse el choque.

Así, pues es de esperar que la duración del choque depende del módulo de Young del material del sólido E, de su densidad ρ y de sus dimensiones geométricas. También es posible que la duración τ del choque dependa de la velocidad v a la que el sólido tropieza con el obstáculo.

Es fácil cerciorarse de que recurriendo sólo a razonamientos relacionados con las dimensiones no se consigue apreciar el tiempo del choque. En efecto, si incluso tomamos una bola como sólido que choca, cuyas dimensiones se caracterizan por el único parámetro, es decir, el radio R, con las magnitudes E, ρ, R y v se puede confeccionar una sucesión innumerable de expresiones que tienen la dimensión del tiempo:

$$\tau = R\sqrt{\frac{\rho}{E}}\, f\left(\frac{\rho v^2}{E}\right), \qquad (1)$$

donde f es una función arbitraria de la magnitud adimensional $\rho v^2/E$. Por esta razón, para hallar τ son necesarias consideraciones dinámicas. Con este fin lo más sencillo es examinar un sólido de la forma de una larga varilla.

Supongamos que una varilla, en movimiento a una velocidad v, choca con su cara contra una pared inmóvil. Durante el contacto de la sección de cara con la pared, la velocidad de las partículas que yacen en dicha sección de la varilla se reduce de inmediato a cero. En el siguiente momento de tiempo se detienen las partículas situadas en la sección vecina, etc. El sector de la varilla, cuyas partículas ya se han parado para el momento dado, estará deformado. Con otras palabras, en dicho momento de tiempo estará deformada aquella parte de la varilla hasta la que llega la onda de la deformación elástica que se propaga por la varilla desde el lugar de contacto con el obstáculo. Esta onda de deformación se propaga por la varilla a la velocidad del sonido u. Si consideramos que la varilla se puso en contacto con la pared en el momento de tiempo $t = 0$, en el momento de tiempo t la longitud de la parte comprimida de la varilla será igual a ut. En la fig. 24.2 a esta parte del sólido está sombreada. En la parte no sombreada de la varilla la velocidad de todas las partículas si-

gue siendo v, mientras que en la parte comprimida (sombreada) de la varilla todas las partículas están en reposo.

La primera etapa del proceso de choque de la varilla con la pared finaliza en el momento cuando toda ella esté deformada y las velocidades de todas sus partículas se anulen (fig. 24.2 *b*). En este momento la energía cinética de la varilla que choca se transforma enteramente en la energía potencial de la deformación elástica. Después de esto, de inmediato, comienza la segunda etapa del choque, durante la cual la varilla retorna al estado no deformado. Este proceso comienza en la cara libre de la varilla y, propagándose por ella a la velocidad del sonido, se aproxima gradualmente al obstáculo. En la fig. 24.2 *c* se muestra la varilla en el momento cuando la parte sombreada ya no está deformada y todas sus partículas tienen la velocidad v dirigida a la izquierda. El sector sombreado está, como antes, deformado y las velocidades de todas sus partículas son nulas.

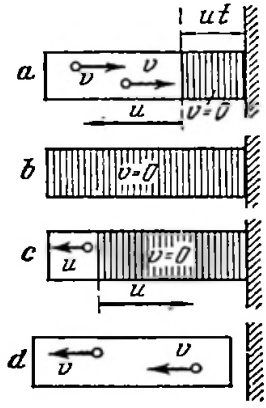


Fig. 24.2. Propagación de la onda de deformación elástica en la varilla al chocar contra la pared. El frente de onda de deformación se desplaza a la velocidad del sonido u

El final de la segunda etapa llegará en aquel momento cuando toda la varilla resulte no deformada y todas sus partículas adquieran la velocidad v dirigida en sentido opuesto a la velocidad de la varilla antes del choque. En dicho momento, el extremo derecho de la varilla se separará del obstáculo: la varilla no deformada rebota de la pared y se mueve en dirección inversa a la anterior velocidad en módulo (fig. 24.2 *d*). Con ello, la energía de la deformación elástica de la varilla se transforma de nuevo por completo en la energía cinética.

De lo expuesto se desprende que la duración τ del choque es igual al tiempo del paso del frente de onda de la deformación elástica por la varilla en una y otra dirección:

$$\tau = 2l/u, \qquad (2)$$

donde l es la longitud de la varilla.

Podemos determinar la velocidad del sonido u en la varilla del modo siguiente. Examinemos la varilla en el momento de tiempo t (fig. 24.2 *a*), cuando la onda de deformación se propaga a la izquierda. En este momento, la longitud de la parte deformada de la varilla es igual a ut. Con relación al estado no deformado esta parte se ha

acortado en la magnitud vt, igual a la distancia que, hacia ese momento, ha recorrido la parte aún no deformada de la varilla. Por esto, la deformación relativa de esta parte de ella es igual a v/u. Partiendo de la ley de Hooke

$$\frac{v}{u} = \frac{1}{E}\frac{F}{S}, \qquad (3)$$

donde S es el área de la sección transversal de la varilla; F, la fuerza que actúa sobre la varilla por parte de la pared; E, el módulo de Young. Ya que la deformación relativa v/u es igual en todos los momentos de tiempo durante los que la varilla se encuentra en contacto con el obstáculo, como se desprende de la fórmula (3), la fuerza F es constante. Con el fin de hallar esta fuerza apliquemos la ley de la conservación del impulso a la parte detenida de la varilla. Hasta el contacto con el obstáculo la parte considerada de la varilla tenía el impulso $\rho Sut \cdot v$, mientras que en el momento de tiempo t su impulso es igual a cero. Por ello,

$$\rho Sut \cdot v = Ft. \qquad (4)$$

Poniendo el valor de F de esta igualdad en (3), obtenemos

$$u = \sqrt{E/\rho}. \qquad (5)$$

Ahora, la expresión (2) para el tiempo τ del choque de la varilla con la pared toma la forma

$$\tau = 2l\sqrt{\rho/E}. \qquad (6)$$

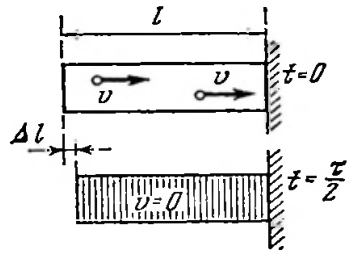


Fig. 24.3. Deformación de la varilla al chocar contra la pared

El tiempo del choque τ se puede hallar de otro modo, haciendo para ello uso de la ley de la conservación de la energía. Antes del choque la varilla no está deformada y toda su energía es la cinética del movimiento de traslación $mv^2/2$. Pasado el tiempo $\tau/2$ después del comienzo del choque, las velocidades de todas sus partículas se anulan, en tanto que toda la varilla resulta deformada (fig. 24.2 *b*). La longitud de la varilla disminuye en la magnitud Δl en comparación con su estado no deformado (fig. 24.3). En este momento toda la energía de la varilla es la de su deformación elástica. Esta energía se puede escribir en la forma $k(\Delta l)^2/2$, donde k es un coeficiente de proporcionalidad entre la fuerza y la deformación: $F = k\Delta l$. Empleando la ley de Hooke este coeficiente se expresa con el módulo de Young E y las dimensiones de la varilla:

$$k = ES/l. \qquad (7)$$

La deformación máxima Δl es igual a la distancia a la que se desplazan las partículas del extremo izquierdo de la varilla en el transcurso de $\tau/2$ (fig. 24.3). Como dichas partículas se movían a la velocidad

v, entonces

$$\Delta l = v\tau/2. \tag{8}$$

Igualemos la energía cinética de la varilla antes del choque y la energía potencial de la deformación. Teniendo en cuenta que la masa de la varilla $m = \rho Sl$ y haciendo uso de las relaciones (7) y (8), obtenemos

$$\frac{\rho Slv^2}{2} = \frac{ES}{2l}\left(v\frac{\tau}{2}\right)^2,$$

de donde otra vez obtenemos la fórmula (6) para τ. Por regla, este tiempo del choque es muy pequeño. P. ej., para una varilla de acero ($E = 2 \cdot 10^{11}$ Pa, $\rho = 7{,}8 \cdot 10^3$ kg/m^3) de 28 cm de longitud, con la fórmula (6) hallamos $\tau = 10^{-4}$ s.

La fuerza F que actúa sobre la pared durante el choque puede ser hallada poniendo la velocidad del sonido (5) en la fórmula (4):

$$F = Sv\sqrt{\rho E}. \tag{9}$$

Vemos que la fuerza que actúa sobre la pared es proporcional a la velocidad de la varilla antes del choque. Pero para que sea aplicable la solución aducida es preciso que la tensión mecánica de la varilla F/S no supere el límite de elasticidad del material de la varilla. P. ej., para el acero el límite de elasticidad

$$(F/S)_{\text{máx}} = 4 \cdot 10^8 \text{ Pa}.$$

Por esta razón, la velocidad máxima v de la varilla de acero con la que su colisión con el obstáculo aún se puede considerar elástica, de acuerdo con la fórmula (9), es igual a 10 m/s. Esto corresponde a la velocidad de la caída libre de un sólido desde una altura de tan sólo 5 m. Para comparar, indiquemos que la velocidad del sonido en el acero $u = 5000$ m/s, es decir, $v \ll u$.

El tiempo del choque de la varilla contra un obstáculo inmóvil (a diferencia de la fuerza) no depende de la velocidad de la varilla. No obstante, este resultado no es universal y está ligado con la forma específica del sólido que consideramos. P. ej., para una bola elástica el tiempo del choque con una pared depende de su velocidad. La consideración dinámica de este caso es mucho más complicada. Esto está relacionado con que tanto el área de contacto de la bola deformada con la pared, como la fuerza que actúa sobre la bola en el proceso del choque no quedan constantes. ▲

25. Choque de dos varillas. La solución del problema anterior se puede emplear asimismo para hallar la duración del choque longitudinal de dos varillas elásticas iguales.

△ P. ej., consideremos el caso en que una varilla en movimiento a la velocidad v choca contra otra inmóvil. En el sistema de referencia donde el centro de masas del sistema de varillas está inmóvil, ellas se mueven al encuentro a velocidades iguales en módulo $v/2$

(fig. 25.1). Al producirse el choque el centro común de masas de las varillas se encuentra en la sección donde ellas hacen contacto entre sí. Como dicho centro de masas está inmóvil, para cada una de las varillas el proceso del choque transcurre del mismo modo que si tuviese lugar el choque contra una pared inmóvil. La figura de la propagación de las ondas de la deformación elástica a lo largo de las varillas y de la propagación de las velocidades de las partículas de ellas se puede obtener en diversos momentos de tiempo si en la fig. 24.2, del problema anterior, dibujamos la parte derecha, que es su reflejo especular en el plano de la pared. Esto se muestra en la fig. 25.2. Vemos que en el sistema del centro de masas, después del choque, las varillas se moverán en sentidos opuestos a velocidades iguales en módulo $v/2$, con la particularidad de que en ellas no habrá deformaciones.

Fig. 25.1. Choque de dos varillas iguales en el sistema de referencia ligado con el centro de masas

Con el fin de obtener esa misma figura en el sistema de referencia del laboratorio, hay que adicionar a las velocidades de todas las

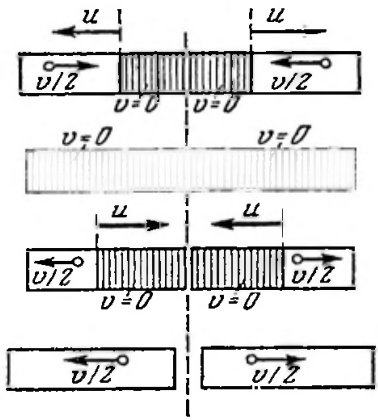


Fig. 25.2. Propagación de las ondas de deformación elástica y distribución de las velocidades de las partículas durante el choque de iguales varillas en el sistema de centro de masas

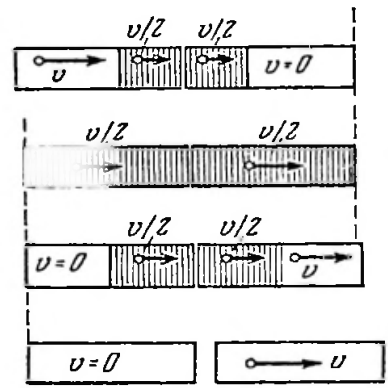


Fig. 25.3. Idem, en el sistema de referencia del laboratorio

partículas la velocidad del centro de masas $v/2$. Como resultado, para los mismos momentos de tiempo que en la fig. 25.2, se obtiene el cuadro representado en la fig. 25.3. Como en el caso del choque instantáneo la varilla que irrumpe se para, en tanto que la varilla inmóvil, antes del choque, se pone en movimiento a la velocidad v.

Algo más complicado es el caso del choque longitudinal de dos varillas de diferente longitud. Hacia el momento del rebote sólo la varilla más corta tiene tiempo para librarse por completo de la deformación. Como la segunda varilla comenzará el movimiento libre después del rebote estando aún parcialmente deformada, en adelante se producirán en ella oscilaciones elásticas longitudinales. Parte de la energía mecánica del sistema estará relacionada con dichas oscilaciones. Debido al rozamiento interno las oscilaciones se amortiguarán gradualmente y, como resultado, después del choque la energía mecánica total de las varillas será menor que antes de él. ¡Esto a pesar de que el choque fue perfectamente elástico!

Ahora, examinemos con mayor detalle el choque de las varillas de diferente largura. P. ej., sea que las varillas están fabricadas de un mismo material y tienen igual sección transversal, pero una de ellas es dos veces más larga que la otra.

Es más cómodo considerar el proceso de choque de dichas varillas en el sistema de referencia donde ellas están en movimiento a velocidades iguales en módulo y vuelan al encuentro una de otra (fig. 25.4).

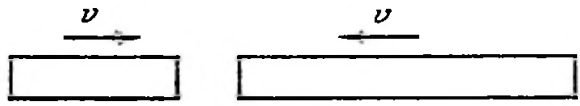


Fig. 25.4. Choque de varillas de distinta largura

Es fácil comprender que la etapa inicial del choque transcurrirá, en este caso, como al chocar entre sí varillas idénticas (fig. 25.5*a*). En efecto, en el momento cuando las caras de las varillas se ponen en contacto, en cada una de ellas comienza a propagarse la onda de la deformación elástica. Aquellos puntos de las varillas, hasta los que no ha llegado todavía el frente de la onda de deformación, nada «saben» de que el choque ha comenzado, y continúan moviéndose del mismo modo que antes de comenzar el choque. Por ello, la diferencia entre las larguras de las varillas comenzará a manifestarse sólo cuando la onda de compresión alcance el extremo de la varilla corta (fig. 25.5*b*). Con ello, la onda de compresión sólo podrá llegar en la varilla larga hasta su punto central.

A partir de este momento los procesos en las varillas serán diferentes. Como durante la propagación de las ondas elásticas sólo se encuentran en interacción los sectores vecinos del medio, en la varilla larga la onda de compresión continuará propagándose en la misma dirección, mientras que la varilla corta comenzará a retornar al estado no deformado (fig. 25.5*c*). Este proceso comienza en el extremo libre (izquierdo) de la varilla corta y, gradualmente, se aproxima al lugar de contacto entre las varillas. Todas las partículas en el sector de la

varilla corta que se libera de la deformación se desplazarán a la izquierda a igual velocidad v.

En el instante en que la onda de compresión alcanza el extremo libre (derecho) de la varilla larga, la corta está ya no deformada por completo (fig. 25.5*d*). Con ello, las velocidades de todos los puntos

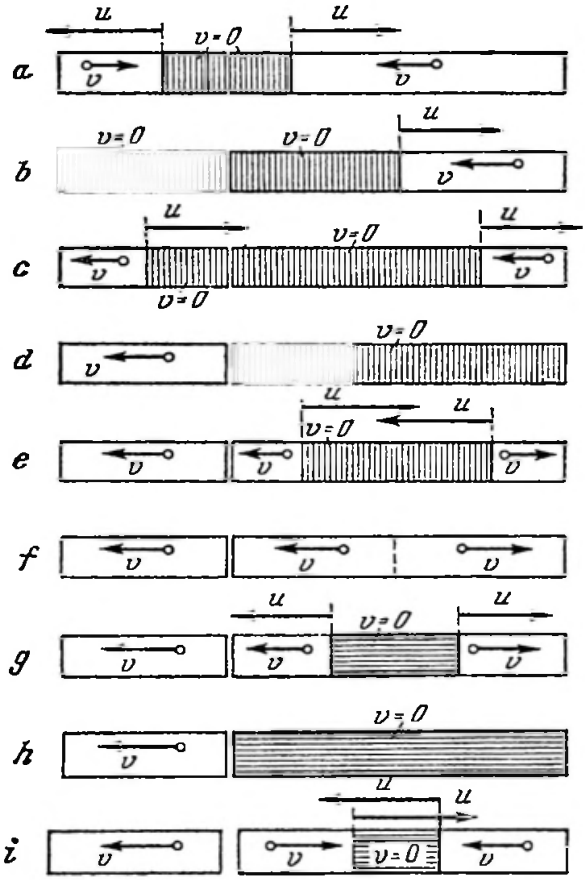


Fig. 25.5. Propagación de las ondas de deformación elástica y distribución de las velocidades de las partículas al chocar varillas de distinta largura. La compresión de las varillas se muestra con rayas verticales, mientras que la extensión, con horizontales. La variación de las larguras de las varillas durante la deformación no se muestra

de la varilla larga son iguales a cero, en tanto que las velocidades de todos los puntos de la varilla corta son iguales a v y están dirigidas a la izquierda. En este momento, finalizan todos los procesos elásticos en la varilla corta, mientras que en la larga empieza el proceso de re-

torno al estado no deformado. Este proceso se desarrolla desde ambos extremos de la varilla, ya que no hay interacción entre las varillas larga y corta que han quedado libres de la deformación. En los sectores libres de las deformaciones, junto a los extremos de la varilla larga, las partículas de ésta tienen velocidades v dirigidas de la forma que se muestra en la fig. 25.5 *e*. Las varillas están aún en contacto, pero ya no actúan entre sí. Las fuerzas de interacción entre las varillas no existen, en virtud de que los sectores de las varillas que permanecen en contacto ya no están deformados, pero las varillas no se desunen todavía ya que estos sectores de ellas tienen iguales velocidades. Con otras palabras, el choque entre las varillas acaba con esto, aunque ellas estarán aún cierto tiempo en contacto.

Así pues, cuando tiene lugar el choque, la duración de la interacción entre las varillas es igual a $2\ l/u$, donde l es la longitud de la varilla corta y u, la velocidad del sonido. También es fácil hallar el tiempo durante el que las varillas están en contacto. Con este fin consideremos los procesos ulteriores que transcurren en la varilla larga.

En el momento, cuando la varilla larga queda totalmente libre de la deformación, las velocidades de todas sus partículas a la izquierda del punto central de la varilla, estarán dirigidas a la izquierda, en tanto que las velocidades de todas las partículas de su mitad derecha, a la derecha (fig. 25.5*f*). Por esta causa, en los dos lados, a partir del punto central, comenzará a propagarse la onda de extensión (fig. 25.5*g*). En la parte extendida de la varilla, que en dicha figura está sombreada, las velocidades de las partículas de la varilla son iguales a cero, en tanto que fuera de esa parte siguen siendo iguales a v.

Cuando la onda de extensión alcanza los extremos de la varilla las velocidades de todas sus partículas se anulan (fig. 25.5*h*). Desde este momento la varilla corta deja de hacer contacto con el extremo izquierdo de la varilla larga. Así, pues, desde el momento cuando cesa la interacción entre las varillas hasta su separación pasa un intervalo más de tiempo igual a $2l/u$. Por ello, el tiempo total durante el que las varillas están en contacto es igual a $4\ l/u$.

A continuación, la varilla larga extendida comienza de nuevo a liberarse de la deformación (fig. 25.5 *i*), etc. Semejante alternación de las ondas de compresión y extensión puede considerarse como las oscilaciones longitudinales de la varilla, con las que, en el sistema de referencia elegido, su punto central permanece inmóvil. Antes del choque las varillas sólo tenían la energía cinética del movimiento de traslación. Después del choque la energía cinética de la varilla corta es la misma que antes del choque, ya que sólo varió el sentido de la velocidad de la varilla. Después del choque la energía cinética del movimiento de traslación de la varilla larga es igual a cero, ya que ella, como un todo, está en reposo. Esto significa que la energía

de las oscilaciones que surgen en la varilla es igual a su energía cinética inicial.

De este modo, el modelo del choque perfectamente elástico de puntos materiales, en el que se supone que la energía cinética de los cuerpos que chocan se conserva, resulta ser inaplicable en absoluto durante el choque de varillas elásticas de diferente largura. En efecto, considerando que las varillas son puntos materiales con masas m y $2m$ y aplicando a su choque las leyes de la conservación de la energía y del impulso, obtendríamos que, después del choque, el punto de masa m se desplazaría a la izquierda a la velocidad $5v/3$, en tanto que el punto de masa $2m$, a la derecha a la velocidad $v/3$. ▲

26. Choque de tres varillas. El ejemplo que hemos estudiado del choque de dos varillas, una de las cuales es dos veces más larga que la otra, nos permite revelar con facilidad cómo transcurre el choque de tres varillas iguales.

△ Vamos a suponer que la varilla larga en el ejemplo anterior está compuesta, en realidad, de dos varillas cortas iguales (*2* y *3*

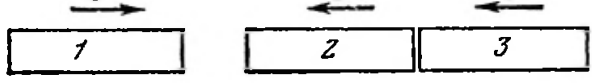


Fig. 26.1. Choque de tres varillas iguales

en la fig. 26.1). Ante todo, señalemos que mientras en la varilla larga sólo se propaga la onda de contracción (fig. 25.5 *a* — *f* del ejemplo anterior) el hecho de que ella consta de dos trozos aislados no desempeña ningún papel en los procesos que transcurren.

Claro está, que la interacción de las varillas *2* y *3* comienza en aquel momento cuando la onda de compresión, propagándose por la varilla *2*, alcanza su frontera con la varilla *3*. Esto se produce habiendo pasado el intervalo de tiempo l/u después del comienzo del choque entre las varillas *1* y *2*. Después de pasar otro intervalo de tiempo l/u cesa la interacción entre las varillas *1* y *2*, mientras que la correspondiente a las varillas *2* y *3* continúa. Estudiemos el momento cuando la varilla larga, liberándose de la compresión, queda no deformada. A este momento corresponde la fig. 25.5 *f* del ejemplo anterior. En ese momento las velocidades de todas las partículas de la varilla *2* están dirigidas a la izquierda, mientras que las de la *3*, a la derecha (fig. 26.2 *a*). Ya que estas varillas no están unidas entre sí no surge, como es lógico, ninguna onda de extensión: las varillas *2* y *3* se alejan la una de la otra. Con esto, las varillas *1* y *2* quedan entre sí en contacto, ya que se mueven a igual velocidad a la izquierda (fig. 26.2 *b*). La separación de las varillas *2* y *3* se produce pasado el intervalo de tiempo $2l/u$ después del comienzo de su interacción, es decir, trans-

currido el tiempo l/u después de haber cesado la interacción entre las varillas *1* y *2*.

De la comparación de las figs. 26.1 y 26.2 *b* se desprende que el resultado del choque se reduce a que las varillas *1* y *3* cambian los sentidos de sus velocidades por los opuestos, en tanto que la velocidad de la varilla media *2* queda invariable. Durante tal choque triple, la energía cinética del movimiento de traslación de las varillas queda constante. Después de acabar el choque de las varillas no se producen ningunas oscilaciones. Por ello, para el choque considerado

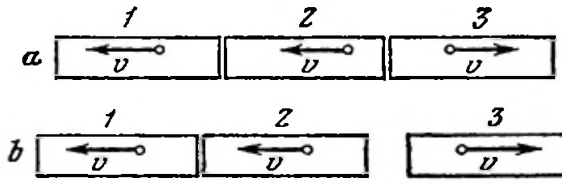


Fig. 26.2. Distribución de las velocidades de las partículas de las varillas después de que éstas se liberaron de las deformaciones

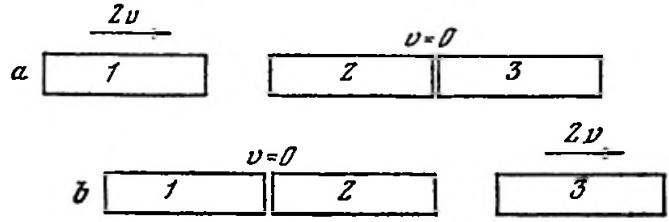


Fig. 26.3. La varilla *1* choca con las varillas *2* y *3* en reposo

es aplicable el modelo de dos choques perfectamente elásticos sucesivos: primero del primer sólido con el segundo y, a continuación, del segundo con el tercero.

Ahora, aclaremos qué aspecto tendrá este choque en el sistema de referencia en el que las varillas *2* y *3* en contacto están en reposo, mientras que la varilla *1* choca con ellas. Con el fin de pasar a semejante sistema de referencia es preciso adicionar a las velocidades de todos los sólidos una misma velocidad v dirigida a la derecha. Con ayuda de las figs. 26.1 y 26.2 *b* vemos que en dicho sistema de referencia la varilla *1* se movía antes del choque a la velocidad $2v$, en tanto que las varillas *2* y *3* estaban en reposo (fig. 26.3 *a*). Después del choque están en reposo las varillas *1* y *2*, mientras que la *3* está en movimiento a la derecha a la velocidad $2v$ (fig. 26.3 *b*).

El detallado análisis del choque de tres varillas iguales nos permite comprender el resultado del experimento con los rebotes de las

bolas elásticas suspendidas de hilos (fig. 23.2) que más arriba consideramos.

De los ejemplos que hemos examinado está claro que los choques de varios sólidos elásticos deben considerarse como una sucesión de choques aislados. Con el fin de aplicar a estos choques de sólidos elásticos el modelo del choque perfectamente elástico, hay que estar convencidos de que después de cesar los choques en los sólidos no se producen oscilaciones. ▲

27. Una bola elástica y la pared. En el problema 24 ya señalamos que el choque de una bola contra una pared indeformable transcurre no del mismo modo que el choque de una varilla con la pared. La causa principal de esta diferencia consiste en que durante el proceso del choque el área de la región de contacto de la bola con la pared no es constante.

Dicha diferencia se manifiesta incluso en el caso estático, cuando un sólido elástico se aprieta contra la pared indeformable con una fuerza externa constante. La deformación de una varilla, cuya sección transversal es igual en toda su longitud, será en tal caso homogénea y la energía potencial de la deformación elástica estará uniformemente distribuida por todo el volumen de la varilla.

Con la deformación estática de la bola presionada contra la pared, el carácter de la distribución de la deformación es otro por completo. La deformación del material de la bola ya no será homogénea. Los sectores de la bola junto a la pared sufren la mayor deformación. Mientras mayor sea la distancia hasta la pared menor será la deformación. Con ello, resulta que la deformación penetra con eficacia en la bola a una profundidad relativamente pequeña y sólo abarca cierta parte de la bola, cuyo volumen es pequeño en comparación con el volumen total de la bola. La energía potencial de la deformación estará concentrada en una pequeña región de la bola que hace contacto directo con la pared.

Podremos comprender este carácter de la deformación de la bola y la distribución de la energía potencial por todo su volumen, al considerar la compresión de dos resortes de diferente rigidez, consecutivamente unidos (fig. 27.1). Supongamos que la rigidez del primer resorte es igual a k_1, del segundo, k_2. Los resortes se comprimen con la fuerza F, que es igual en cualquier sección en caso de la unión consecutiva de los resortes. Las deformaciones de los resortes x_1 y x_2 están ligadas con la fuerza F y los coeficientes k_1 y k_2 con las relaciones ordinarias

$$F = k_1 x_1, \quad F = k_2 x_2. \tag{1}$$

Las energías potenciales de los resortes deformados son proporcionales a los cuadrados de sus deformaciones:

$$W_1 = \frac{k_1 x_1^2}{2}, \quad W_2 = \frac{k_2 x_2^2}{2}. \tag{2}$$

De las relaciones (1) se deduce que las deformaciones de los muelles son inversamente proporcionales a sus rigideces. Por ello, para la razón de las energías W_1 y W_2 hallamos con ayuda de (2)

$$W_1/W_2 = k_2/k_1. \tag{3}$$

Vemos que en caso de la unión consecutiva de los resortes la energía acumulada por cada uno de ellos es inversamente proporcional a su rigidez: cuanto más blando sea el resorte, tanta mayor parte de la energía de la deformación de los muelles estará concentrada en él.

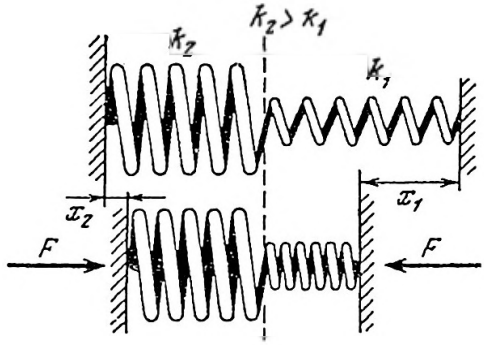


Fig. 27.1. Resortes de diferente rigidez

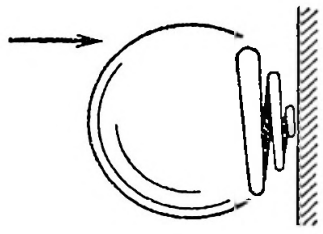


Fig. 27.2. Modelo cualitativo del choque de la bola contra la pared

En el caso límite, cuando la rigidez de uno de los resortes tiende al infinito (es decir, él puede ser considerado perfectamente rígido, como un sólido indeformable), toda la energía potencial estará concentrada en el otro resorte.

Podemos representar el proceso del choque de la bola con la pared indeformable del modo siguiente. Primero la bola hace contacto con la pared en un punto, a continuación, a medida que la bola se deforma, la región de contacto aumenta. Esto significa que la parte de la bola que sufre la deformación se puede considerar desde el punto de vista cualitativo como un resorte elástico, cuya rigidez crece con el aumento de la compresión. Esto se muestra convencionalmente en la fig. 27.2. En lo fundamental la energía de la deformación estará concentrada en aquella parte del resorte que tiene la menor rigidez y sufre la mayor deformación, es decir, en la pequeña parte de la bola que tiene contacto directo con la pared.

El cuadro cualitativo de la deformación de la bola, descrito más arriba, significa que al estudiar el choque las propiedades elásticas de la bola pueden considerarse concentradas en la proximidad del punto de contacto (en el muelle, fig. 27.2). Como la masa de esta parte deformada es pequeña en comparación con la de toda la bola, es posible considerar que su deformación es casiestática (como en un resorte exento de masa), mientras que las propiedades inerciales de

la bola se pueden examinar considerando que toda la masa de la bola está concentrada en su centro. A diferencia de la varilla elástica, para lo que era preciso considerar que las propiedades elásticas e inerciales estaban distribuidas uniformemente por todo el volumen, podemos examinar la bola elástica con alta precisión como una masa puntual fijada en un resorte imponderable de rigidez variable.

Con ayuda de este modelo se pone en evidencia que la duración del choque de la bola contra la pared depende de la velocidad de la bola antes del choque. Cuando la velocidad es pequeña, la deformación también lo es y sólo afecta el sector del «resorte» de pequeña rigidez. El período de las oscilaciones de una bola maciza sobre semejante resorte es grande, por lo tanto el tiempo del choque también lo será. Mientras más grande es esta velocidad, mayor número de sectores rígidos del «resorte» se ponen a trabajar y tanto menor resulta ser el tiempo del choque.

Como vemos, durante el choque de la bola contra la pared la duración queda determinada por procesos en absoluto diferentes que aquellos que se observan al chocar la varilla contra la pared. Allí la duración se determinaba con el tiempo de paso del sonido a lo largo de la varilla, mientras que aquí ella está ligada con el período de las oscilaciones de la bola sobre el resorte de rigidez variable, con la particularidad de que dicha rigidez es pequeña a velocidades pequeñas. Por esta razón, la duración del choque es considerablemente mayor para la bola que para la varilla del mismo material y de una largura igual al diámetro de la bola.

Para simplificar, en todos nuestros razonamientos hemos considerado la pared indeformable. Es fácil comprender que todas las conclusiones cualitativas siguen siendo ciertas cuando la pared está hecha de un material elástico, cuyas propiedades son próximas a las del material de la bola. La diferencia en la forma de la superficie de la bola y la pared junto al punto de contacto conduce a que a una velocidad no muy grande de la bola sólo se deforma ésta, mientras que la superficie de la pared queda prácticamente, plana. La deformación de la pared sólo será considerable en el caso cuando la rigidez del material de la pared (módulo de Young) es considerablemente menor que la de la bola.

Ahora, podemos retornar al problema 23 del choque de una bola contra una cuña que yace sobre una superficie horizontal y analizar el problema de cuál de las soluciones allí consideradas es preferente. Es evidente que una solución única no puede haber: todo depende de tales propiedades de los sólidos que participan en el choque acerca de las cuales nada se dice en el planteamiento del problema.

Si la duración del choque de la bola con la cuña supera en mucho el tiempo de propagación de la onda de la deformación elástica por la cuña, podemos considerar que el efecto de la bola sobre la cuña será casiostático, como si sobre la cara oblicua de la cuña actuara

una fuerza constante. En tal caso, es correcta la representación acerca de un choque, es decir, del choque de la bola contra un sistema compuesto de la cuña y la superficie sobre la que ella yace. Por consiguiente, es correcta la primera solución del problema. P. ej., así sucederá cuando la rigidez del material de la cuña es mayor o del mismo orden que el de la bola y sus dimensiones son comparables entre sí.

Pero si la rigidez del material de la cuña es mucho menor que la rigidez de la bola, puede suceder que el tiempo de propagación de la onda de deformación por la cuña será mayor que la duración del choque de la bola contra la cuña. En semejante caso, estará más cerca de la realidad la representación acerca de la sucesión de dos choques, es decir, de la bola contra la cuña y de ésta contra el soporte. No obstante, debemos recordar que, en tal caso, parte de la energía cinética de la bola puede transformarse en la energía de las oscilaciones elásticas de la cuña. ▲

28. **Balón de fútbol.** ¿Cuánto tiempo dura el choque de un balón de fútbol contra una pared? ¿Con qué fuerza presiona el balón contra la pared?

△ Para simplificar, vamos a suponer que el balón vuela en dirección perpendicular a la pared. Al chocar contra la pared el balón se deforma. Cuando la velocidad del balón no es muy grande, las deformaciones son pequeñas y podemos considerar que la parte de la superficie del balón que no hace contacto con la pared sigue siendo esférica, mientras que el lugar de contacto, como se muestra en la fig. 28.1, toma la forma plana.

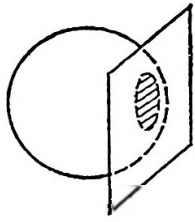


Fig. 28.1. Deformación del balón al chocar contra la pared

¿Qué fuerzas actúan sobre el balón durante el choque? Las fuerzas de la presión atmosférica, que actuaban sobre el balón antes del choque, se equilibraban entre sí. En el proceso del choque esto ya no es así. En efecto, primero el balón hace contacto con la pared en un punto; a continuación, desde ese punto la región de contacto se extiende formando un círculo. Con esto, el aire de la holgura se expulsa al exterior. Como resultado, aparece una fuerza no compensada de la presión del aire atmosférico, dirigida hacia la pared e igual al producto de la presión atmosférica p_0 por el área de la región de contacto S (fig. 28.2).

La presión del aire p en el interior del balón durante el choque se puede considerar igual en todos los puntos, lo mismo que en caso de la deformación estática. Por esto, el aire dentro del balón presiona sobre la parte de la cubierta que hace contacto con la pared con una fuerza igual a pS. Con una fuerza igual en módulo, pero de sentido opuesto, actúa la pared sobre esta parte de la cubierta del balón.

Así pues, la fuerza total que actúa sobre el balón, al producirse el choque, está dirigida desde la pared y es igual a $(p - p_0) S$. Con ayuda de la fig. 28.3 es fácil hallar el área S de la región de contacto del balón con la pared. Designemos el radio del balón por R, el ra-

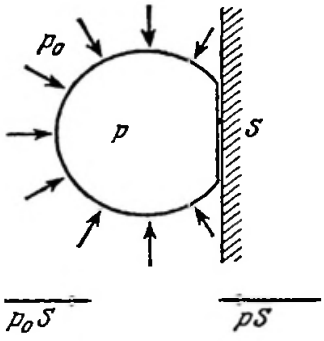


Fig. 28.2. Para hallar las fuerzas que actúan sobre el balón durante el choque

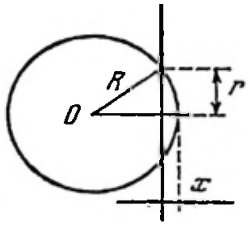


Fig. 28.3. Para determinar la dimensión de la región de contacto del balón con la pared

dio del círculo correspondiente a la región de contacto con la pared, por r, la deformación del balón por x. Entonces, de acuerdo con el teorema de Pitágoras

$$r = \sqrt{R^2 - (R - x)^2} = \sqrt{2Rx - x^2}. \qquad (1)$$

Por ello, el área de la región de contacto

$$S = \pi r^2 = 2\pi Rx\,(1 - x/2R). \qquad (2)$$

¿Será necesario tomar en consideración la variación de la presión del aire en el balón durante su deformación? La disminución relativa del volumen del balón $\Delta V/V$ es una magnitud del orden de $(x/R)^2$. Por esta razón, si considerando pequeña la deformación del balón x en comparación con su radio R ($x \ll R$), al calcular el área S excluimos el sumando $x/2R$, pequeño en comparación con la unidad, en mayor grado, es necesario despreciar la variación de la presión proporcional a $(x/R)^2$.

Así pues, la fuerza total F que actúa sobre el balón durante el choque es proporcional a la deformación x del balón:

$$F = (p - p_0) S = 2\pi R\,(p - p_0)\,x = kx. \qquad (3)$$

El movimiento del centro del balón al actuar semejante fuerza debe ser una oscilación armónica de una frecuencia que se determina con la relación

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{2\pi R\,(p - p_0)}{m}, \qquad (4)$$

donde m es la masa del balón. Como al producirse el choque contra la pared la deformación del balón sólo puede ser de tipo compresión, que después no cambia por su extensión (ya que el balón simplemente rebota de la pared), dicha «oscilación» continúa sólo en el transcurso de la mitad del período T. De modo que la duración del choque del balón contra la pared

$$\tau = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{\pi m}{2R(p - p_0)}}. \qquad (5)$$

El tiempo del choque del balón contra la pared es tanto menor, cuanto mayor sea la presión del aire p en el interior del balón, pero no depende de la velocidad v_0 de éste antes del choque. Se sobreentiende que la fuerza máxima, con la que el balón actúa sobre la pared, depende de la velocidad del balón. En el momento de la mayor deformación del balón toda su energía cinética se convierte en la energía potencial de la deformación:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{kx_0^2}{2}. \qquad (6)$$

De aquí podemos hallar la deformación máxima del balón x_0:

$$x_0 = \sqrt{\frac{m}{k}}\, v_0 = \sqrt{\frac{m}{2\pi R(p - p_0)}}\, v_0, \qquad (7)$$

donde k se toma de la relación (4).

Aducimos estimaciones numéricas. Sea la masa del balón $m \approx$ $\approx 0{,}4$ kg, su radio $R \approx 0{,}15$ m, la presión del aire en el balón sobrepasa la atmosférica en una atmósfera: $p - p_0 = 1$ atm $= 1{,}013 \times$ $\times 10^5$ Pa. Poniendo estos datos en la fórmula (5), obtenemos $\tau \approx$ $\approx 6{,}4 \cdot 10^{-3}$ s. La duración del choque ha resultado ser menor que una centésima de segundo. Con el fin de estimar la deformación del balón durante el choque, hay que prefijar además su velocidad antes de él. Suponiendo que ésta es igual a unos 15 m/s, mediante la fórmula (7), hallamos que la deformación x_0 máxima es de unos 3 cm. El valor máximo de la fuerza que actúa sobre la pared al detenerse el balón, en correspondencia con la fórmula (3), es igual a 2800 N. ▲

29. Rebote de la superficie de la pared. ¿Bajo qué ángulo rebota el balón de fútbol de la superficie de la pared?

△ Es evidente que el problema es trivial si se considera que el choque es perfectamente elástico, en tanto que la pared y el balón, perfectamente lisos. Entonces, no hay rozamiento entre el balón y la superficie de la pared y el ángulo de reflexión β es igual al de incidencia α (fig. 29.1).

Todo sucede de otra forma si el balón y la pared son rugosos, de modo que ya no se puede despreciar el rozamiento. No obstante,

incluso en tal caso, es fácil hallar el ángulo de reflexión (rebote) si se conoce el coeficiente de rozamiento μ del balón sobre la superficie de la pared.

Razonemos de la siguiente forma. Descompongamos en dos componentes el vector velocidad v del movimiento de traslación del balón antes del choque: $v_\perp$ dirigida perpendicularmente a la super-

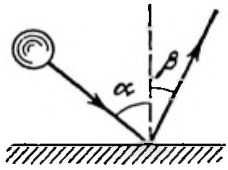


Fig. 29.1. Rebote del balón de la pared

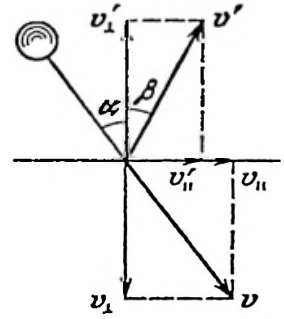


Fig. 29.2. Descomposición en las componentes de la velocidad del balón antes y después del choque

ficie de la pared y $v_\parallel$ dirigida a lo largo de la superficie (fig. 29.2). Designemos con $v'_\perp$ y $v'_\parallel$ las correspondientes velocidades del balón después del rebote. La componente perpendicular de la velocidad del balón cambia en sentido por el opuesto al chocar contra la pared, quedando invariable en módulo. En lo que ataña a la componente paralela, ésta, hablando en general, varía en módulo.

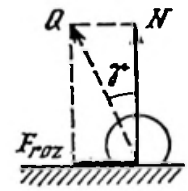


Fig. 29.3. Fuerzas que actúan sobre el balón durante el choque

Con el fin de cerciorarnos de esto, analicemos las fuerzas que actúan sobre el balón al chocar contra la pared por parte de ésta (fig. 29.3). La fuerza N, dirigida por la normal a la pared, es la fuerza de elasticidad que surge durante la deformación del balón. La deformación de un balón, que ha sido correctamente hinchado, se puede considerar elástica, ya que después del choque el balón restablece su forma. Por esta razón, la energía de la deformación elástica del balón después del choque, se transformará de nuevo en energía cinética.

Con otras palabras, la parte de la energía cinética del balón, relacionada con su movimiento por la normal a la pared, queda invariable.

La variación de la componente de la velocidad, paralela a la superficie, se produce bajo el efecto de la fuerza de rozamiento. Esta

fuerza está dirigida en sentido opuesto a las velocidades de los puntos de la superficie del balón en el lugar de contacto con la pared. Si antes del choque el balón no giraba, las velocidades de dichos puntos son iguales a $v_{||}$ y el efecto de la fuerza de rozamiento conduce a la disminución del módulo de $v_{||}$. Esto significa que el ángulo de reflexión β es menor que el ángulo de incidencia α. Precisamente este caso se ofrece en las figs. 29.1 y 29.2. La fuerza de rozamiento también puede aumentar el valor de $v_{||}$ si antes del choque contra la pared el

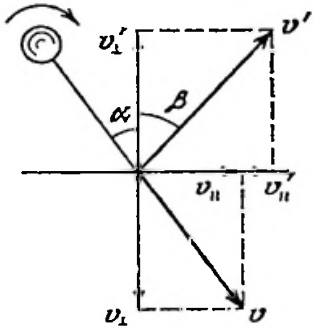


Fig. 29.4. Velocidad del balón antes y después del choque al girar el balón que choca en sentido horario

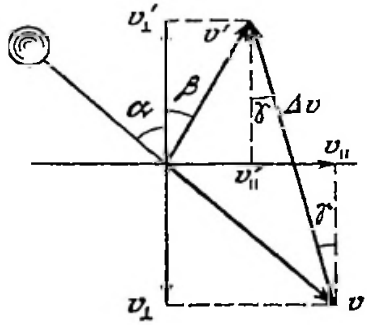


Fig. 29.5. Para el cálculo del ángulo de reflexión β

balón giraba en el sentido indicado en la fig. 29.4. Con una rotación suficientemente rápida del balón ($\omega R > v_{||}$), los puntos de éste que hacen contacto con la pared tienen velocidades dirigidas a la izquierda, la fuerza de rozamiento está dirigida a la direcha y el valor de $v_{||}$ crece. En semejante caso, el ángulo de reflexión es mayor que el de incidencia.

Analicemos con detalle el caso cuando antes del choque el balón no gira. También vamos a considerar que las velocidades de los puntos del balón que hacen contacto con la pared no se anulan: en el transcurso del choque el deslizamiento no cesa. La fuerza N (fig. 29.3) surge en el momento cuando el balón hace contacto con la pared, a continuación crece y alcanza su máximo valor en el momento de la mayor deformación del balón y, después, decrece hasta cero. La fuerza de rozamiento de deslizamiento F_{roz} no permanece invariable en el transcurso del choque. En cualquier momento de tiempo los módulos de las fuerzas F_{roz} y N están ligados entre sí mediante la ley de Coulomb—Amontons:

$$F_{roz} = \mu N. \qquad (1)$$

Por esto, durante todo el choque la fuerza total Q, con la que la superficie de la pared actúa sobre el balón, varía en módulo, quedando invariable en sentido, formando el ángulo γ con la normal a la pared.

Como se desprende de la fig. 29.3 $\operatorname{tg} \gamma = \mu$. Esto permite hallar el ángulo de reflexión β del balón.

De acuerdo con la segunda ley de Newton, al producirse el choque contra la pared, la dirección de la variación del impulso del balón Δp coincide con la de la fuerza Q. Con ayuda de la fig. 29.2 construimos el vector de la variación del impulso $\Delta p = m(v' - v)$ (fig. 29.5). Este vector lo mismo que el vector Q en la fig. 29.3, forma el ángulo γ con la normal a la pared. Directamente de la fig. 29.5 se desprende que

$$v'_{\parallel} = v_{\parallel} - 2v_{\perp} \operatorname{tg} \gamma. \qquad (2)$$

Dividiendo ambos miembros de esta igualdad entre $v_{\perp}$ y teniendo en cuenta que $v_{\parallel}/v_{\perp} = \operatorname{tg} \alpha$, $v'_{\parallel}/v'_{\perp} = \operatorname{tg} \beta$, mientras que $\operatorname{tg} \gamma = \mu$, obtenemos

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha - 2\mu. \qquad (3)$$

De la fórmula obtenida se deduce que con pequeños ángulos de incidencia, cuando $\operatorname{tg} \alpha < 2\mu$, el resultado pierde su sentido. ¿A qué se debe esto? La fórmula (3) ha sido deducida suponiendo que el deslizamiento del balón no cesó en el transcurso de todo el tiempo de su contacto con la pared. Sin embargo, siendo pequeños los ángulos de incidencia, el deslizamiento del balón puede cesar antes de que él se separe de la pared. Esto está relacionado con que la fuerza de rozamiento de deslizamiento, dirigida en sentido inverso a $v_{\parallel}$, no sólo frena el movimiento de traslación del balón, sino también provoca su rotación en sentido horario, ya que el punto de aplicación de la fuerza de rozamiento no coincide con el centro del balón. El deslizamiento cesa en el momento cuando la velocidad del punto inferior del balón, ligada con la rotación, se iguala en módulo con la componente de la velocidad del centro del balón que es paralela a la superficie.

El caso cuando en el proceso del choque contra la pared el deslizamiento del balón cesa, es más complicado para la investigación, ya que requiere la aplicación de la ecuación que describe el movimiento de rotación. Con esto, resulta que la solución que ofrece la fórmula (3) se vuelve inaplicable incluso con tal ángulo de incidencia α cuya tangente es algo mayor que 2μ. El cálculo de precisión proporciona para el ángulo límite de incidencia $\operatorname{tg} \alpha = 5\mu$.

El balón que rebota de la pared rugosa obligatoriamente girará, incluso si antes del choque él no giraba. La energía cinética de esta rotación surge a cuenta de la disminución de la energía cinética del movimiento de traslación. Durante el choque cierta parte de la energía mecánica del balón se transforma en calor.

Es fácil comprender que el valor del ángulo de reflexión β, que proporciona la fórmula (3), es cierto cuando antes del choque el balón giraba en sentido antihorario. Tampoco es difícil hallar el ángulo de reflexión cuando antes del choque el balón giraba en sentido

horario. Si esta rotación es suficientemente rápida, de modo que el deslizamiento del balón no cesa en el transcurso del choque, razonando del mismo modo que al deducir la expresión (3), hallamos

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha + 2\mu. \qquad (4)$$

En este caso, la energía cinética del movimiento de traslación del balón aumentará como resultado del choque contra la pared. Este aumento, lo mismo que el desprendimiento de calor con el choque, se produce a cuenta de la energía cinética de la rotación. ▲

III. ESTÁTICA

La estática estudia el equilibrio de los cuerpos. En un sistema inercial de referencia un sólido se halla en equilibrio si la suma vectorial de todas las fuerzas que sobre él actúan y la suma vectorial de los momentos de estas fuerzas son iguales a cero. Cuando se verifica la primera condición la aceleración del centro de masas del sólido es nula. Cuando se verifica la segunda condición no existe la aceleración angular de la rotación. Por esta razón, si el sólido estaba en reposo en el momento inicial, más adelante él continuará en ese estado.

En todos los problemas de este capítulo se consideran sistemas comparativamente sencillos en los que todas las fuerzas en acción yacen en un mismo plano. En tal caso, la condición vectorial $\sum_i F_i = 0$ se reduce a dos escalares:

$$\sum_i F_{ix} = 0, \quad \sum_i F_{iy} = 0,$$

si disponemos los ejes x e y en el plano de acción de las fuerzas.

Para un sistema plano de fuerzas los momentos de todas ellas están dirigidos perpendicularmente al plano en que yacen las fuerzas (si los momentos se consideran respecto al punto que yace en ese mismo plano). Por ello, la condición vectorial para los momentos de las fuerzas se reduce a una escalar: en la posición de equilibrio la suma algebraica de los momentos de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo es igual a cero. (Con ello, los momentos que tienden a girar el cuerpo en sentido horario se toman con un signo, en sentido antihorario, con el contrario.) La elección del punto, con relación al que se consideran los momentos de las fuerzas, se efectúa partiendo exclusivamente de la comodidad: la ecuación de los momentos será tanto más sencilla, cuanto mayor número de fuerzas tengan los momentos iguales a cero. Recordemos que el módulo del momento de la fuerza F respecto al punto O es igual al producto del módulo de F por la distancia desde el punto O hasta la línea de acción de la fuerza.

El equilibrio puede ser estable, inestable e indiferente. El equilibrio es estable si con pequeños desplazamientos del sólido de la posición de equilibrio, las fuerzas que con ello surgen tienden a retornarlo a la indicada posición, e inestable si las fuerzas lo alejan de la posición de equilibrio. Pero, si con pequeños desplazamientos las fuerzas y sus momentos que actúan sobre el cuerpo, se equilibran como antes, el equilibrio es indiferente.

Al equilibrio estable corresponde el mínimo de energía potencial del sólido con relación a sus valores en las posiciones vecinas de éste. En ocasiones es idóneo hacer uso de esta propiedad al buscar la posición de equilibrio y al investigar el carácter de éste. En muchos problemas de estática, lo mismo que en otras partes de física, es con frecuencia efectivo el empleo de la ley de la conservación de la energía.

1. Escalera junto a la pared. Una escalera está apoyada contra una pared oblicua que forma con la vertical el ángulo β (fig. 1.1).

¿Con qué coeficiente de rozamiento de la escalera con la pared es posible el equilibrio, incluso, cuando el suelo es idealmente liso?

△ Ante todo, señalemos que la escalera apoyada contra una pared vertical no puede encontrarse en equilibrio si no hay rozamiento con

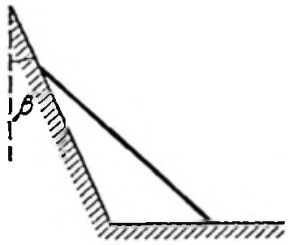


Fig. 1.1. La escalera junto a una pared oblicua

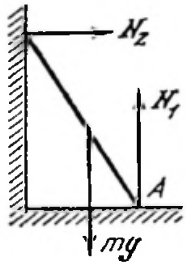


Fig. 1.2. En ausencia del rozamiento por el suelo semejante equilibrio es imposible

el suelo: ella se deslizará obligatoriamente por la pared. Además, si reflexionamos como es debido, es posible demostrar que, durante tal deslizamiento, el extremo superior de la escalera se separará obligatoriamente de la pared antes de que ella caiga al suelo.

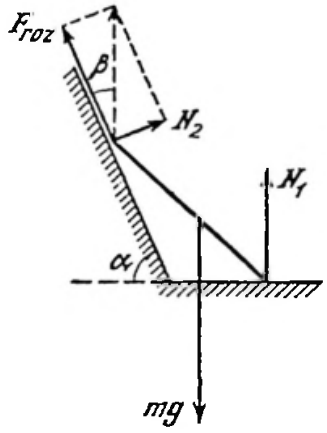


Fig. 1.3. En equilibrio la resultante de las fuerzas N_2 y F_{roz} está dirigida en sentido vertical

La imposibilidad del equilibrio junto a la pared vertical sobre el suelo liso se puede apreciar de inmediato si echamos una mirada a la fig. 1.2: la fuerza normal de la reacción de la pared N_2 debe ser sin falta diferente de cero, ya que de otro modo no estará equilibrado el momento de la fuerza de la gravedad mg con relación al punto A; pero la propia fuerza N_2 sólo puede ser equilibrada por la fuerza de rozamiento con el suelo, dirigida horizontalmente.

En lo que se refiere al equilibrio junto a una pared oblicua rugosa, éste es posible incluso sobre un suelo idealmente liso. No obstante, para ello el coeficiente de rozamiento de la escalera con la pared ha de ser bastante grande. Estudiemos la fig. 1.3. Como las fuerzas mg y N_1 están dirigidas en sentido vertical, en equilibrio las componentes horizontales de las fuerzas N_2 y F_{roz} deben ser iguales:

$$N_2 \cos \beta = F_{roz} \operatorname{sen} \beta. \qquad (1)$$

La fuerza de rozamiento en reposo F_{roz} es la máxima en el umbral de deslizamiento, cuando su valor es igual a μN_2. En este caso, de la fórmula (1) hallamos

$$\mu = \operatorname{ctg} \beta. \qquad (2)$$

La fórmula (2) proporciona el valor mínimo del coeficiente de rozamiento μ, para el que es posible el equilibrio junto a la pared oblicua con ángulo β, al no haber rozamiento con el suelo. En semejante caso parece como si la escalera se agarrara de la pared rugosa, aunque, claro está, con el otro extremo presiona contra el suelo.

Por cierto, ¿por qué decimos con tanta seguridad que la relación (2) es, precisamente, la condición de equilibrio? En realidad, no hemos aclarado todavía que en este caso estarán equilibradas, asimismo, las componentes verticales de todas las fuerzas que actúan. Reflexionen sobre esto por su cuenta. A fin de cuentas, todo se explica porque en la condición (1) no entra ninguna otra fuerza salvo N_2 y F_{roz}.

Prestemos atención al hecho de que la condición de equilibrio de la escalera no depende ni en cuánto la propia escalera está inclinada, ni de en qué lugar está aplicada la fuerza de la gravedad mg y de cuál es su valor. Esto significa que la escalera también estará en equilibrio cuando sobre ella se halla una persona en cualquier lugar.

Y lo último, como es fácil ver, la condición (2) coincide con la bien conocida condición de equilibrio de un cuerpo sobre un plano inclinado. La pared inclinada al ángulo β puede considerarse como un plano que forma un ángulo $\alpha = \pi/2 - \beta$ con el horizonte y la condición (2) se escribe en la forma $\mu = \operatorname{tg} \alpha$. ¿Qué les parece, esto es una simple coincidencia o bien en esto hay un sentido físico determinado? ▲

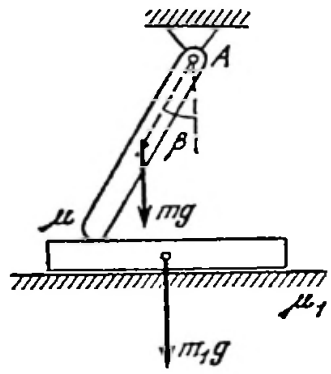


Fig. 2.1. La pesada viga está fijada articuladamente en el punto A

2. Acuñamiento. Miren la fig. 2.1. La pesada viga que se apoya sobre la tabla puede girar alrededor del eje horizontal en la articulación A. ¿Qué fuerza horizontal hay que aplicar en la tabla para sacarla a la izquierda y a la derecha? Todas las magnitudes, indicadas en la fig. 2.1, son conocidas.

△ Ante todo analicemos las fuerzas que actúan.

Sobre la viga actúa la fuerza de la gravedad mg, la fuerza normal de la reacción de la tabla N, la fuerza de rozamiento por parte de la tabla F, dirigida en el sentido del movimiento de ésta, y la fuerza de

la reacción de la articulación. La dirección de esta última fuerza no es conocida de antemano, pero ella no será necesaria, ya que vamos a considerar los momentos de las fuerzas que actúan sobre la viga con relación al eje de rotación. Entonces, la condición de equilibrio de los momentos de las fuerzas que actúan sobre la viga tiene la forma

$$\frac{mg}{2} \operatorname{sen} \beta - N \operatorname{sen} \beta \pm F \cos \beta = 0. \qquad (1)$$

El signo más corresponde al movimiento de la tabla a la izquierda (fig. 2.2 *a*), el signo menos, al movimiento a la derecha (fig. 2.2 *b*). Las fuerzas que actúan sobre la tabla están representadas en la fig. 2.2,

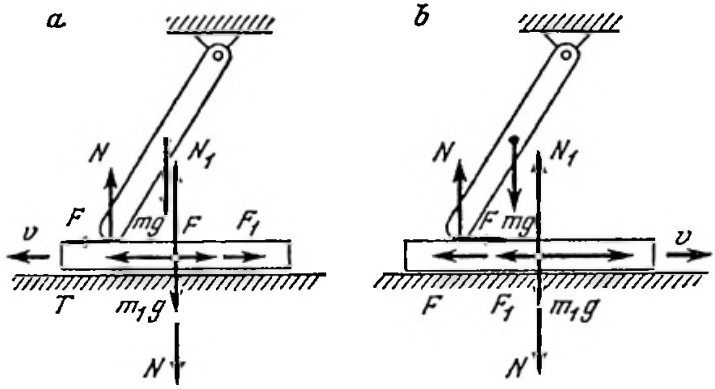


Fig. 2.2. Fuerzas que actúan durante el movimiento de la tabla a la izquierda (*a*) y a la derecha (*b*)

donde $m_1 g$ es la fuerza de la gravedad; F_1, la fuerza del rozamiento de la tabla con el suelo; T, la fuerza externa con la que tiramos de la tabla (esta fuerza será la menor si la tabla está en movimiento uniforme). De acuerdo con la segunda ley de Newton tenemos

$$T - F - F_1 = 0, \qquad (2)$$

$$N_1 - m_1 g - N = 0. \qquad (3)$$

La forma de las ecuaciones (2) y (3) no depende de la dirección de movimiento de la tabla.

Partiendo de la ley de Coulomb — Amontons

$$F = \mu N, \quad F_1 = \mu_1 N_1. \qquad (4)$$

Con ayuda de la primera relación que figura en (4) y de la ecuación (1), determinamos F y N. Ahora, vemos con claridad por qué era posible limitarse sólo con la ecuación de los momentos de las fuerzas que actúan sobre la viga: en correspondencia con el planteamiento del problema, sólo nos interesa el movimiento de la tabla, mientras

que su interacción con la viga se describe con dos fuerzas F y N, que pueden ser determinadas empleando las relaciones escritas. Así pues,

$$N = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\beta \pm \mu\cos\beta}\,\frac{mg}{2}.$$

Con el fin de hallar la fuerza T, en la ecuación (2) hay que poner en lugar de F y F_1 sus valores tomados de la expresión (4). Con ello, N_1 se expresa de la relación (3) mediante la fuerza N, ya conocida. Después de hacer todo lo dicho, obtenemos

$$T = \mu_1 m_1 g + \frac{\mu_1 + \mu}{1 \pm \mu\operatorname{ctg}\beta}\,\frac{mg}{2}. \qquad (5)$$

Recordemos que el signo más corresponde al movimiento de la tabla a la izquierda, el signo menos, a la derecha. Sin embargo, el segundo caso, es decir el movimiento a la derecha, requiere una investigación adicional, ya que si $\mu \operatorname{ctg}\beta = 1$ el denominador de la fracción se anula y por lo tanto, $T \to \infty$. ¿Qué pasará si $\mu \operatorname{ctg}\beta > 1$? Es fácil darse cuenta de que si $\mu \operatorname{ctg}\beta$ tiende a la unidad por parte de los menores valores, la fuerza T necesaria crecerá ilimitadamente y, cuando $\mu \operatorname{ctg}\beta = 1$, se producirá el acuñamiento. Es evidente en absoluto, que si ahora aumentamos μ o bien $\operatorname{ctg}\beta$ con el fin de que $\mu \operatorname{ctg}\beta$ sea mayor que la unidad, con mayor razón la tabla quedará en su lugar. Por esto, con el movimiento de la tabla a la derecha, la solución correcta tendrá la forma

$$T = \mu_1 m_1 g + \frac{\mu_1 + \mu}{1 - \mu\operatorname{ctg}\beta}\,\frac{mg}{2}, \quad \text{si} \quad \mu\operatorname{ctg}\beta < 1.$$

Cuando $\mu \operatorname{ctg}\beta \geqslant 1$ es imposible sacar la tabla hacia la derecha.

Probemos explicar de modo sencillo por qué razón se produce el acuñamiento en el segundo caso, es decir, el crecimiento ilimitado de la fuerza de rozamiento, cuando $\mu \operatorname{ctg}\beta$ tiende a la unidad por parte de los menores valores. Comparemos los valores de la fuerza T, necesaria para sacar la tabla, en los casos primero y segundo. Como se desprende de la fórmula (5), en el segundo caso hace falta una fuerza mayor. ¿Por qué? El momento de la fuerza de rozamiento con relación al eje, está dirigido, en este caso, de modo que conduce al aumento de la fuerza N y, en virtud de esto, al crecimiento de la propia fuerza de rozamiento F. Es como si ésta «se aumentara a sí misma».

Por regla, habiendo resuelto el problema, estamos seguros de que el experimento confirmará los resultados obtenidos, en caso extremo serán violadas algunas relaciones cuantitativas si en el proceso de la resolución tuvimos que despreciar algo. Pero si las aproximaciones aplicadas resultan ser demasiado rudas, el resultado del experimento puede diferenciarse cualitativamente de las predicciones. P. ej., en el presente problema hemos despreciado la posibilidad de la deformación de la viga y de la tabla y no tomamos en consideración la

dependencia del coeficiente de rozamiento de deslizamiento respecto de la velocidad, lo que puede ser de suma importancia en condiciones próximas al acuñamiento; en particular, la viga puede romperse antes del acuñamiento o bien comenzar a saltar.

No obstante, incluso tales problemas académicos son de interés a pesar de su carácter abstracto. A fin de cuentas, no podemos considerar de manera exhaustiva incluso los más sencillos fenómenos de la naturaleza: en todos los casos hay que simplificar algo. Lo importante es que el modelo simplificado elegido conserve los rasgos fundamentales del fenómeno.

El problema que analizamos nos ayuda a comprender mejor el funcionamiento de las zapatas de freno de los automóviles. En la fig. 2.3 se muestra la estructura de los frenos de las ruedas posteriores

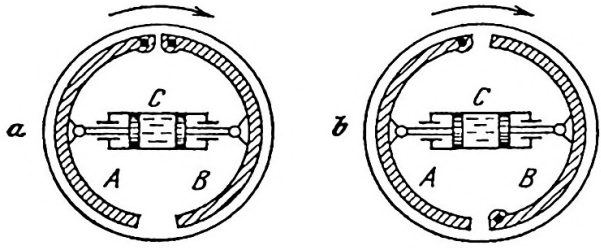


Fig. 2.3. Esquema de la estructura de los frenos de las ruedas posteriores (*a*) y delanteras (*b*) de un automóvil

(*a*) y anteriores (*b*). Al apretar contra el pedal de freno crece la presión en los cilindros de freno C y las zapatas A y B se oprimen contra las superficies internas del tambor de freno en rotación junto con la rueda. Es fácil de entender que la conducta de la zapata B en las ruedas posteriores es análogo al primer caso del problema considerado, la conducta de la zapata A, al segundo caso. La fuerza de rozamiento que actúa sobre el tambor de freno desde la zapata A es mayor que la que actúa desde la zapata B, aunque el esfuerzo externo de apriete es el mismo sobre ambas zapatas. La zapata A posee efecto de «autofrenado». El pequeño cambio realizado en la estructura del freno, mostrado en la fig. 2.3 *b*, conduce a que en él las dos zapatas poseen el efecto de autofrenado. Precisamente ésta es la estructura de los frenos de las ruedas anteriores. ¿Qué opinan Uds., por qué hay que frenar las ruedas anteriores con más fuerza que las posteriores? ▲

3. **Equilibrio en una copa.** Una varilla lisa y homogénea de longitud $2L$ se apoya en el borde de una copa semiesférica, lisa e inmóvil, de radio R (fig. 3.1). ¿Qué ángulo α forma la varilla con el horizonte en la posición de equilibrio? El rozamiento se desprecia.

△ Sobre la varilla actúan tres fuerzas: la fuerza de la gravedad mg, aplicada al punto medio de la varilla, y las fuerzas de la reacción

de la copa N_1 y N_2. Como no hay rozamiento, la fuerza N_1 que actúa sobre el extremo de la varilla, apoyado en la copa, y que está dirigida perpendicularmente a la superficie de la copa, es decir, por el radio; la fuerza N_2 está aplicada a la varilla por parte del borde de la copa y está dirigida en sentido perpendicular a la varilla (fig. 3.2). Intenten explicar por su cuenta por qué esto es así.

Si la varilla se encuentra en la posición de equilibrio, las líneas por las que actúan esas tres fuerzas se cortan en un mismo punto (punto A). En efecto, consideremos el punto de intersección de las

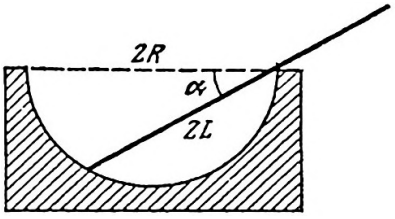


Fig. 3.1. La varilla se encuentra en una copa lisa semiesférica

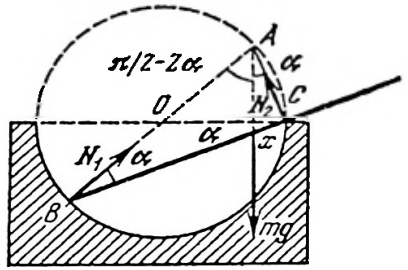


Fig. 3.2. Fuerzas que actúan sobre la varilla en la posición de equilibrio

líneas de acción de cualesquiera dos fuerzas, p. ej., N_1 y N_2, y confeccionemos la condición de igualdad a cero de la suma de los momentos de todas las fuerzas con relación al mencionado punto. Los momentos de las fuerzas N_1 y N_2 respecto del punto de intersección de sus direcciones son iguales a cero, por ello, el momento de la tercera fuerza mg también debe ser nulo, es decir, la línea de acción de la fuerza mg pasa por ese mismo punto. Este hecho es suficiente para hallar la posición de equilibrio de la varilla. Partiendo de consideraciones geométricas elementales, es fácil hallar todos los ángulos indicados en la fig. 3.2.

Ahora, podemos componer la ecuación para alguna de las funciones trigonométricas del ángulo α buscado. Hallando mediante el triángulo rectángulo ABC la cuerda $BC = 2R \cos \alpha$ y, tomando en consideración que el punto de aplicación de la fuerza de la gravedad yace en el punto medio de la varilla, obtenemos

$$x = 2R \cos \alpha - L. \tag{1}$$

A continuación, suponiendo que el radio OC es la suma de dos segmentos en que él está dividido por la línea de acción de la fuerza de la gravedad mg, hallamos

$$R = R \operatorname{sen} (\pi/2 - 2\alpha) + x \cos \alpha. \tag{2}$$

Poniendo (1) en (2), después de sencillas transformaciones, obtenemos la ecuación cuadrática para $\cos \alpha$:

$$4R \cos^2 \alpha - L \cos \alpha - 2R = 0. \quad (3)$$

Como el ángulo α se encuentra en el primer cuarto, sólo tiene sentido físico una raíz de la ecuación (3), ya que la segunda raíz es negativa:

$$\cos \alpha = (L + \sqrt{L^2 + 32R^2})/8R. \quad (4)$$

Como $\cos \alpha$ no sobrepasa de la unidad,

$$L + \sqrt{L^2 + 32R^2} \leqslant 8R, \text{ de donde } L \leqslant 2R.$$

El sentido de esta condición es evidente: si la largura de la varilla $2L$ sobrepasa el radio doble de la copa, el centro de gravedad de la varilla sale tras el borde de la copa y ella se cae de ésta. Si $L = 2R$ la varilla se dispone en posición horizontal ($\alpha = 0$) y se apoya en la copa en un sólo punto C.

Si la varilla es demasiado corta, ella se deslizará al interior de la copa. Hallemos la largura mínima de la varilla con la que es aún posible el equilibrio descrito en el planteamiento, es decir, la varilla se apoya todavía en el borde de la copa con su extremo derecho ($x = L$):

$$2R \cos \alpha_1 = 2L. \quad (5)$$

El ángulo límite α_1 con el que la varilla aún no se desliza al interior de la copa debe satisfacer, además de (5), la condición de equilibrio (4). Poniendo (4) en (5), hallamos para la largura mínima de la varilla:

$$L = R\sqrt{2/3}.$$

El ángulo α_1, que corresponde a esta longitud mínima de la varilla, satisface la condición

$$\cos \alpha_1 = \sqrt{2/3}.$$

Así pues, si la largura de la varilla satisface la condición

$$R\sqrt{2/3} < L < 2R,$$

el equilibrio es posible y el ángulo α se determina durante el equilibrio con la fórmula (4). Con ayuda de investigaciones más detalladas es posible mostrar que dicho equilibrio es estable si, como es lógico, la varilla no se apoya precisamente con su extremo en el punto C.

Es fácil comprender que si la varilla es más corta que el diámetro de la copa ($L < R$), existe otra posición de equilibrio estable, cuando la varilla yace horizontalmente en el interior de la copa. ▲

4. Péndulo con rozamiento. En el extremo inferior de una ligera varilla de longitud l está fijada una pesa de masa m, en tanto que en el extremo superior, un ligero casquillo cilíndrico con radio interno R. El casquillo está asentado con holgura sobre un eje redondo inmóvil horizontal (fig. 4.1). ¿Con qué valores del ángulo de desviación φ de la vertical, este péndulo puede estar en equilibrio si el coeficiente de rozamiento entre la superficie interior del casquillo y el eje es igual a μ?

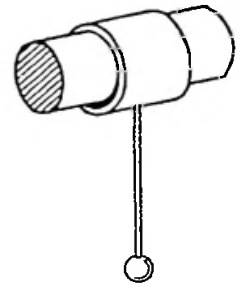


Fig. 4.1. El casquillo del péndulo está asentado sobre un eje inmóvil

△ Es del todo evidente que al no haber rozamiento entre el eje y el casquillo, el péndulo sólo puede estar en equilibrio en posición vertical. Pero he aquí que cuando hay rozamiento en el eje, el equilibrio del péndulo es posible en cualquier posición desviada de la vertical dentro de los límites de cierto pequeño sector llamado campo de estancamiento.

Consideremos de qué modo las fuerzas que actúan sobre el péndulo pueden asegurar su equilibrio en la posición desviada de la vertical. Sobre el péndulo sólo actúan tres fuerzas: sobre la pesa fijada en el extremo inferior actúa la fuerza de la gravedad mg, mientras que sobre el casquillo actúan por parte del eje, en el punto donde hacen contacto, la fuerza normal de la reacción del eje N, dirigida por el radio, y la fuerza de rozamiento F_{roz}, dirigida por la tangente (fig. 4.2). Está suficientemente claro que el punto A, donde hacen contacto entre sí el eje y el casquillo, está desplazado de la posición superior en el mismo sentido hacia el que está desviado el péndulo, pero su posición exacta no es conocida de antemano. Con el fin de representar de modo correcto en el dibujo las fuerzas N y F_{roz}, hay que imaginarse dónde se encuentra, precisamente, el punto de contacto del casquillo con el eje.

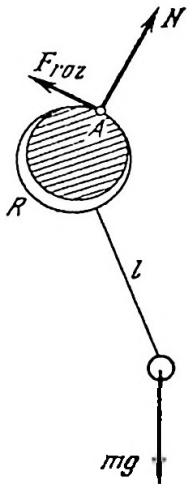


Fig. 4.2. La fuerza de la reacción del eje N y la fuerza de rozamiento F_{roz} actúan sobre el casquillo del péndulo en el punto de contacto de éste con el eje

Esto es fácil de hacer si recordamos el corolario que se deduce de la ecuación de los momentos: cuando tiene lugar el equilibrio de un sólido bajo el efecto de tres fuerzas, las líneas por las que actúan dichas fuerzas se cortan en un punto. Entonces, queda de inmediato claro que el punto A yace en la intersección de la vertical, que pasa por el centro de masas de la pesa, con la superficie interior del cas-

quillo (fig. 4.3). A su vez, esto significa que, incluso con un coeficiente de rozamiento cuan se pueda grande, en el eje es imposible el equilibrio del péndulo si el centro de masas de la pesa m está desviado a la derecha o izquierda a una distancia mayor que el radio R del casquillo.

A la desviación máxima del péndulo de la vertical corresponde el mayor valor de la fuerza de rozamiento en reposo. Suponiendo que el mayor valor es igual a la fuerza de rozamiento de deslizamiento, obtenemos que en equilibrio con la desviación máxima tolerable de la vertical

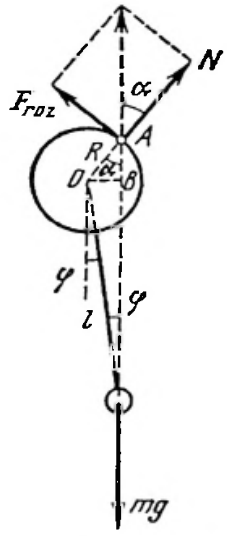


Fig. 4.3. El centro de masas de la pesa yace en la vertical que pasa por el punto de contacto del casquillo con el eje

$$F_{roz} = \mu N. \qquad (1)$$

Como en equilibrio la suma vectorial de F_{roz} y N está dirigida verticalmente hacia arriba (fig. 4.3),

$$\operatorname{tg} \alpha = F_{roz}/N = \mu. \qquad (2)$$

Ahora, es fácil hallar el ángulo φ, correspondiente a la desviación máxima del péndulo. Para ello, expresamos el segmento OB (fig. 4.3) mediante los ángulos α y φ:

$$(l + R) \operatorname{sen} \varphi = R \operatorname{sen} \alpha,$$

de donde, tomando en consideración (2), hallamos

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{R}{l+R} \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}. \qquad (3)$$

Presten atención a que el ángulo límite sólo se determina por el valor del coeficiente de rozamiento y las dimensiones de la varilla y del casquillo y no depende de la masa de la pesa.

El resultado obtenido satisface los casos límites mencionados más arriba. Cuando $\mu \to 0$ el ángulo límite φ también tiende a cero, es decir, no habiendo rozamiento el equilibrio sólo es posible en la posición vertical del péndulo. Cuando $\mu \to \infty$ el factor $\mu/\sqrt{1+\mu^2}$ tiende a la unidad y la fórmula (3) toma la forma

$$(l + R) \operatorname{sen} \varphi = R. \qquad (4)$$

De aquí se desprende que cuando $\mu \to \infty$ la desviación máxima posible a la derecha de la pesa OB tiende a R.

Si desviamos el péndulo a un ángulo mayor que el límite y lo soltamos, después de efectuar varias oscilaciones de amplitud decreciente, el péndulo se detendrá en cierto lugar dentro del campo es-

tancamiento. La parada del péndulo puede producirse en cualquier punto del mencionado campo en función de las condiciones iniciales.

Es de interés señalar que, en presencia de rozamiento en el eje, el péndulo puede estar asimismo en equilibrio en posición invertida, cuando la pesa m se dispone sobre el eje. Sin rozamiento, el equilibrio del péndulo en posición invertida, sólo es posible en rigurosa posición vertical y es inestable. Analicen por su cuenta el equilibrio del péndulo en dicha posición y cerciórense de que el ángulo límite tolerable de la desviación de la vertical se proporciona con la misma expresión (3). ▲

5. Polea con rozamiento en el eje. En el sistema mostrado en la fig. 5.1 una ligera polea de radio externo R e interno r está asentada sobre un eje cilíndrico inmóvil. El coeficiente de rozamiento de la polea con la superficie del eje es igual a μ. ¿Con qué ángulos α este sistema puede encontrarse en equilibrio si no hay rozamiento entre los pesos y los planos oblicuos?

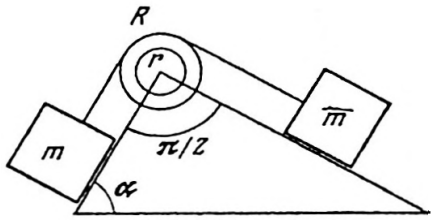


Fig. 5.1. Equilibrio de la polea con rozamiento en el eje

△ Es evidente que al no haber rozamiento en el eje de la polea las fuerzas de tensión del hilo que une los pesos son las mismas por los dos lados de la polea y, por ello, semejante sistema puede estar en equilibrio sólo cuando él es rigurosamente simétrico, o sea, el ángulo α es igual a $\pi/4$.

Si en el eje del bloque hay rozamiento en seco, las fuerzas de tensión del hilo a la derecha e izquierda del bloque pueden ser diferentes y existe todo un campo de valores del ángulo α, en la proximidad de $\alpha = \pi/4$, dentro de cuyos márgenes es posible el equilibrio. Con ello, como es lógico, consideramos que entre el hilo y la polea el rozamiento es grande de modo que el primero no puede deslizarse.

Con el fin de hallar los límites del campo de equilibrio examinemos las fuerzas que actúan sobre la polea. Como no hay rozamiento entre los pesos y los planos, para el equilibrio la fuerza de tensión del hilo a la izquierda de la polea será igual a $mg \cdot \operatorname{sen} \alpha$ y a la derecha de ella, $mg \cos \alpha$. Precisamente con tales fuerzas el hilo actúa sobre la polea como se muestra en la fig. 5.2. De inmediato, señalemos que las componentes horizontales de estas fuerzas son iguales en módulo a $mg \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$ (miren con atención la fig. 5.2) y se equilibran. Por esta razón, la suma vectorial de las fuerzas de tensión del hilo, que actúan sobre el bloque, está dirigida en sentido vertical hacia abajo. Como se desprende de la mencionada fig. 5.2, el módulo de la fuerza resultante es igual a

$$mg \operatorname{sen}^2 \alpha + mg \cos^2 \alpha = mg.$$

Además de las fuerzas de tensión de los hilos, sobre la polea actúa la fuerza de la reacción del eje Q que, como por regla, es idóneo representar en forma de la suma vectorial de la fuerza normal de la reacción N y la fuerza de rozamiento F_{roz} dirigida por la tangente hacia la superficie interior de la polea. Estas dos fuerzas están apli-

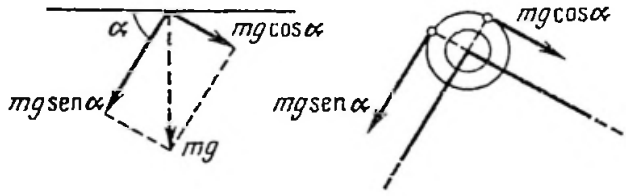


Fig. 5.2. Fuerzas que actúan sobre la polea por parte del hilo

cadas en el punto A, donde la polea hace contacto con el eje (fig. 5.3). Para mayor claridad, vamos a suponer que el ángulo $\alpha > \pi/4$; entonces, cuando el sistema está en equilibrio, la fuerza de rozamiento F_{roz} está dirigida a la derecha. El módulo de la fuerza de rozamiento en reposo puede variar desde cero (si $\alpha = \pi/4$) hasta el valor máximo que consideramos igual a μN. La fuerza de rozamiento tomará este valor máximo con el ángulo α, correspondiente a la frontera de la región que nos interesa, donde es posible el equilibrio.

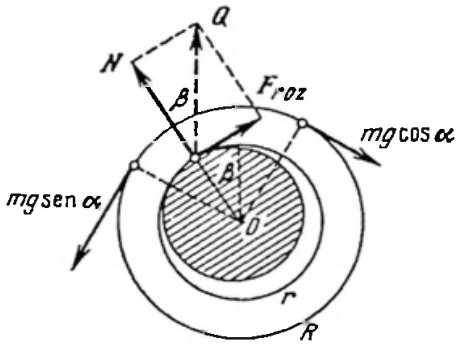


Fig. 5.3. Las fuerzas N y F_{roz} actúan sobre la polea en el punto A, donde la polea hace contacto con el eje

La posición del punto A de contacto con el eje se caracterizará por el ángulo β (fig. 5.3), que forma con la vertical el radio trazado por el punto de contacto. Este ángulo se puede hallar teniendo en cuenta que la fuerza Q equilibra la suma vectorial de las fuerzas de tensión que actúan sobre la polea, es decir, es igual a mg y está dirigida hacia arriba. Igualando los módulos de las componentes horizontales de las fuerzas N y F_{roz}, tendremos

$$N \operatorname{sen} \beta = \mu N \cos \beta, \tag{1}$$

donde

$$\operatorname{tg} \beta = \mu. \tag{2}$$

Prestemos atención a que la relación (2) coincide con la condición de equilibrio de un sólido sobre un plano oblicuo que forma el ángulo β con el horizonte. ¿Qué les parece, esto es una coincidencia casual o a ella se le puede adjudicar un sentido físico determinado?

Ahora es fácil hallar la fuerza de rozamiento que actúa sobre la polea. Como el módulo de la fuerza Q es igual a mg, como se desprende de la fig. 5.3,

$$F_{roz} = mg \operatorname{sen} \beta. \tag{3}$$

Expresando el seno del ángulo β mediante la tangente y tomando en consideración la relación (2), podemos anotar la expresión para la fuerza de rozamiento en la forma

$$F_{roz} = mg \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}. \tag{4}$$

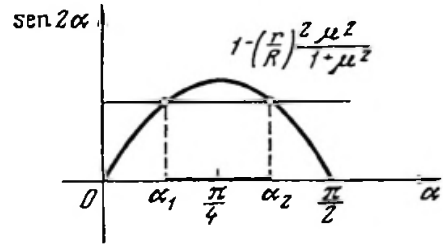


Fig. 5.4. La región de los ángulos α con los que es posible el equilibrio está limitada por los valores α_1 y α_2

Con el fin de hallar el ángulo límite α, para el que todavía es posible el equilibrio del sistema, escribamos la ecuación de equilibrio de los momentos de las fuerzas que actúan sobre la polea. Como los brazos que las fuerzas de tensión del hilo con relación al punto O son iguales al radio externo R, mientras que el brazo de la fuerza de rozamiento es igual al radio interno de la polea (fig. 5.3), tendremos

$$mg\,(\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha)\,R = F_{roz}r. \tag{5}$$

Poniendo en la ecuación (5) el valor de la fuerza de rozamiento de (4) y elevando ambos miembros de esta ecuación al cuadrado, después de sencillas transformaciones, hallamos

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \frac{\mu^2}{1+\mu^2}. \tag{6}$$

Si $\mu = 0$, lo que corresponde a la ausencia de rozamiento en el eje, la fórmula (6) proporciona sen $2\alpha = 1$, es decir, $\alpha = \pi/4$. Si $\mu \neq 0$ el segundo miembro de la ecuación (6) es menor que la unidad, por lo que la ecuación (6) para α tiene en el intervalo desde 0 hasta $\pi/2$ dos raíces α_1 y α_2 dispuestas simétricamente respecto del valor $\alpha = \pi/4$ (fig. 5.4). La raíz α_1, menor que $\pi/4$, ha aparecido al elevar al cuadrado la ecuación y es superflua. Sin embargo, a pesar de una aparición tan «ilegal» ella tiene sentido físico, ya que junto con α_2 determina todo el campo de los valores de los ángulos α en el que el sistema puede estar en equilibrio. Reflexionen por qué razón ocurre esto.

Podría parecer que si $r = R$ este problema corresponde al caso en que los pesos están unidos con un hilo echado por un cilindro inmóvil, con la particularidad de que el coeficiente de rozamiento del hilo con la superficie del cilindro es igual a μ. No obstante, esto no es así. Todo radica en que en el problema que consideramos el

contacto con el cilindro interno sólo se produce en el punto A, mientras que el hilo flexible abarca el cilindro por todo el arco. Este caso se analizará en el problema 8. ▲

6. **¿Es estable el equilibrio?** Una tabla homogénea permanece en equilibrio en un ángulo recto diedro con paredes lisas. En la fig. 6.1 se muestra la sección de dicho ángulo con un plano perpendicular a la arista. ¿Cómo está situada la tabla? ¿Es estable su equilibrio?

△ Como no hay rozamiento, sobre la tabla actúan tres fuerzas: la de la gravedad P y dos fuerzas de reacción de los apoyos N_1 y N_2 dirigidas perpendicularmente a las caras del ángulo. Como ya aclaramos en el problema 3, en la posición de equilibrio, bajo el efecto de

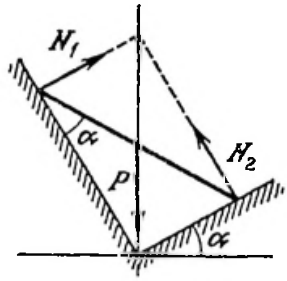


Fig. 6.1. Fuerzas que actúan sobre la tabla en el ángulo diedro de paredes lisas

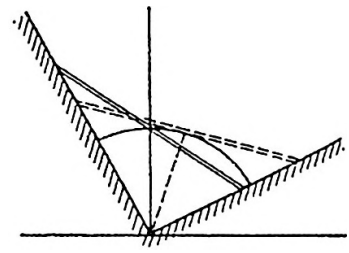


Fig. 6.2. Desplazamiento del centro de gravedad al variar la posición de la tabla

sólo tres fuerzas, las líneas de su acción se cortan en un punto (fig. 6.1). De esta figura se desprende con facilidad cómo se puede hallar la posición de equilibrio de la tabla mediante una construcción. Trazamos una vertical por el vértice del ángulo y desde aquél marcamos en ella un segmento igual a la longitud de la tabla. Desde el extremo de dicho segmento bajamos perpendiculares a las caras del ángulo. La posición de la tabla en equilibrio coincide con la segunda diagonal del rectángulo obtenido. Es fácil cerciorarse de que el ángulo que forma la tabla con una de las caras del ángulo es igual a α, es decir, al ángulo que la otra cara forma con el horizonte.

En la posición estable de equilibrio la energía potencial es la mínima; en la inestable, la máxima. Por esta razón, para aclarar el carácter del equilibrio es suficiente examinar cómo varía la altura del centro de gravedad de la tabla con pequeños desplazamientos de ésta respecto de la posición de equilibrio. Si desplazamos la tabla de forma que sus extremos se deslicen por las caras del ángulo, su centro de gravedad se desplazará por el arco de una circunferencia cuyo centro coincide con el vértice del ángulo, mientras que el radio es igual a la mitad de la longitud de la tabla (fig. 6.2). En efecto, como se desprende de esta figura, la distancia desde el vértice del ángulo has-

ta el centro de gravedad de la tabla no depende de la posición de ésta y es igual a la mitad de su longitud.

En la posición de equilibrio el radio que une el vértice del ángulo con el centro de gravedad de la tabla se dispone verticalmente, por ello al desplazarse la tabla su energía potencial decrece. El equilibrio será inestable. Si casualmente la tabla se desplaza, ella se deslizará a una de las caras del ángulo. ▲

7. Troncos en la caja de carga. Un camión está cargado de troncos lisos iguales. Al meterse en la cuneta él se inclinó hacia un costado de modo que el fondo de la caja formó con el horizonte el ángulo θ. El camión fue descargado y en la caja sólo quedaron tres troncos (fig. 7.1). ¿Con qué fuerza F hay que sujetar el tronco extremo *3* para que los troncos no rueden? El rozamiento se desprecia.

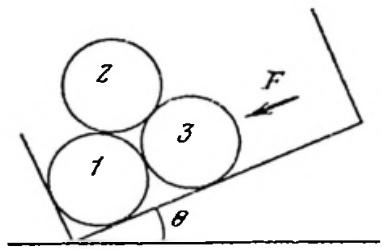


Fig. 7.1. Los troncos en la caja de carga inclinada

△ La posición de los troncos indicada en la fig. 7.1 sólo es posible si el ángulo $\theta < 30°$. En caso contrario el sentido de la fuerza de la gravedad del tronco superior *2* pasará a la izquierda del punto de apoyo sobre el tronco inferior *1* y el tronco *2* rodará hacia el costado de la caja.

Durante la solución de este problema intentaremos evitar la fatigosa consideración de todas las fuerzas que actúan y emplearemos la ley de la conservación de la energía. Si el sistema de troncos está en equilibrio, el trabajo de la fuerza externa F, siendo el desplazamiento imaginario infinitamente pequeño y lento del tronco extremo *3*, determina la variación de la energía potencial de los troncos, ya que no hay rozamiento y las fuerzas normales de reacción no realizan trabajo.

La «geometría» del desplazamiento de los troncos se muestra en la fig. 7.2 *a*, que, para mayor comodidad, está girada en el ángulo θ en sentido horario. En este mismo ángulo se ha girado la dirección de la fuerza de la gravedad.

Los triángulos en la fig. 7.2 *b* unen los centros de los troncos antes y después del desplazamiento. Antes de éste el triángulo era equilátero con el lado igual al diámetro de los troncos a. Después del desplazamiento de los troncos, el triángulo se convierte en isósceles, los lados laterales son como antes iguales a a, mientras que la base aumenta en $2\Delta x$ y la altura, en Δy. En efecto, el tronco *1* sigue en su lugar, el tronco *3* se desplaza en $2\Delta x$ a lo largo del fondo de la caja, en tanto que el tronco *2* se desplaza en Δx a lo largo del fondo y en Δy en sentido perpendicular a éste.

Tomando en consideración que el sentido de la fuerza de la gravedad constituye el ángulo 0 con el eje y (fig. 7.2 *a*), la variación de la energía potencial de los troncos se puede escribir en la forma

$$\Delta E_p = mg \cos \theta \cdot \Delta y + mg \operatorname{sen} \theta \cdot \Delta x + mg \operatorname{sen} \theta \cdot 2\, \Delta x.$$

Los dos primeros sumandos ofrecen la variación de la energía potencial del tronco *2*, mientras que el tercero, del tronco *3*. Con semejante

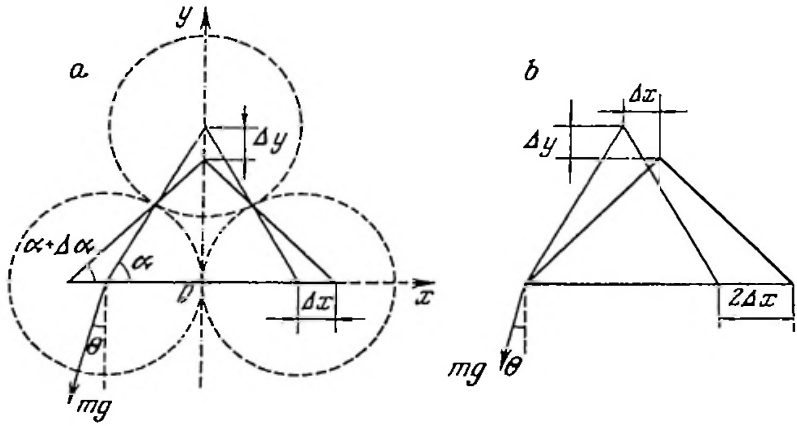


Fig. 7.2. Desplazamiento de los centros de los troncos cuando éstos ruedan

desplazamiento la fuerza externa F realiza el trabajo $\Delta A = -F \times \times 2\, \Delta x$. Sobre la base de la ley de la conservación de la energía, tenemos

$$-F \cdot 2\Delta x = mg \cos \theta \cdot \Delta y + mg \operatorname{sen} \theta \cdot 3\Delta x. \qquad (1)$$

Con el fin de hallar la fuerza F hay que hallar la relación entre los desplazamientos Δx y Δy. Esto se efectúa del modo más sencillo expresándolos mediante la variación $\Delta\alpha$ del ángulo α. En el sistema de coordenadas mostrado en la fig. 7.2 *a*, las coordenadas de los vértices del triángulo antes del desplazamiento de los troncos son iguales a

$$x = a \cos \alpha, \quad y = a \operatorname{sen} \alpha. \qquad (2)$$

Después del desplazamiento

$$x + \Delta x = a \cos (\alpha + \Delta\alpha), \; y + \Delta y = a \operatorname{sen} (\alpha + \Delta\alpha). \qquad (3)$$

Empleando la fórmula para el seno y coseno de la suma de dos ángulos y teniendo en cuenta que para pequeños $\Delta\alpha$ los valores de $\cos \Delta\alpha \approx 1$, $\operatorname{sen} \Delta\alpha \approx \Delta\alpha$, con ayuda de las expresiones (2) y (3), hallamos

$$\Delta x = -a \operatorname{sen} \alpha \cdot \Delta\alpha, \; \Delta y = a \cos \alpha \cdot \Delta\alpha. \qquad (4)$$

Poniendo (4) en la relación (1) obtenemos la expresión para la fuerza F:

$$F = \frac{mg}{2} (\cos\theta \operatorname{ctg}\alpha - 3\operatorname{sen}\theta).$$

Aquí, el ángulo α se debe hacer igual a 60°, ya que es preciso determinar tal fuerza F que no permita que los troncos rueden. Por ello,

$$F = \frac{mg}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cos\theta - 3\operatorname{sen}\theta \right). \qquad (5)$$

Analicemos el resultado obtenido. Si el ángulo de inclinación de la caja de carga yace dentro del intervalo $0 < \theta < \operatorname{arctg}(1/3\sqrt{3})$, la fuerza $F > 0$, o sea, es evidente que hay que sujetar los troncos: si quitamos la fuerza F los troncos rodarán. Para $\theta_1 = \operatorname{arctg}(1/3\sqrt{3})$ la fuerza F se anula. En caso de semejante ángulo θ_1 los troncos no rodarán, incluso si ellos no se sujetan. Si $\theta_1 < \theta < 30°$, de acuerdo con la fórmula (5), la fuerza F es negativa. Esto significa que los troncos no rodarán, incluso si el tronco *3* se saca a lo largo de la caja con una fuerza menor que $|F|$. Así pues, θ_1 es el ángulo mínimo con el que los troncos no ruedan faltando la fuerza de sujeción F. ▲

8. Cable en el proís. Al atracar al muelle se puede detener el movimiento incluso de un buque muy grande sin aplicar para ello considerables esfuerzos. El cable lanzado desde el buque al muelle se

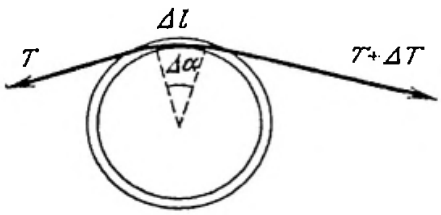


Fig. 8.1. Sobre el elemento del cable Δl, por parte de los sectores vecinos, actúan fuerzas iguales en módulo a T y $T + \Delta T$

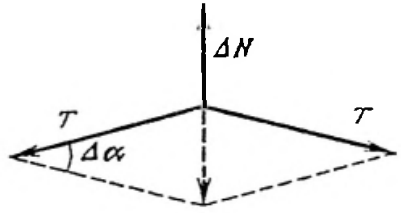


Fig. 8.2. Para el cálculo de la fuerza de reacción normal ΔN

enrolla varias veces alrededor del proís y, entonces, es suficiente aplicar al extremo libre del cable un pequeño esfuerzo para que el mismo, deslizándose por el proís, detenga y sujete el buque. Calculen cuántas veces supera la fuerza que actúa sobre el buque por parte del cable el esfuerzo aplicado al extremo libre del cable si éste está enrollado tres veces alrededor del proís y el coeficiente de rozamiento del cable en el proís es igual a μ.

△ La enorme ganancia de fuerza se alcanza gracias al rozamiento de las espiras del cable con la superficie del proís. Consideremos un pequeño elemento Δl de la espira del cable en el proís, caracterizado por el ángulo $\Delta\alpha$ (fig. 8.1). Por parte de los sectores vecinos del cable

sobre este elemento actúan las fuerzas elásticas de tensión, iguales a T y $T + \Delta T$, dirigidas por las tangentes a la superficie del proís en los extremos del sector destacado. La diferencia entre los módulos de estas fuerzas ΔT, que a nosotros nos interesa, está condicionada por el efecto de la fuerza de rozamiento de deslizamiento ΔF_{roz} que actúa sobre el mencionado elemento. La resultante de las fuerzas de tensión también tiene una componente dirigida por el radio hacia el centro del proís. Ésta se compensa con la fuerza de la reacción del proís, ΔN, normal al elemento Δl. Como se deduce de la construcción en la fig. 8.2, donde se tiene en cuenta que para el pequeño elemento Δl de la espira la razón $\Delta T/T \ll 1$, el módulo de la fuerza ΔN es aproximadamente igual a

$$\Delta N \approx T \Delta \alpha. \tag{1}$$

El módulo de la fuerza de rozamiento de deslizamiento ΔF_{roz} está relacionado, como de ordinario, con el módulo de la fuerza normal de reaccion ΔN mediante la relación

$$\Delta F_{roz} = \mu \Delta N. \tag{2}$$

Poniendo aquí ΔN de la fórmula (1) y tomando en consideración que $\Delta F_{roz} = \Delta T$, obtenemos

$$\Delta T = \mu T \Delta \alpha. \tag{3}$$

Ahora, examinemos la fuerza de tensión T del cable como función del ángulo α. Entonces, pasando en la expresión (3) al límite cuando $\Delta\alpha \to 0$ y, teniendo en cuenta que el límite de la razón $\Delta T/\Delta\alpha$ si $\Delta\alpha \to 0$ es $T'(\alpha)$, es decir, la derivada de la función $T(\alpha)$ por α, obtenemos la ecuación diferencial

$$T'(\alpha) = \mu T(\alpha). \tag{4}$$

Semejante ecuación, en la que la derivada de la función buscada es proporcional a la propia función, como es sabido del curso escolar de matemáticas, tiene la siguiente solución

$$T(\alpha) = Ce^{\mu\alpha}. \tag{5}$$

Como se desprende de la misma solución, la constante C tiene el sentido de la fuerza de tensión del cable T_0 cuando $\alpha = 0$, es decir, del esfuerzo aplicado al extremo libre del cable. Por ello,

$$T(\alpha) = T_0 e^{\mu\alpha}. \tag{6}$$

De esta expresión se deduce que la relación entre la fuerza de tensión $T(\alpha_1)$ en un extremo del cable (o sea con $\alpha = \alpha_1$) y la fuerza de tensión T_0 en el otro extremo, igual a $e^{\mu\alpha_1}$, no depende ni del diámetro ni del grosor del cable y sólo se determina por el coeficiente de rozamiento μ y el número de vueltas $n = \alpha_1/2\pi$.

La función exponencial

$$e^{\mu\alpha_1} = e^{\pi\mu n}$$

crece con mucha rapidez. Cuando n es un número entero ésta es simplemente una progresión geométrica con razón $e^{2\pi\mu}$. P. ej., incluso con μ igual tan sólo a 0,1 después de una vuelta ($n = 1$) la fuerza de tensión del cable crece $e^{2\pi\mu} \approx e^{0,63} \approx 1,87$ veces, en tanto que después de tres vueltas, $e^{2\pi\mu \cdot 3} \approx 6,55$ veces.

Hay que señalar que el procedimiento descrito de transformación de la fuerza es considerablemente irreversible, a diferencia de los demás mecanismos simples tales como la palanca, el torno, el polispasto, etc. Por esta razón, con ayuda de este procedimiento sólo se puede detener o bien sujetar la nave, pero no se puede, p. ej.,atraerla hacia la orilla. No obstante, si el proís se pone en rotación, impulsado por un motor, con el procedimiento descrito se puede arrimar el buque a la orilla. Los tornos en los que se emplea este principio (cabrestante) encuentran extensa aplicación en la flota. ▲

IV. MECÁNICA DE LOS FLUIDOS

La ley fundamental de hidrostática es la de Pascal según la cual la presión p en un líquido (o bien un gas), en estado de equilibrio, no depende de la orientación de la superficie sobre la que actúa.

Si un líquido incompresible se encuentra en el campo homogéneo de la gravedad, la presión hidrostática a la profundidad h es igual a ρgh, donde ρ es la densidad del líquido. La presencia de la presión hidrostática, condicionada por el campo de la gravedad, conduce a que sobre un sólido sumergido en un líquido (o bien gas) actúa la fuerza de empuje. Ella está dirigida verticalmente hacia arriba, en tanto que su módulo es igual al peso del líquido cuyo volumen coincide con el de la parte del sólido sumergida en el líquido. En esto consiste la ley de Arquímedes.

Con el movimiento estacionario de un fluido, cuando las líneas de corriente no varían con el tiempo y coinciden con las trayectorias de las partículas del fluido, por cualquier sección transversal pasa igual cantidad del fluido por unidad de tiempo. Para un fluido incompresible esta condición se expresa por la ecuación de continuidad:

$$v_1 S_1 = v_2 S_2, \tag{1}$$

donde S_1 y S_2 son las áreas de las secciones y v_1 y v_2, las velocidades del fluido en estas secciones.

Si durante el movimiento del fluido es posible despreciar las fuerzas de la viscosidad dicho fluido recibe el nombre de perfecto o ideal. Para semejante fluido se verifica la ley de la conservación de la energía mecánica. La expresión matemática de dicha ley es la ecuación de Bernoulli:

$$p + \rho gh + \rho v^2/2 = \text{const}. \tag{2}$$

La suma de los sumandos en el primer miembro de la ecuación tiene un mismo valor a lo largo de las líneas de corriente. La altura h en cualquier punto se cuenta desde un nivel que, convencionalmente, se toma como nulo.

Durante el movimiento de un sólido en el seno de un líquido (o bien gas), sobre él actúa la fuerza de resistencia. Esta fuerza depende de múltiples parámetros tales como la velocidad de movimiento, las dimensiones y la forma del sólido, la densidad del fluido, su viscosidad. El papel relativo de estos parámetros varía en función de la velocidad de movimiento del sólido en el fluido. A pequeñas velocidades esa fuerza está condicionada, fundamentalmente, por la viscosidad del fluido. En semejante caso, la fuerza de resistencia es proporcional a la velocidad del sólido.

1. El embudo volcado. Un embudo cónico pesado se coloca en posición invertida sobre una superficie horizontal llana cubierta de una hoja de caucho (fig. 1.1). El orificio pequeño del embudo acaba en forma de un fino tubo por el que se puede echar agua al interior del embudo. Resultó que el agua comenzó a salir por debajo del em-

budo cuando el nivel del líquido en el tubo era igual a h. Determinen la masa m del embudo si el área de la sección de su orificio ancho es igual a S y la altura del embudo, H.

△ Ante todo, reflexionemos por qué puede salir el agua por debajo del embudo, ya que éste se encuentra sobre la goma, hace con ella estrecho contacto y no hay entre ellos rendijas. Con el fin de que el agua comience a surtir el embudo debe ascender. ¿Qué fuerza es la causa de esto? La cuestión radica en que las fuerzas de la presión sobre cada punto de la superficie del embudo están dirigidas por las normales a ella y por ello, tienen componente vertical. La resultante de estas fuerzas, como evidentemente se deduce de la simetría del embudo, se dirige por la vertical hacia arriba. Con cierto nivel del agua en el tubo esta resultante de la fuerza de presión puede ser suficiente para elevar el embudo.

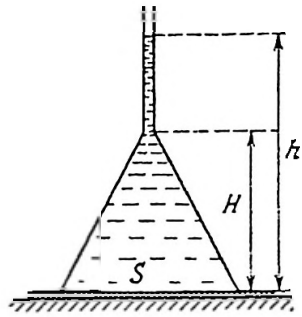


Fig. 1.1. Con la altura del nivel h el agua comienza a fluir por debajo del embudo

El cálculo directo de la fuerza de la presión requiere el empleo de la integración. En primer lugar, la presión del agua será diferente para diversas capas horizontales en las que se puede dividir la superficie del embudo; en segundo, serán distintas las áreas de dichas capas. Por ello, es más cómodo no calcular esta fuerza por «vía directa», sino hacer uso de otros razonamientos basados en las peculiaridades de la presión hidrostática del fluido.

Imaginémonos que el embudo, junto con el agua que se ha echado, está instalado sobre una balanza. Es evidente, que las indicaciones de la balanza se determinan por la suma de las masas del embudo y del agua que por el tubo fue vertida en él. En el momento cuando el agua comienza a salir por debajo del embudo, el borde inferior de éste deja de presionar sobre el soporte. Esto significa que en ese instante toda la fuerza que actúa sobre el plato de la balanza es, precisamente, la fuerza de la presión de la columna de agua de altura h sobre el área S. Así pues, en el momento de la separación

$$mg + \rho g V = \rho g h S, \qquad (1)$$

donde ρ es la densidad del agua y V, el volumen del agua en el embudo y el tubo.

Si el tubo es fino, el volumen de la parte del tubo lleno de agua puede ser despreciado en comparación con el volumen del propio embudo. En tal caso, $V = HS/3$ y de la ecuación (1) hallamos

$$m = \rho S\,(h - H/3). \qquad (2)$$

Entre otras cosas, de la fórmula (2) se deduce que el embudo es bastante pesado: su masa más de dos veces supera la del agua en el volumen del embudo. Si el embudo tuviera una masa menor que $2\rho SH/3$, al echar el agua por el tubo, el embudo se separaría del soporte antes de que el agua lo llenara por completo.

El procedimiento empleado aquí permite prescindir del cálculo directo de la fuerza de la presión del líquido sobre la superficie del cuerpo y puede ser útil al resolver otros problemas hidrostáticos, en particular, en los casos en que la superficie es de forma complicada. La ecuación (1) también sigue siendo cierta al tener el embudo forma más complicada, p. ej., como la ofrecida en la fig. 1.2. Con el fin de hallar la masa del embudo sólo hay que conocer el volumen de su parte interior. ▲

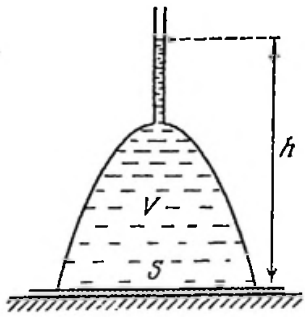


Fig. 1.2. El problema también se puede resolver para un embudo de forma más complicada

2. Bolas flotantes. Dos bolas de iguales dimensiones, una ligera y otra pesada, están fijadas en una fina varilla, con la particularidad de que la bola pesada está fijada en el punto medio de la varilla, mientras que la ligera en uno de sus extremos. Durante la sumersión en el agua en un lugar no profundo, el extremo libre de la varilla se apoya en el fondo, la varilla se dispone de forma oblicua y del agua sólo sale parte de la bola ligera, con ello la razón entre el volumen de la parte emergente y el volumen de toda la bola es igual a n (fig. 2.1). ¿Flotará este sistema o se hundirá si lo echamos al agua en un lugar profundo? Consideren la masa de la varilla despreciablemente pequeña.

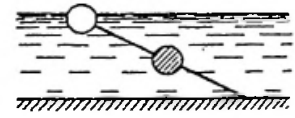


Fig. 2.1. La varilla con las bolas sumergida se apoya en el fondo

△ Al leer por primera vez las condiciones del problema, puede parecer que los datos aducidos son insuficientes para responder a la pregunta planteada: pues no se ha indicado ni el volumen, ni la masa de las bolas, necesarios para hallar la relación entre la fuerza de la gravedad y las fuerzas de empuje. Sin embargo, esa impresión es ilusiva. Todo lo necesario para resolver el problema está prefijado en el planteamiento y sólo nos queda comprender cómo hacer uso de ello.

La conducta del sistema en el agua profunda se determina por el hecho de qué es mayor: las fuerzas de la gravedad o las de empuje que actúan sobre las bolas ligera y pesada y que son iguales para ellas. Esto se puede aclarar considerando el equilibrio de la varilla con las bolas en aguas poco profundas, descrito en el planteamiento del problema.

En la fig. 2.2 se muestran las fuerzas que actúan sobre el sistema. Con F está designada la fuerza de empuje que actúa sobre la bola sumergida por completo. Como la bola ligera está sumergida parcialmente, la fuerza de empuje que sobre ella actúa, proporcional al volumen de la parte sumergida, es igual a $F(1-n)$. Como las fuerzas de la gravedad mg y m_1g y las dos fuerzas de empuje están dirigidas por la vertical, la fuerza de reacción del fondo Q, que actúa sobre el extremo de la varilla, también está dirigida verticalmente.

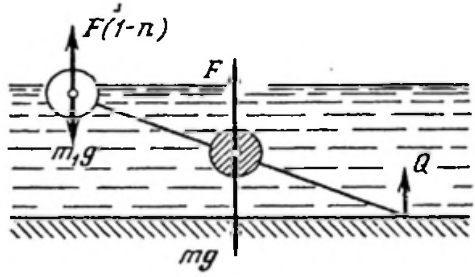


Fig. 2.2. Equilibrio del sistema en agua poco profunda

Analizando la ecuación de los momentos de las fuerzas, con relación al centro de la bola pesada, para la fuerza de reacción del fondo obtenemos la expresión

$$Q = F(1-n) - m_1g.$$

Ahora, teniendo en cuenta que la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan en equilibrio es igual a cero, podemos ligar la fuerza de empuje con las fuerzas de la gravedad mg y m_1g que actúan sobre las bolas:

$$mg + m_1g = F + 2F(1-n) - m_1g = F(3-2n) - m_1g. \quad (1)$$

En un lugar profundo se alcanzará el valor máximo de la fuerza de empuje cuando ambas bolas estén por completo sumergidas. Entonces, ella es igual a $2F$. Si $2F$ resulta ser mayor que la fuerza de la gravedad total, la varilla con las bolas flotará en posición vertical y la bola ligera, situada arriba, saldrá parcialmente del agua. Así pues, la condición de flotación en el agua profunda tiene la forma

$$mg + m_1g < 2F \text{ o bien } F(3-2n) - m_1g < 2F, \quad (2)$$

de donde

$$1 - 2n < m_1g/F.$$

Parecería que esta desigualdad no nos aproxima a la solución, ya que en el segundo miembro están las fuerzas m_1g y F que no fueron prefijadas en el planteamiento. Pero en dicho miembro se encuentra una magnitud positiva, por lo que la desigualdad será verificada si exigimos que $1 - 2n \leqslant 0$. De modo que el sistema flotará en agua

profunda si $n \geqslant 1/2$, es decir, si la bola ligera sobresale del agua poco profunda en no menos de la mitad.

Sin embargo, ¿hasta qué punto es correcta esta solución? Es evidente que hemos hallado la condición suficiente y, hablando en general, en realidad el sistema también flotará con menores valores de n. P. ej., si $m_1 g/F = 1/5$, el sistema ya no se hundirá con $n > 0{,}4$. Según el planteamiento del problema una bola es ligera y la otra, pesada, es decir $m_1 g \ll mg$. Está claro, que el valor de mg yace en el intervalo $F < mg < 2F$, ya que, de otro modo, el sistema flotaría en el agua poco profunda sin tocar el fondo o bien se hundiría. Por ello, $m_1 g/F \ll 1$ y el valor mínimo real de n, para el que el sistema no se hunde (obligatoriamente menor que 1/2), será tanto más próximo al valor hallado $n = 1/2$, cuanto menor sea la razón $m_1 g/F$. ▲

3. Un famoso problema. En una piscina navega una barca. ¿Cómo variará el nivel del agua en la piscina si desde la barca se tira una piedra a la piscina? ¿Qué sucederá con el nivel del agua en la piscina si en el fondo de la barca se hace un agujero y ésta comienza a sumergirse? Si con esto el nivel del agua en la piscina varía, ¿en qué momento comenzará la variación?

△ Si desde la barca tiramos la piedra a la orilla de la piscina, el nivel del agua en ella bajará. Esto sucede en virtud de que la barca se aligera, ella emerge y el volumen de agua que ella desplaza disminuye.

También bajará el nivel del agua en la piscina cuando la piedra se tira a la propia piscina, aunque en tal caso la bajada del nivel será algo menor. En efecto, cuando la piedra yace en el fondo el volumen de agua que ella desplaza es igual al volumen de la piedra. Mientras la piedra se encontraba en la barca, ésta desplazaba un volumen adicional de agua cuya masa era igual a la de la piedra. Como la densidad de la piedra es mayor que la del agua, dicho volumen es mayor que el de la propia piedra.

¿Qué pasaría si tiráramos desde la barca a la piscina un objeto de madera, p.ej., un tronco? Si éste se arroja a la orilla, no habrá diferencia de principio con el caso en que tiramos la piedra: el nivel del agua en la piscina bajará. Otra cosa es, cuando el tronco se echa al agua. Aquí, el nivel del agua en la piscina queda invariable, aunque, claro está, la barca emergerá un poco. La cuestión radica en que el tronco flota en la superficie y, por lo tanto, desplaza el mismo volumen de agua que antes desplazaba, adicionalmente, la barca (es decir, antes de arrojar el tronco).

Así pues, si el objeto tirado desde la barca flota, el nivel del agua en la piscina queda invariable. Si el objeto se hunde en el agua, el nivel de ésta disminuye.

A estas mismas conclusiones podemos llegar de modo más sencillo si nos imaginamos que toda la piscina está ubicada en una ba-

lanza. Las indicaciones de la balanza no variarán indiferentemente de lo que echemos al agua desde la barca. Por ello, si los objetos tirados desde la barca flotan en la superficie, la fuerza de la presión sobre el fondo de la piscina no deberá variar, lo que sólo es posible cuando el nivel del agua queda invariable.

Pero si el objeto arrojado descendió hasta el fondo de la piscina, la fuerza que actúa sobre el fondo se determina no sólo con la presión hidrostática del agua, sino también con el efecto del propio objeto. Como la fuerza total debe ser la misma que antes, la fuerza de la presión del agua sobre el fondo deberá disminuir. Por esta razón, el nivel del agua en la piscina bajará.

Ahora, cuando hemos aclarado la primera pregunta, no será difícil responder a la pregunta de si variará el nivel del agua en la piscina cuando en el fondo de la barca se hace un agujero. Vamos a considerar que la barca se llena de agua por el agujero con lentitud, en pequeñas porciones, de forma que hasta que se hunda, en cada momento de tiempo, ella estará en equilibrio en la superficie del agua. Mientras la barca permanezca a flote el nivel del agua en la piscina no variará. El volumen de la parte sumergida de la barca aumentará, exactamente, en la cantidad de agua (según el volumen) que ha entrado en la barca. Es cierto, después de admitir determinada cantidad de agua, la barca ya no podrá quedar en equilibrio a flote y comenzará a hundirse hacia el fondo. Desde este momento empezará la bajada del nivel del agua en la piscina.

Este problema es famoso debido a que al intentar de inmediato responder a las preguntas planteadas, con frecuencia, la intuición nos engaña, de modo que incluso conocidos físicos dieron respuestas erróneas. ▲

4. Reacción del chorro saliente. En la pared lateral de un ancho recipiente hay un orificio cerrado con un tapón (fig. 4.1). Hallen la fuerza reactiva que tenderá, si se quita el tapón, a desplazar el recipiente de su sitio. El área de la sección del orificio es igual a S y la altura del nivel del agua sobre el orificio, a h.

△ Mientras el orificio del recipiente está cerrado con el tapón la fuerza que tiende a expulsarlo, se determina por la presión hidrostática de la columna de agua de altura h y es igual a ρghS.

Si sacamos el tapón del orificio, se puede suponer que las fuerzas de la presión del agua sobre las paredes del recipiente se compensarán entre sí por doquier, salvo en el sector que se encuentra frente por frente del tapón y que tiene la misma sección S que el orificio. Por ello, podría parecer que la fuerza reactiva tendiente a desplazar el recipiente debe ser la misma que la fuerza de la presión hidrostática sobre ese sector, es decir,

$$F = \rho ghS. \qquad (1)$$

No obstante, tal deducción sería demasiado apresurada. Se trata de que aquí tropezamos con un líquido en movimiento que sale en forma de chorro por un agujero y no es, en absoluto, evidente que todo se puede explicar con ayuda de regularidades hidrostáticas. En efecto, el intento de realizar el análisis dinámico nos ofrece otro resultado para la fuerza reactiva. Al aplicar el enfoque dinámico, la fuerza reactiva que actúa sobre el recipiente se debe igualar al impulso que se lleva el chorro saliente de agua por unidad de tiempo. Calculemos la mencionada fuerza.

Vamos a considerar que la velocidad de salida del agua es igual por toda la sección del agujero. Si podemos considerar que el agua en el recipiente es un líquido perfecto, lo dicho más arriba es en efecto

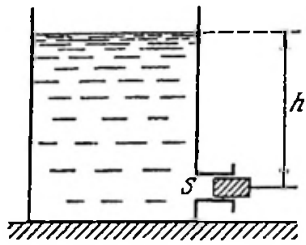


Fig. 4.1. Recipiente con un agujero en la pared lateral

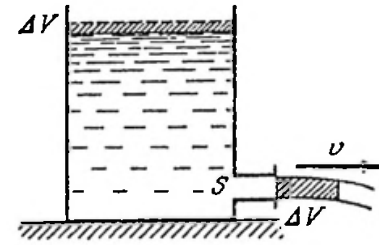


Fig. 4.2. El volumen de la parte del recipiente que queda libre es igual al volumen del fluido que sale

así y es posible hallar la velocidad con ayuda de la ley de la conservación de la energía mecánica. En el estado inicial, el agua en el recipiente está inmóvil y su nivel se halla a la altura h sobre el orificio. Pasado un pequeño intervalo de tiempo el nivel del agua en el recipiente bajará un poco, ya que parte del líquido saldrá por el orificio en forma de chorro a la velocidad v (fig. 4.2). Como el líquido es incompresible, el volumen de la parte del recipiente que ha quedado libre ΔV es igual al volumen del líquido que ha salido. Si el recipiente es suficientemente ancho, podemos considerar que el nivel del agua en él baja a velocidad casi nula. En tal caso, la ley de la conservación de la energía se escribe en la forma

$$\rho\, \Delta V g h = \rho\, \Delta V v^2/2, \qquad (2)$$

de donde

$$v^2 = 2gh.$$

Esta fórmula fue establecida por Torricelli.

Ahora, ya podemos hallar el impulso que se lleva el agua por unidad de tiempo. Como la masa de agua que sale por unidad de tiempo es igual a $\rho S v$, el impulso que se llevará dicha masa será igual a $\rho S v^2$. Poniendo aquí el valor hallado de la velocidad del chorro, ob-

tenemos la expresión para la fuerza reactiva

$$F = 2\rho ghS. \tag{3}$$

La fuerza reactiva (3), hallada como resultado del análisis dinámico, es dos veces mayor que la fuerza hidrostática de la presión sobre el tapón (1).

¿Qué resultado es preferente? Como durante el análisis dinámico nos basábamos en las leyes fundamentales de la conservación de la energía y del impulso, semejante enfoque es más riguroso. Pero, a pesar de todo, el resultado es cierto no en todo caso. Hay casos, cuando, precisamente, es correcta la solución (1).

Aquí, todo radica en la forma del chorro del líquido que sale del orificio. Es natural que dicha forma depende de la estructura del orificio y el área de la sección del chorro no siempre coincide con el

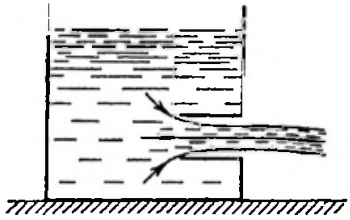


Fig. 4.3. Compresión del chorro en el tubo acoplado en el recipiente

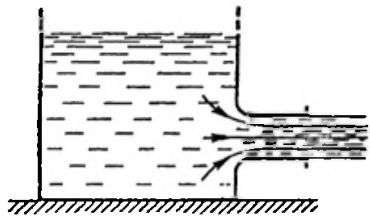


Fig. 4.4. En el tubo de esta forma no se produce la compresión del chorro

área del propio orificio. P. ej., en el caso mostrado en la fig. 4.3, donde el tubo cilíndrico está injertado en el interior del recipiente, las partículas del líquido cerca de los bordes del tubo tienen velocidades en los sentidos transversales, lo que conduce a la contracción del chorro en semejante orificio. Cerca de las paredes del recipiente, por doquier, la velocidad de movimiento del líquido es en tal caso despreciablemente pequeña y la presión sobre las paredes del recipiente es en todo lugar igual a la hidrostática. Pero, precisamente, esto significa que al salir el líquido de semejante orificio, para la fuerza reactiva es cierto el resultado (1).

Claro está, aquí no hay contradicción alguna con el análisis dinámico. Como el chorro se comprime en el orificio, en la fórmula (3) hemos de entender por S no el área del agujero, sino la del chorro que, para los orificios de semejante estructura, será dos veces menor que el área del propio orificio. Remarquemos que en la fórmula (3) el área de la sección del chorro se debe elegir en el lugar donde éste ya se ha formado y la velocidad de todas las partículas del líquido son iguales en módulo y sentido. Sólo para semejante sección del chorro son aplicables las leyes de la conservación de la energía y del impulso en la forma que ellas están escritas en las relaciones (2) y (3).

Para la estructura del orificio en la fig. 4.4 es correcto el resultado expresado en la fórmula (3), en la que S es igual al área del orificio. En efecto, antes de la salida del líquido las líneas de corriente cambian paulatinamente la dirección por la paralela al eje del tubo. Como resultado, el área de la sección del chorro saliente es igual a la del orificio del tubo y no se produce la contracción del chorro. La imposibilidad de la aplicación en este caso del análisis hidrostático está relacionada con el hecho de que la velocidad del líquido junto a la pared lateral en la proximidad de la entrada en el tubo resulta no igual a cero.

Para todas las demás estructuras de los agujeros, p. ej., para la mostrada en la fig. 4.1, la compresión del chorro tiene un valor intermedio entre los casos límites ofrecidos en las figs. 4.3 y 4.4. La fuerza reactiva se expresa con la fórmula (3) en la que como S se debe poner el área de la sección del chorro correspondiente a la estructura concreta del orificio. ▲

5. **Salida de un líquido a velocidad constante.** Un recipiente que tiene junto al fondo un grifo se llena de agua, después de lo cual se

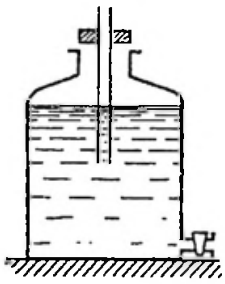


Fig. 5.1. El tubo que pasa por el tapón está abierto por los dos lados

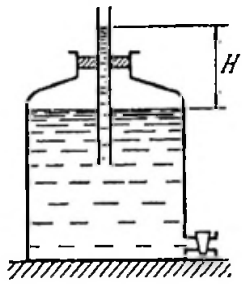


Fig. 5.2. Cuando el tapón está cerrado herméticamente el nivel del agua en el tubo asciende

cierra herméticamente con un tapón, por el que pasa un tubo abierto por sus dos extremos (fig. 5.1). ¿A qué velocidad saldrá el agua del recipiente si abrimos el grifo?

△ Cuando cerramos el recipiente con el tapón, como es natural, el agua entra en el tubo por lo que el nivel del agua en el recipiente y en el tubo es el mismo. Una vez que cerremos con el tapón el orificio en el gollete del recipiente y que profundicemos un poco aquél, el nivel del agua en el tubo será algo más alto que en el recipiente (fig. 5.2) y la presión del aire que ha quedado bajo el tapón será mayor que la atmosférica en el valor de la presión de la columna de agua, cuya altura H es igual a la diferencia de los niveles en el tubo y el recipiente.

Ahora, abrimos el grifo. La velocidad de salida por el orificio del grifo se determina por la presión hidrostática del agua al nivel del grifo.

En todo momento, esta presión es igual a la de la columna de agua de una altura desde el nivel del grifo hasta el nivel del agua en el tubo, ya que el extremo superior del tubo está abierto. Por esto, en el momento inicial la velocidad de salida es la mayor. El nivel del agua en el tubo bajará poco a poco hasta alcanzar el extremo inferior del tubo. Con ello, el nivel del agua en el recipiente disminuirá de manera tan insignificante que, prácticamente, se puede considerar invariable. En efecto, la presión del aire bajo el tapón varía, al bajar el nivel del agua en el tubo, en el valor de la presión de la columna de agua que ha salido del tubo. Esto constituye una parte ínfima de la presión atmosférica, equivalente a la presión de unos diez metros de la columna de agua.

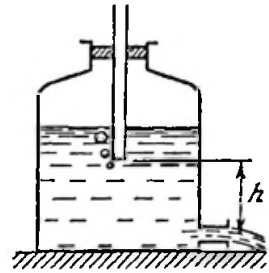


Fig. 5.3. Durante la salida del agua el aire entra en el recipiente por el tubo

Después de que el nivel del agua alcanza su extremo inferior la salida ulterior del agua por el grifo irá acompañada obligatoriamente de la bajada del nivel de agua en el propio recipiente. Con esto, del extremo inferior del tubo pasarán al recipiente burbujas de aire atmosférico, llenando el volumen que se libera debajo del tapón (fig. 5.3). Entrará tanto aire como es necesario para que la presión del agua en el recipiente, al nivel del extremo inferior del tubo, siempre sea igual a la atmosférica a pesar de la bajada del nivel del agua en el recipiente. Como resultado, la presión hidrostática al nivel del grifo quedará invariable e igual a ρgh, donde h es la distancia desde el grifo hasta el extremo inferior del tubo por la vertical. Por esta razón, la velocidad de salida por el grifo será, asimismo, constante e igual a $\sqrt{2gh}$.

Todo continuará así hasta que el nivel del agua en el recipiente baje hasta el extremo inferior del tubo. Con la posterior salida del agua su velocidad disminuirá, lo mismo que al fluir de un recipiente abierto.

El instrumento considerado es uno de los reguladores mecánicos más sencillos. La constancia de la velocidad de salida se mantiene automáticamente gracias al efecto de la realimentación negativa que está obligatoriamente presente en todo dispositivo autorregulable.

En el caso dado, para asegurar la constancia de la velocidad de salida es preciso mantener un nivel invariable del agua en el tubo, precisamente, en su extremo inferior. Examinemos lo que sucederá si este nivel varía un poco. P. ej., supongamos que con la siguiente

burbuja entra en el recipiente algo más de aire del que es necesario, de modo que el nivel del agua en el tubo asciende en cierto grado. Entonces, como vimos más arriba, el agua se derramará, prácticamente, sólo del tubo y hasta que su nivel alcance de nuevo el extremo inferior del tubo ni una burbuja de aire podrá penetrar al interior del recipiente.

Este sencillo dispositivo automático para mantener constante la velocidad de salida de un líquido es, al mismo tiempo, muy fiable, infalible en el trabajo debido a su sencillez. ▲

6. Golpe de ariete. En la fig. 6.1 se muestra el modelo de un conducto de agua. De un depósito elevado a cierta altura h, que desempeña el papel de arca de agua, sale el tubo principal de sección constante S y longitud l. Este tubo termina en un tubo fino de sección

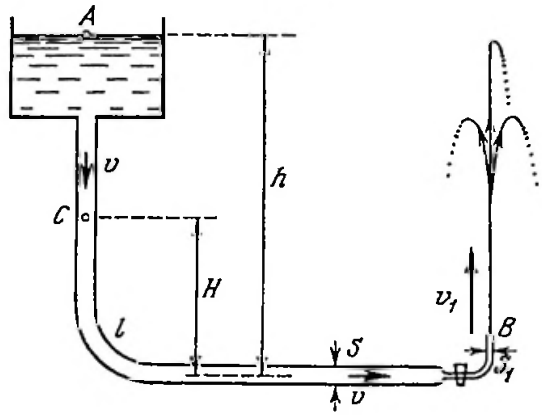


Fig. 6.1. En este modelo de un conducto de agua la longitud total de la tubería es igual a l

S_1, doblado hacia arriba, con un grifo. Al abrir el grifo del tubo brota una fuente. ¿A qué velocidad brota el agua de la fuente y a qué altura máxima asciende? ¿A qué velocidad se mueve el agua por el tubo principal y cuál es la presión en él? ¿Qué presión habrá en el tubo principal al cerrar instantáneamente el grifo? ¿Cómo dependerá la presión respecto del tiempo, cuando el grifo se cierra gradualmente en el transcurso del intervalo de tiempo τ?

△ Al resolver este problema vamos a considerar que el agua es un líquido perfecto, es decir, despreciaremos su viscosidad. Entonces, la energía mecánica total del líquido se conserva y para describir su movimien to puede emplearse la ecuación de Bernoulli que expresa la ley de la conservación de la energía para un líquido perfecto en

movimiento. Para un flujo estacionario dicha ecuación tiene la forma

$$p + \rho gh + \rho v^2/2 = \text{const}, \qquad (1)$$

donde p es la presión que muestra un manómetro inmóvil con relación al líquido; ρ, la densidad del líquido; v, la velocidad del líquido en el punto dado; h, la altura del mencionado punto sobre cierto nivel. La ecuación (1) nos indica que la suma de los tres sumandos en el primer miembro tiene un mismo valor independientemente del punto en el que se calcula. En adelante, para mayor comodidad no escribiremos explícitamente la presión atmosférica p_0 igual en todos los puntos, entendiendo por p en (1) el exceso de la presión en el líquido con relación a la atmosférica.

Supongamos que el grifo está abierto y se ha establecido un flujo estacionario del líquido. Vamos a despreciar la variación del nivel del líquido en el depósito, considerando su volumen suficientemente grande. Entonces, la ecuación de Bernoulli (1) permite dar respuesta a todas las preguntas referentes a este caso. La velocidad del chorro v_1 que brota de la fuente sólo se determina por la altura del nivel del agua h en el depósito sobre el agujero del tubo:

$$v_1 = \sqrt{2gh}. \qquad (2)$$

Esta es la conocida fórmula de Torricelli que puede ser obtenida tanto directamente de la ley de la conservación de la energía, como también de la ecuación de Bernoulli, si igualamos los primeros miembros de (1), escritos para el punto A en el nivel de agua en el depósito, donde la velocidad es, prácticamente, igual a cero, y para el punto B situado en el agujero del tubo:

$$\rho gh = \rho v_1^2/2.$$

Las partículas de agua que salen del orificio a velocidad $v_1 = \sqrt{2gh}$, pueden subir hasta el nivel del agua en el depósito si su velocidad en el orificio del tubo está dirigida verticalmente hacia arriba.

La velocidad del agua v en el tubo principal es fácil de hallar tomando en consideración la incompresibilidad del líquido y haciendo uso de la ecuación de continuidad:

$$Sv = S_1 v_1, \qquad (3)$$

de donde, teniendo en cuenta (2), obtenemos

$$v = v_1 S_1/S = \sqrt{2gh}\, S_1/S. \qquad (4)$$

Si $S_1 \ll S$, la velocidad del agua en el tubo principal es mucho menor que la del chorro que brota del orificio. Señalemos que la velocidad v es igual en cualquier lugar del tubo principal tanto justo antes del

grifo, como en el comienzo del tubo principal detrás del depósito. En lo que atañe a la presión p del agua en el tubo principal, ésta será diferente a diversa altura. Como ya conocemos la velocidad del agua en el tubo principal, la presión se puede calcular con la ecuación de Bernoulli.

Tomemos al azar en el tubo el punto C situado a la altura H. Entonces, igualando los primeros miembros de (1) para los puntos C y A, obtenemos

$$p + \rho g H + \rho v^2/2 = \rho g h. \tag{5}$$

De aquí, para presión del agua p a la altura H, tenemos

$$p = \rho g (h - H) - \rho v^2/2. \tag{6}$$

De (6) se desprende que la presión del agua en el tubo principal es menor que la hidrostática, es decir, que aquella que habría con el agujero cerrado, en el valor $\rho v^2/2$. Cuanto mayor sea la velocidad del agua en el tubo principal, tanto menor será en él la presión. Esta diferencia de la presión del agua respecto de la hidrostática ya se manifiesta en el comienzo del tubo principal, allí donde ella sale del depósito: en este lugar la velocidad crece a salto desde cero, mientras que la presión cae asimismo a salto.

Antes del grifo, allí donde $H = 0$, la presión del agua en el tubo principal

$$p = \rho g h (1 - S_1^2/S^2). \tag{7}$$

Esta expresión se obtiene de la fórmula (6) al poner en ella el valor de la velocidad v de (4). De (7) se desprende que la diferencia entre la presión p y la hidrostática se determina por la razón entre las áreas de las secciones del tubo principal S y del tubo S_1. Cuanto menor sea el consumo de agua, más próximo será el valor de la presión al de la hidrostática.

Ahora, consideremos que sucede en el tubo principal al cerrar el grifo. Primero supongamos que el orificio en el grifo se cierra al instante. En semejante caso, se produce el llamado golpe de ariete, durante el cual la presión crece bruscamente.

El líquido en movimiento por el tubo posee cierta cantidad de movimiento o impulso. Con el cierre instantáneo del grifo el agua en el conducto se ve obligada a frenarse. Todo líquido incompresible en absoluto se pararía de golpe. A su vez, esto conduciría al surgimiento de una fuerza de presión infinitamente grande sobre el obstáculo. Por esta razón, la representación de un líquido en absoluto incompresible no es aplicable en semejantes condiciones.

Aclaremos cómo transcurre el frenado del líquido teniendo en cuenta su compresibilidad. Ahora, al aparecer un obstáculo de forma inesperada, el líquido se para gradualmente, de modo que durante cierto tiempo Δt sólo se detiene aquella parte de él hasta la que tiene

tiempo de llegar la onda de compresión, que se propaga por el líquido, desde el grifo cerrado hacia el encuentro del flujo. Si podemos despreciar la deformación de las paredes del tubo al aumentar la presión, la onda de compresión se propaga a la velocidad igual a la del sonido u en el agua.

La fuerza F que actúa sobre la válvula del grifo, cerrado al instante, se puede calcular con ayuda de la ley de conservación del impulso. Como antes de cerrar el grifo el agua tenía la velocidad v, el impulso del agua que se paró en el transcurso del tiempo Δt, será igual a $\rho S u \Delta t v$. Por ello,

$$F\,\Delta t = \rho S u \Delta t v, \qquad (8)$$

de donde para la presión adicional $p_{gol} = F/S$, surgida con el golpe de ariete, obtenemos

$$p_{gol} = \rho u v.$$

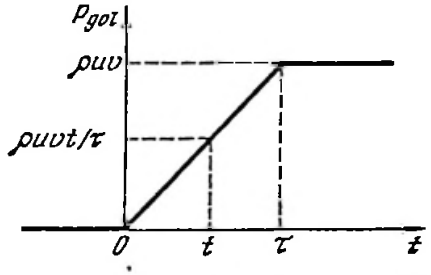


Fig. 6.2. Al cerrar lentamente el grifo la presión del golpe de ariete en la tubería crece gradualmente

Claro está que, en virtud de la ley de Pascal (¡el líquido se ha detenido!), semejante presión actúa sobre la válvula del grifo y las paredes del tubo principal. El aumento de la presión durante el golpe de ariete puede superar muchas veces el valor $\rho v^2/2$ que, de acuerdo con la fórmula (6), caracteriza la disminución de la presión con el movimiento estacionario del líquido. En efecto, la velocidad del sonido u en el agua, igual a unos 1,5 km/s, es mucho mayor que la del agua v en el tubo, que, por regla, no sobrepasa varias decenas de metros por segundo. La presión que surge con el cierre instantáneo del grifo, existirá hasta que la onda de compresión, en propagación a la velocidad del sonido, alcance el depósito y desde él vuelve la onda inversa que elimine la compresión del agua en el tubo principal.

Pasemos al caso en que el grifo se cierra paulatinamente, en el transcurso del tiempo τ. Ahora, la presión adicional del golpe de ariete surge no a salto, sino que crecerá de forma gradual. Aquí obtendremos diferentes resultados en función de la razón entre el tiempo τ y el tiempo de propagación de la onda de compresión del agua por toda la longitud del tubo principal.

Primero, consideremos un tubo principal de longitud infinita que se cierra en el transcurso del tiempo τ. Para mayor comodidad, supongamos que el área del orificio del grifo disminuye de modo que la presión crece con el tiempo según una ley lineal (fig. 6.2). Hacia el final del espacio de tiempo τ, cuando el orificio en el grifo queda cerrado por completo y la velocidad del agua en el tubo se anula, la presión del golpe de ariete alcanza su valor máximo, igual a ese

mismo valor ρuv, hasta el que la presión crece a salto cuando $\tau = 0$. Por esto, en el intervalo $0 < t < \tau$ la presión para el golpe de ariete variará de acuerdo con la ley

$$p_{gol}(t) = \rho uvt/\tau. \tag{9}$$

Claro está, todo esto es cierto si el caudal de agua por el grifo a cerrar, en el transcurso del tiempo τ, es mucho menor que el volumen del agua en el tubo que durante ese tiempo se detiene. Pero es posible despreciar el caudal de agua si $v \ll u$, de lo que es fácil cerciorarse con ayuda de la ecuación de continuidad (3).

Ahora, aclaremos hasta qué valor crecerá la presión en un tubo de longitud finita l. En el instante en que comenzamos a cerrar el grifo, la elevación de la presión que se forma en el grifo se propaga contra la corriente del líquido y, pasado el tiempo l/u, alcanza el depósito. Aquí la presión cae, pero el líquido junto al grifo queda comprimido hasta que a él llega del depósito la onda inversa que elimina la compresión del agua. Esta onda también se propaga a la velocidad del sonido en el agua u y su frente llega hasta el grifo pasado el intervalo de tiempo $T = 2l/u$ después del comienzo del cierre del grifo. Por ello, si $\tau < T$ la presión en el grifo tiene tiempo de crecer hasta el valor máximo ρuv, lo mismo que en el tubo infinito. Pero si el grifo se cierra tan despacio que $\tau > T$, como se desprende de la fórmula (9), el valor máximo de la presión durante el golpe de ariete es menor que ρuv:

$$p_{gol} = \rho uvT/\tau = 2\rho vl/\tau. \tag{10}$$

La brusca elevación de la presión en el conducto al cerrar el grifo con rapidez puede provocar la rotura de las paredes de los tubos o bien su deterioro. La fórmula (10) nos muestra con qué procedimiento es posible reducir la presión que surge con el golpe de ariete. Esto se alcanza o aumentando el tiempo de cierre τ, o bien disminuyendo la longitud del tubo l_2 expuesto a los golpes. Con este fin, a la tubería principal se unen ramales en forma de columnas de agua o de depósitos neumáticos.

Los fundamentos de la teoría del golpe de ariete fueron creados por el eminente científico ruso N. E. Zhukovski. ▲

7. Ariete hidráulico. En el modelo del conducto de agua, considerado en el problema anterior, el tubo principal, en el extremo antes del grifo, tiene una ramificación vertical en forma de un largo y fino tubo (fig. 7.1). ¿A qué nivel se establecerá el agua en dicho tubo con el grifo cerrado y abierto? ¿Qué sucederá en la ramificación al cerrar el grifo en el extremo del conducto?

△ Mientras el grifo está cerrado el arca de agua y la ramificación vertical son, simplemente, vasos comunicantes. Por ello, en la ramificación el agua se establece al mismo nivel h que en el depósito.

Cuando el grifo está abierto, el agua en el tubo principal se mueve a la velocidad v, determinada por el caudal de agua, es decir, por la magnitud de abertura del grifo. Esta velocidad puede variar desde cero hasta el valor máximo que se determina con la fórmula (4) del problema anterior. Como fue aclarado en el mencionado problema, la presión p en el tubo principal será, en tal caso, menor que la hidrostática en la magnitud $\rho v^2/2$:

$$p = \rho g h - \rho v^2/2. \tag{1}$$

Como el orificio inferior de la ramificación es paralelo a las líneas de corriente del agua en el tubo principal, aquélla se puede

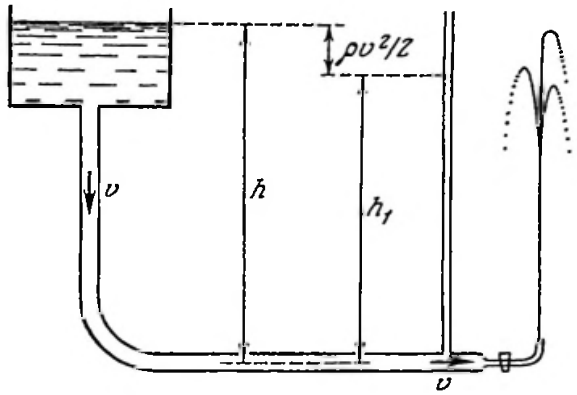


Fig. 7.1. Al moverse el agua por el tubo principal el nivel de agua en el tubo manométrico es inferior que el nivel en el recipiente

considerar como un tubo manométrico corriente, en el que la altura de la columna de agua h_1 corresponde, precisamente, a la presión p en su extremo inferior:

$$p = \rho g h_1. \tag{2}$$

Comparando las relaciones (1) y (2), vemos que al abrir el grifo el nivel del agua en el tubo fino vertical se encontrará por debajo del nivel del agua en el depósito en la magnitud $\rho v^2/2$ (fig. 7.1).

Ahora, aclaremos qué ocurrirá en la ramificación al cerrar el grifo. Como vimos, en tal caso tiene lugar un golpe de ariete y la presión del agua en el tubo principal crece bruscamente. Si consideramos que el grifo cierra el tubo al instante (con mayor precisión, el tiempo de cierre τ es menor que $2l/u$, donde l es la longitud del tubo principal y u, la velocidad del sonido en el agua), la presión crece de golpe en la magnitud $\rho u v$. Esto permite apreciar a qué altura h_2 puede subir el nivel del agua en el tubo fino:

$$\rho u v = \rho g h_2, \tag{3}$$

de donde $h_2 = uv/g$. Remarquemos que la estimación aducida sólo es cierta en el caso en que la sección transversal de la ramificación es mucho menor que la sección del tubo principal. Con ello, durante el golpe de ariete, el caudal de agua por la ramificación será despreciablemente pequeño y, por esto, semejante dispositivo no puede servir de columna de agua que amortigüe el golpe de ariete.

La elevación adicional del nivel del agua en la magnitud h_2 puede ser muy considerable, superar en mucho el nivel del agua h en el

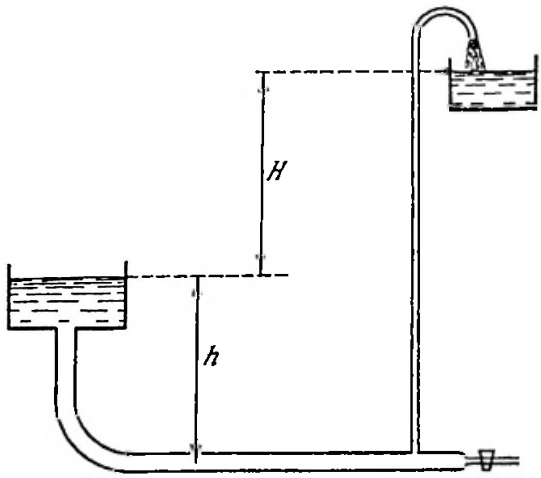


Fig. 7.2. Al cerrar el grifo el agua asciende al depósito superior

depósito. Por esta razón, tal dispositivo puede emplearse para alimentar el agua a gran altura (fig. 7.2). Semejante «ariete hidráulico» trabajará por impulsos aislados elevando, cada vez, una porción de agua al depósito superior. El aumento de la energía potencial del agua que se eleva se produce aquí a cuenta de la energía cinética del agua en el tubo principal que se detiene al cerrar el grifo. Es evidente que el rendimiento del ariete hidráulico será tanto menor, cuanto mayor sea la altura a la que se eleva el agua. ▲

8. **Caída estacionaria en el seno de un líquido.** Dos bolas de iguales dimensiones, pero de diferentes masas m_1 y m_2, están unidas con un hilo cuya longitud es mucho mayor que sus radios. Al echar este sistema de bolas al agua, él se hunde. ¿Cuál será la fuerza de tensión del hilo que une las bolas durante su caída estacionaria en el líquido?

△ En el planteamiento del problema se aducen muy pocos datos con el fin de describir con plenitud el movimiento de las bolas en el líquido. P. ej., para hallar la velocidad de la caída estacionaria incluso de una bola, sería necesario conocer, además de su masa, su

dimensión, la densidad del líquido y la dependencia entre la fuerza de la resistencia y la velocidad. Entonces, igualando a cero la suma vectorial de la fuerza de la gravedad, la fuerza total de la presión del líquido y la fuerza de su resistencia sería posible determinar la velocidad de la caída estacionaria. Pero ahora, lo único que podemos decir es que la velocidad de la caída estacionaria de la bola pesada es mayor que la de la ligera. Es más, no podemos aquí determinar la velocidad de las bolas unidas, ya que en el planteamiento sólo se han prefijado sus masas.

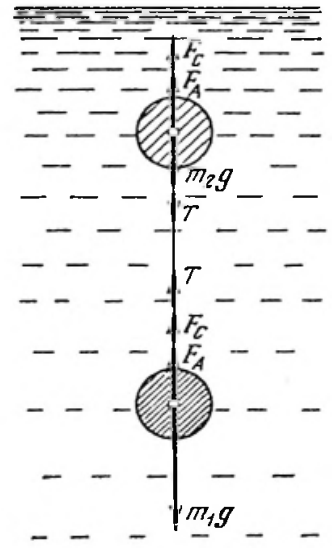


Fig. 8.1. Fuerzas que actúan sobre las bolas enlazadas durante su movimiento estacionario en un líquido

Pero lo que si podemos hallar es la fuerza de tensión del hilo que une las bolas. Podía pensarse que en este caso nada se puede hacer si no conocemos la fuerza de resistencia, más la cuestión radica en que durante el movimiento conjunto de dichas bolas unidas a la misma velocidad, las fuerzas de resistencia que sobre ellas actúan son iguales. Para que dicha velocidad de caída se vuelva estacionaria en realidad sólo es necesario que la fuerza de resistencia crezca al aumentar la velocidad, con la particularidad de que es indiferente a qué ley se supedita: lineal, cuadrática, etc.

Está claro en absoluto que para cualesquiera condiciones iniciales, el hilo que une las bolas, después de que el movimiento se vuelva estacionario, se dispondrá verticalmente de forma que la bola más pesada estará debajo. Por ello, la fuerza de tensión del hilo T, lo mismo que las fuerzas de la gravedad m_1g y m_2g, las fuerzas de empuje F_A y las fuerzas de resistencia F_r, que actúan sobre las bolas, están dirigidas verticalmente (fig. 8.1). La condición del movimiento uniforme de la bola inferior tiene la forma

$$m_1g - T - F_A - F_r = 0. \tag{1}$$

Por analogía, para la bola superior

$$m_2g + T - F_A - F_r = 0. \tag{2}$$

Sustrayendo la ecuación (2) de la (1), obtenemos

$$T = (m_1 - m_2)\, g/2. \tag{3}$$

Es fácil comprender que la fuerza de tensión del hilo será también la misma durante el proceso estacionario de emergencia, si las bolas unidas son más ligeras que el agua. ▲

9. Frenado en un líquido viscoso. El motor de un buque fue parado en el momento cuando la velocidad de la nave era igual a v_0. ¿Qué recorrido y en el transcurso de qué tiempo se desplazará el buque hasta la parada total, si su masa efectiva (que incluye la masa asociada, véase el problema 2 del capítulo «Dinámica y las leyes de la conservación») es igual a m, en tanto que la fuerza de resistencia es proporcional a la velocidad: $F = -kv$?

△ Al desplazarse un sólido por un líquido, la fuerza de resistencia es proporcional a la velocidad del sólido en caso de que la resistencia al movimiento esté condicionada, en lo fundamental, por la viscosidad del líquido. Esto tiene lugar a velocidades comparativamente pequeñas del sólido con relación al líquido. El coeficiente de proporcionalidad k entre la fuerza de resistencia y la velocidad depende, en este caso, de la forma del sólido y es proporcional a la viscosidad del líquido y a las dimensiones lineales del sólido en la dirección del movimiento. En nuestro problema el coeficiente k tiene valor prefijado.

Examinemos el movimiento del buque sólo bajo el efecto de la fuerza de resistencia. En correspondencia con la segunda ley de Newton

$$ma = -kv. \tag{1}$$

Considerando este movimiento en el transcurso de un intervalo de tiempo Δt, suficientemente pequeño, podemos representar la velocidad y la aceleración del buque en forma de las razones $v = \Delta x/\Delta t$, $a = \Delta v/\Delta t$. Entonces, la ecuación (1) se puede anotar en la forma

$$m\Delta v/\Delta t = -k\Delta x/\Delta t. \tag{2}$$

Simplificando ambos miembros de (2) en una misma magnitud Δt, obtenemos la relación que liga la variación de la velocidad del buque Δv con la variación de su posición Δx en el transcurso de un mismo intervalo de tiempo:

$$\Delta v = -\frac{k}{m}\Delta x. \tag{3}$$

Como k/m es una magnitud constante (ella no depende ni de la posición del buque, ni del tiempo), la relación (3) es cierta no sólo para pequeños intervalos de tiempo Δt, sino también para cualesquiera grandes intervalos. Por esta razón, la dependencia entre la velocidad de la nave v y su posición, caracterizada por la coordenada x, se expresa con la función lineal

$$v(x) = v_0 - \frac{k}{m}x. \tag{4}$$

Ella se muestra en la fig. 9.1. En el momento inicial, cuando $x = 0$, la velocidad del buque es igual a v_0. Cuando la nave cubra todo el recorrido l, su velocidad se anulará. El camino recorrido l se puede hallar haciendo en (4) $v = 0$:

$$l = \frac{m}{k} v_0. \tag{5}$$

¿Cómo varía la velocidad del buque en el transcurso del tiempo? Podremos dar respuesta a esta pregunta si en la ecuación de la se-

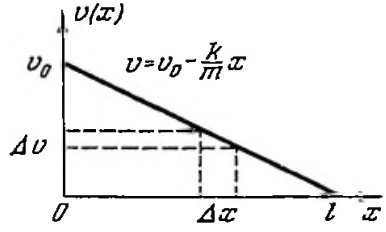


Fig. 9.1. Dependencia entre la velocidad de la nave y su posición

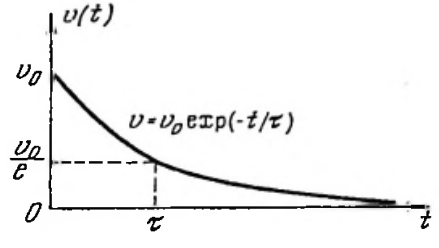


Fig. 9.2. La velocidad de la nave como función del tiempo

gunda ley de Newton (1) ponemos la aceleración a como derivada de la velocidad respecto al tiempo:

$$mdv/dt = -kv. \tag{6}$$

Esta es una ecuación diferencial para la función $v(t)$ de acuerdo con la cual la derivada dv/dt es proporcional a la propia función. La solución de semejante ecuación es la función exponencial

$$v(t) = C \exp\left(-\frac{k}{m} t\right). \tag{7}$$

La constante C es igual al valor de la velocidad en el momento inicial con $t = 0$. Por ello,

$$v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{k}{m} t\right). \tag{8}$$

La gráfica de esta función se ofrece en la fig. 9.2. Primero, la velocidad del buque decrece con rapidez y, a continuación, cada vez más despacio aproximándose asintóticamente al valor $v = 0$. Hablando en rigor, la velocidad sólo se anulará después de un intervalo infinitamente grande de tiempo. Sin embargo, casi toda esa «infinidad» corresponde al tiempo de «hacer llegar» la velocidad hasta cero. Su fundamental variación se produce en un intervalo finito de tiempo. Con tales procesos que se amortiguan exponencialmente y que, de modo formal, transcurren en un tiempo infinitamente largo, se tropieza con frecuencia en física. P. ej., en correspondencia con semejante ley se produce el fenómeno de la desintegración radiactiva.

La duración efectiva del proceso del amortiguamiento exponencial se suele caracterizar por el tiempo en el transcurso del cual la magnitud en amortiguamiento disminuye un número determinado de veces, p. ej., dos veces (período de semidesintegración). Por regla, en física se introduce el tiempo τ durante el cual se produce la disminución de la magnitud que se amortigua e veces. Precisamente ese tiempo τ recibe el nombre convencional de duración del proceso. Como se desprende de la fórmula (8), en este sentido, el tiempo τ de movimiento del buque es igual a m/k. Con el fin de hallarlo, simplemente hay que igualar el grado del exponente a menos la unidad.

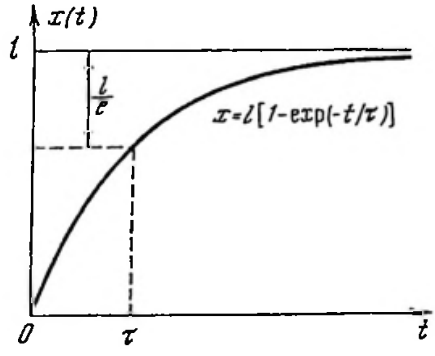


Fig. 9.3. Coordenada de la nave como función del tiempo

La dependencia entre la posición del buque y tiempo $x(t)$ la podemos hallar de la relación (4) si en ella ponemos la velocidad como función del tiempo de la fórmula (8). Teniendo en cuenta que según (5) $mv_0/k = l$, obtenemos

$$x(t) = l\left[1 - \exp\left(-\frac{k}{m}t\right)\right].$$

La gráfica de esta función se muestra en la fig. 9.3. Aunque el movimiento del buque transcurre un tiempo infinitamente grande, el recorrido l cubierto por él es finito. La parte fundamental de dicho recorrido es cubierto por el buque durante el tiempo τ.

En este problema hemos considerado un ejemplo cuando el movimiento transcurría sólo bajo el efecto de las fuerzas de resistencia. En ocasiones, es preciso analizar casos en los que, además de las fuerzas de resistencia, actúan asimismo otras fuerzas. P. ej., es posible resolver el problema acerca de la aceleración de un buque bajo el efecto de la fuerza constante de empuje de las hélices, teniendo en cuenta la resistencia del agua. Con ello, el tiempo de aceleración del buque formalmente será infinito. No obstante, para los momentos de tiempo $t \gg \tau$ podemos considerar que el proceso de aceleración del buque ha finalizado y él se desplaza a velocidad constante v_∞, cuyo valor se determina de las condiciones de igualdad de la fuerza de empuje y de la fuerza de resistencia. Pero la duración del tiempo de aceleración τ no depende de la fuerza de empuje y se determina por los mismos parámetros m y k que los del ejemplo examinado: $\tau = m/k$. ▲

V. FÍSICA MOLECULAR Y TERMODINÁMICA

Las propiedades físicas de sistemas compuestos de gran cantidad de partículas (átomos y moléculas) son el objeto que estudian la física molecular y la termodinámica. Todo sistema macroscópico contiene una enorme cantidad de partículas. P. ej., a condiciones normales en 1 cm^3 de aire hay $2{,}7 \cdot 10^{19}$ moléculas. Por esta razón, vemos con claridad que no tiene ninguna perspectiva la aplicación de las leyes de dinámica con el fin de hallar las características microscópicas de dicho sistema, es decir, las coordenadas y velocidades de todas las moléculas. Además, no tenemos la necesidad de tan detallada información acerca del sistema que consideramos.

Para hallar respuesta a muchas preguntas es suficiente conocer no la conducta de moléculas por separado, sino sólo los parámetros macroscópicos que caracterizan el estado de todo el sistema. Estos parámetros son, p. ej., el volumen del sistema, su masa, energía total. Si el sistema se encuentra en equilibrio, él se caracteriza también por tales parámetros como la presión y la temperatura. El valor de los parámetros macroscópicos queda determinado no por la conducta de moléculas aisladas, sino por el resultado medio al que conduce su movimiento conjunto, es decir, por los valores medios de los parámetros microscópicos.

La tarea de la teoría cineticomolecular (mecánica estadística) consiste en establecer la relación entre los parámetros macroscópicos del sistema y los valores medios de las magnitudes microscópicas y ofrecer el procedimiento para calcular dichos parámetros medios, partiendo de las leyes de movimiento de partículas individuales. P. ej., para un mol de gas perfecto la teoría cinetico-molecular establece la relación entre el producto de dos parámetros macroscópicos del gas, la presión p y el volumen molar V_μ, y el valor medio $\langle E \rangle$ del parámetro microscópico E, es decir, la energía cinética del movimiento térmico caótico de una molécula:

$$pV_\mu = \frac{2}{3} \langle E \rangle N_A, \tag{1}$$

donde N_A es la constante de Avogadro.

De manera histórica se ha formado otro enfoque del estudio de sistemas compuestos de gran número de partículas. En él el establecimiento de las relaciones entre diversos parámetros macroscópicos se realiza por vía experimental. P. ej., para un mol de gas perfecto se ha establecido por vía experimental la siguiente relación entre tres parámetros macroscópicos: la presión, el volumen molar y la temperatura termodinámica del gas

$$pV_\mu = RT, \tag{2}$$

donde R es la constante de los gases. Semejante enfoque empírico es característico para la termodinámica.

La base de la termodinámica son varias leyes físicas establecidas por vía experimental. El primer principio de la termodinámica es la ley generalizada de la conservación de la energía: la energía de un sistema macroscópico puede variar tanto a consecuencia del trabajo de las fuerzas externas, como al comuni-

carle calor. Si consideramos que la energía mecánica del sistema es invariable, el primer principio de termodinámica afirma que la variación de la energía interna del sistema ΔU al pasar de un estado a otro es igual a la suma de los trabajos de las fuerzas externas $\Delta A'$ y de la cantidad de calor ΔQ transmitida al sistema:

$$\Delta U = \Delta A' + \Delta Q. \quad (3)$$

El segundo principio de la termodinámica está ligado a la irreversibilidad de los procesos reales en los sistemas macroscópicos e indica la dirección de las transformaciones energéticas posibles.

En los márgenes de termodinámica no se revela el profundo sentido físico de los parámetros macroscópicos del sistema, o sea, su relación con los valores medios de los parámetros microscópicos. No obstante, gracias a esta circunstancia los principios fundamentales de la termodinámica, establecidos por vía experimental, se distinguen por su extensa generalidad y son aplicables a todos los sistemas macroscópicos, independientemente de las singularidades de su estructura interna.

Nos ofrece las representaciones más completas acerca de las propiedades de sistemas con gran número de partículas el empleo conjunto de la termodinámica y la mecánica estadística. P. ej., la comparación de las fórmulas (1) y (2) nos da la posibilidad de establecer el sentido físico del parámetro macroscópico llamado temperatura termodinámica T:

$$\langle E \rangle = \frac{3}{2} kT, \quad k = \frac{R}{N_A},$$

así como obtener una cómoda expresión para la presión de un gas perfecto

$$p = nkT, \quad n = N_A/V_\mu.$$

Así pues, la presión de un gas perfecto se determina por el número medio de partículas en unidad de volumen n y la temperatura termodinámica.

Para resolver muchos problemas es idóneo escribir el primer principio de la termodinámica en una forma distinta de la expresión (3):

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A,$$

es decir, la cantidad de calor ΔQ, transmitida al sistema, es igual a la suma de las variaciones de la energía interna ΔU y del trabajo ΔA realizado por el sistema (ΔA es el trabajo que realizan las fuerzas aplicadas a los cuerpos externos por parte del sistema que consideramos). Desde el punto de vista histórico, el primer principio de la termodinámica fue enunciado por vez primera, precisamente, en tal forma.

1. Barómetro de mercurio deteriorado. En el tubo de un barómetro de mercurio ha penetrado una burbuja de aire. En virtud de esto, para cierta presión atmosférica p_0 y temperatura T_0 la altura de la columna de mercurio en el tubo disminuyó y resultó igual a H_1. ¿A qué es igual la presión atmosférica si a la temperatura T la altura de la columna de mercurio resultó ser igual a H? El tubo tiene forma cilíndrica correcta y la distancia desde el nivel del mercurio hasta el extremo cerrado del tubo es igual a L.

△ En un barómetro de mercurio no deteriorado, el tubo cerrado, no contiene aire sobre el mercurio en el «vacío de Torricelli», en éste sólo hay vapores saturados de mercurio, cuya presión, a temperaturas habituales, es despreciablemente pequeña. Por ello, durante las variaciones de la presión atmosférica ella no se toma en considera-

ción. La cuestión varía por completo si en el barómetro penetra una burbuja de aire. En tal caso, ya hay que tener en cuenta la presión del aire en el tubo. Pero esto no significa, de modo alguno, que tal barómetro no sirve para medir la presión atmosférica. Es suficiente medir en él una sola vez la altura de la columna de mercurio con la presión atmosférica y la temperatura conocidas, para que sea posible obtener la fórmula para determinar, según sus indicaciones, la presión atmosférica verdadera.

Si para la presión atmosférica p_0 la altura de la columna de mercurio es igual a H_1 (fig. 1.1), la presión p_0 es igual a la suma de la presión del aire en el tubo sobre el mercurio p_1 y la presión hidrostática de la columna de mercurio de altura H_1. Si medimos la presión del aire, lo mismo que la presión hidrostática, directamente en milímetros de la columna de mercurio, tendremos

$$p_0 = p_1 + H_1. \qquad (1)$$

Una relación exactamente igual se puede asimismo escribir para la presión atmosférica a medir p_{atm} en el caso cuando la indicación del barómetro deteriorado es igual a H:

$$p_{atm} = p + H, \qquad (2)$$

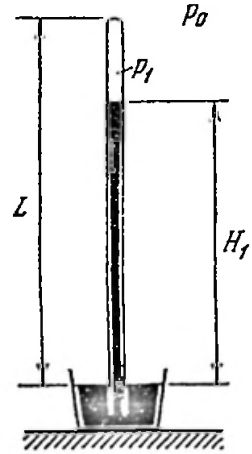


Fig. 1.1. La presión atmosférica es igual a la suma de la presión del aire en el tubo y la presión hidrostática de la columna de mercurio

donde p es la presión del aire en el tubo sobre la columna de mercurio de la altura H. Ahora, considerando que el aire en el tubo es un gas perfecto podemos hacer uso de la ecuación de su estado. Como la masa del aire que ha penetrado en el tubo en adelante no varía y la sección del tubo es igual por toda su longitud,

$$\frac{p_1 (L - H_1)}{T_1} = \frac{p (L - H)}{T}. \qquad (3)$$

Poniendo en la relación (3) el valor de p_1 de la ecuación (1), hallamos

$$p = (p_0 - H_1) \frac{L - H_1}{L - H} \frac{T}{T_1}. \qquad (4)$$

La fórmula (4) proporciona la corrección que, como se desprende de la ecuación (2), hay que adicionar a las indicaciones del barómetro H, para obtener el valor verdadero de la presión atmosférica p_{atm}. Es cómodo escribir la fórmula para calcular p_{atm} en la forma

$$p_{atm} = H + \frac{T}{L - H} C, \text{ donde } C = (p_0 - H_1) \frac{L - H_1}{T_1}. \qquad (5)$$

El valor mínimo de la constante C puede ser calculado de antemano una vez para siempre. Este instrumento se puede utilizar, pero para hallar la presión atmosférica hay que emplear, además, un termómetro. ▲

2. Bomba de vacío. Tenemos un recipiente de volumen V y una bomba de émbolo con volumen de la cámara V' (fig. 2.1.) ¿Cuántos bombeos hay que hacer para que la presión en el recipiente disminuya desde p hasta p'? La presión atmosférica es igual a p_0. La variación de la temperatura se desprecia.

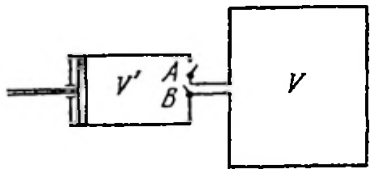


Fig. 2.1. Esquema de una bomba de vacío de émbolo

△ Como es natural, consideramos que la presión inicial p no supera la presión externa p_0, ya que, de lo contrario, al principio se puede dejar salir el exceso de gas.

Este problema se puede resolver empleando la ley de Boyle—Mariotte, aunque en el proceso de vaciado varía la masa del gas en el recipiente. En efecto, examinemos la primera carrera del émbolo a la izquierda; con ello, la válvula A está cerrada, la válvula B, abierta y el gas del recipiente entra en la cámara de la bomba. La presión del gas disminuye desde el valor inicial hasta cierta p_1. Como el proceso es isotérmico y, con ello, la masa del gas no varía, es posible emplear la ley de Boyle—Mariotte:

$$pV = p_1 (V + V'). \tag{1}$$

Durante la carrera inversa del émbolo la válvula B se cierra y el aire de la cámara de la bomba se expulsa al exterior por la válvula A. Con la segunda carrera del émbolo a la izquierda todo se repite de la misma manera, sólo que la presión en el recipiente en el comienzo de la carrera es igual a p_1. Designando la presión en el final de la segunda carrera con p_2, tenemos

$$p_1 V = p_2 (V + V').$$

Poniendo aquí p_1 de la ecuación (1), hallamos

$$p_2 = p \left(\frac{V}{V+V'}\right)^2.$$

A continuación, razonando del mismo modo, es fácil cerciorarse de que después de n carreras del émbolo, la presión en el recipiente será igual a

$$p_n = p \left(\frac{V}{V+V'}\right)^n. \tag{2}$$

Con ayuda de la fórmula (2) se determina el número de carreras del émbolo n necesario para reducir la presión en el recipiente hasta el valor $p_n = p'$:

$$n = \frac{\log (p'/p)}{\log [V/(V+V')]}.$$

Es de interés construir la gráfica de la dependencia entre la presión en el recipiente y el número de carreras del émbolo n. Ésta es la gráfica de la función exponencial con la base $V/(V + V') < 1$ (fig. 2.2). Presten atención a que la presión disminuye en cada paso en un valor cada vez menor. Reflexionen cómo hay que operar si la presión requerida final p' no coincide con ninguno de los valores de p_n determinados con la fórmula (2).

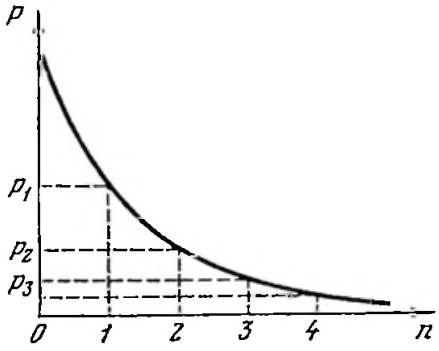


Fig. 2.2. Dependencia entre la presión en el recipiente que se vacía y el número de carreras del émbolo

De acuerdo con esta última, a medida que se efectúa la evacuación, la presión del aire en el recipiente decrece y con un número infinitamente grande de carreras del émbolo n puede alcanzar valores tan pequeños como se quiera. Sin embargo, en realidad, no existe tal bomba que pueda evacuar el aire del recipiente por completo, de modo que en él la presión se anule. Para cada bomba existe cierta presión $p_{mín}$ por debajo de la cual aquélla no puede crear enrarecimiento. La causa de esto radica en la presencia de espacios nocivos, el funcionamiento no ideal de las válvulas, etc. P. ej., cuando el émbolo de la bomba se desplaza a la derecha, expulsando a la atmósfera el aire de la cámara, entre el émbolo y la válvula queda, inevitablemente, un volumen ΔV que, aun siendo muy pequeño, es finito. Por ello, no todo el aire de la cámara será expulsado a la atmósfera. Este hecho lleva a que la evacuación se retarda y, a fin de cuentas, a que, con cierta presión en el recipiente, la bomba comienza a funcionar en vacío. En efecto, para la presión $p_{mín}$ en el recipiente el aire, comprimido desde el volumen inicial de la cámara V' hasta el volumen ΔV, tendrá una presión no mayor que la atmosférica p_0 y no puede salir al exterior. Así pues, para determinar la presión condicionada por la presencia del espacio nocivo, podemos escribir la condición

$$p_{mín} V' = p_0 \Delta V, \text{ de donde } p_{mín} = p_0 \Delta V/V'. \quad (3)$$

Por regla, con el fin de obtener grandes enrarecimientos se emplean varias bombas unidas en serie. La bomba de cada siguiente etapa

expulsa el aire no a la atmósfera, sino al volumen del cual el aire se evacua con la bomba de la anterior etapa. ▲

3. Oscilaciones del émbolo. Un recipiente cilíndrico, situado en posición horizontal y que contiene un gas perfecto, está dividido con un émbolo que puede desplazarse sin rozamiento. En equilibrio el émbolo se encuentra en el centro del cilindro. Con pequeños desplazamientos de la posición de equilibrio el émbolo realiza oscilaciones. Hallen la dependencia entre la frecuencia de dichas oscilaciones y la temperatura considerando que el proceso es isotérmico.

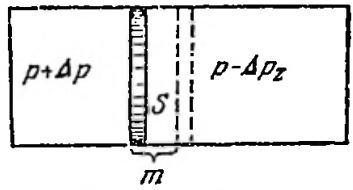


Fig. 3.1. Variación de la presión al desplazar el émbolo de la posición de equilibrio

△ En la posición de equilibrio la presión p sobre el émbolo es igual por la izquierda y por la derecha. Como el volumen del gas es igual por la izquierda y por la derecha, en tanto que la temperatura T es constante, de la ecuación de Mendeléiev—Clapeyron

$$pV = \nu RT \tag{1}$$

se desprende que la cantidad de gas ν es igual por ambos lados del émbolo. Señalemos que la composición química de los gases puede ser diferente.

Supongamos que el émbolo se ha desplazado de la posición de equilibrio, p. ej., a la izquierda, en la pequeña magnitud x, de modo que $Sx \ll V$, donde S es el área del émbolo (fig. 3.1). Como de acuerdo con el planteamiento la temperatura no varía, tendremos

$$(p + \Delta p_1)(V - Sx) = (p - \Delta p_2)(V + Sx).$$

Después de abrir los paréntesis y reduciendo los términos semejantes, obtenemos

$$(\Delta p_1 + \Delta p_2) V - (\Delta p_1 - \Delta p_2) Sx = 2pSx.$$

El segundo sumando en el primer miembro es mucho menor que el primero no sólo porque $Sx \ll V$, sino también en virtud de que como factor de V figura la suma de las magnitudes próximas Δp_1 y Δp_2, en tanto que como factor de Sx, su diferencia. Despreciando el segundo sumando, obtenemos

$$\Delta p_1 + \Delta p_2 = \frac{2pS}{V} x.$$

La fuerza resultante que actúa sobre el émbolo es igual a

$$F = -\frac{2pS^2}{V} x.$$

El signo menos significa que la fuerza está dirigida en sentido opuesto al desplazamiento del émbolo, es decir, hacia la posición de equilibrio. Bajo el efecto de una fuerza proporcional al desplazamiento, el émbolo de masa M realizará oscilaciones armónicas de una frecuencia ω que se determina por la relación

$$\omega^2 = 2pS^2/VM. \qquad (2)$$

Durante la resolución del problema hemos supuesto tácitamente que la masa del gas es mucho menor que la del émbolo, de modo que, en comparación con la energía cinética del émbolo, la del movimiento macroscópico del gas, al oscilar el émbolo, puede ser despreciada. Reflexionen dónde se aplicó esta condición.

Expresando p de la ecuación de Mendeléiev—Clapeyron (1), obtenemos

$$\omega^2 = \frac{2\nu RS^2}{MV^2} T. \qquad (3)$$

Así pues, la frecuencia de las oscilaciones del émbolo es proporcional a $\sqrt{T}$, ya que en la fórmula (3) el coeficiente de T no depende de la temperatura si se desprecia la dilatación térmica del recipiente.

Ahora, reflexionemos acerca de las condiciones que han de verificarse para que, en realidad, el proceso sea isotérmico. Con el fin de que no varíe la temperatura del gas durante el proceso de las oscilaciones, es preciso que sea bueno el contacto térmico con un recipiente térmico grande, es decir, con un termostato que tenga temperatura constante. ¿Qué significa un contacto térmico bueno? Esto quiere decir que el tiempo necesario para el establecimiento del equilibrio termodinámico entre el gas en el recipiente y el termostato debe ser mucho menor que el período de las oscilaciones del émbolo. Entonces, es posible considerar que, en cada momento, el gas tiene la misma temperatura que el termostato. Si a la inversa, el período de las oscilaciones es mucho menor que el tiempo necesario para que se establezca el equilibrio termodinámico entre el gas y el termostato, podemos considerar que las oscilaciones del émbolo transcurren, prácticamente, sin intercambio de calor con el termostato. En tal caso, podemos considerar que el proceso es adiabático, a pesar de que no hay aislamiento térmico entre el recipiente y el émbolo. Con ello, resulta que la dependencia entre la frecuencia de las oscilaciones y la temperatura será la misma que en el caso isotérmico, con la sola diferencia de que el coeficiente en la fórmula (3) se multiplicará por un número mayor que la unidad. El aumento de la frecuencia de las oscilaciones con el proceso adiabático se puede explicar comparando el diagrama $p - V$ de los procesos isotérmico y adiabático de un gas perfecto.

Señalemos que la solución aducida tiene sentido en ambos casos, sólo si el tiempo de establecimiento del equilibrio térmico en el pro-

pio gas es mucho menor que el período de las oscilaciones del émbolo, ya que en caso contrario pierden su sentido tales características macroscópicas de equilibrio del gas como la presión y la temperatura. Con otras palabras, en relación con el propio gas el proceso debe ser casiestático. ▲

4. Un émbolo en un cilindro cerrado. En un cilindro vertical cerrado hay un émbolo que puede desplazarse sin rozamiento (fig.4.1). Por ambos lados del émbolo se encuentran iguales masas de un mismo gas. A la temperatura T, igual por todo el cilindro, el volumen de la parte superior es n veces mayor que el volumen de la inferior. ¿Cuál será la razón entre dichos volúmenes si elevamos la temperatura hasta el valor T'?

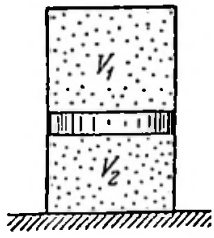


Fig. 4.1. Por ambos lados del émbolo móvil se encuentran iguales masas de un mismo gas

△ Analizando este problema, podemos apreciar lo importante que es saber expresar en forma de ecuaciones aquellas condiciones bajo las que se produce el proceso descrito en el problema, pero que en el planteamiento no se indican explícitamente.

La primera pregunta que surge es la siguiente: ¿será necesario tomar en consideración la masa del émbolo acerca de la cual nada se dice en el planteamiento? Si dicha masa fuera igual a cero, a cualquier temperatura el émbolo se dispondría en equilibrio en el centro, de modo que la presión del gas fuese igual por sus dos lados. Por ello, si $n = 1$, la masa del émbolo es igual a cero y la razón de los volúmenes, igual a la unidad, no cambia al variar la temperatura.

Si $n > 1$ la masa del émbolo no es igual a cero. En semejante caso, en equilibrio, la fuerza de la gravedad que actúa sobre el émbolo, se compensa por la acción de las fuerzas de presión del gas por arriba y abajo. Por ello, la diferencia de las presiones del gas en las partes superior e inferior del cilindro tiene un mismo valor a cualquier temperatura. Así pues, llegamos a la primera ecuación que refleja la condición del equilibrio mecánico del émbolo en los estados inicial y final. Designando la presión del gas sobre y debajo del émbolo a la temperatura T con p_1 y p_2 y a la temperatura T' con p_1' y p_2', tenemos

$$p_2 - p_1 = p_2' - p_1'. \tag{1}$$

Obtenemos una ecuación más partiendo de la condición de que con cualquier posición del émbolo el volumen total del cilindro, ocupado por los gases, tiene un mismo valor, ya que, claro está, la dilatación térmica de las paredes se puede despreciar:

$$V_1 + V_2 = V_1' + V_2', \tag{2}$$

donde V_1 y V_2 son los volúmenes de las partes superior e inferior del cilindro a la temperatura T, mientras que V_1' y V_2', a la T'.

Remarquemos una vez más que las ecuaciones (1) y (2) describen aquellas condiciones que no fueron estipuladas explícitamente en el problema, pero que se deben tener obligatoriamente en cuenta al resolverlo.

A las ecuaciones (1) y (2) hay que añadir las ecuaciones de estado del gas por ambos lados del émbolo. Ya que tanto en el estado inicial, como en el estado final la cantidad de gas en ambas partes del recipiente son iguales y el gas tiene la misma temperatura, resulta que

$$p_1V_1 = p_2V_2, \quad p_1'V_1' = p_2'V_2'. \tag{3}$$

Según el planteamiento del problema, la razón $V_1/V_2 = n$. Por ello, es idóneo introducir la magnitud x igual a la razón de los volúmenes en el estado final ($x = V_1'/V_2'$). Ahora, con ayuda de la ecuación (3), obtenemos

$$p_2/p_1 = n, \quad p_2'/p_1' = x. \tag{4}$$

Haciendo uso de las designaciones para las magnitudes n y x y las relaciones (4), anotamos las ecuaciones (1) y (2) en tal forma que ellas sólo contengan las magnitudes que se refieren al gas sobre el émbolo:

$$p_1(n-1) = p_1'(x-1), \quad V_1\left(1+\frac{1}{n}\right) = V_1'\left(1+\frac{1}{x}\right). \tag{5}$$

Ahora, es fácil comprender que para seguir la resolución es conveniente multiplicar las ecuaciones (5), miembro por miembro:

$$p_1V_1(n-1)\left(1+\frac{1}{n}\right) = p_1'V_1'(x-1)\left(1+\frac{1}{x}\right). \tag{6}$$

En efecto, los productos de la presión del gas por su volumen, que figuran en la ecuación (6), se expresan con ayuda de la ecuación de estado por intermedio de su temperatura:

$$\frac{p_1V_1}{T} = \frac{p_1'V_1'}{T'}. \tag{7}$$

Por ello, la ecuación (6) se puede anotar en la forma

$$\frac{T}{T'}\,\frac{n^2-1}{n} = \frac{x^2-1}{x}. \tag{8}$$

En el primer miembro de esta ecuación vemos las magnitudes dadas en el planteamiento del problema, es decir, hemos obtenido una ecuación cuadrática respecto a la magnitud buscada x. Incluso sin resolver esta ecuación podemos ver que ella describe correctamente los evidentes casos límites. Si $n = 1$, lo que corresponde a un émbolo imponderable, de (8) obtenemos $x = 1$, es decir, lo que debe ser. Para todo $n > 1$, cuando $T' \to \infty$ la magnitud $x \to 1$: a una tem-

peratura muy alta las presiones de los gases en ambas partes del cilindro son tan altas que, a pesar de la fuerza de la gravedad que actúa sobre el émbolo, los volúmenes de los gases sobre y debajo del émbolo son, prácticamente, iguales.

Es posible cerciorarse de que sólo tiene sentido físico una de las raíces de la ecuación (8), ya que la segunda es negativa:

$$x = a + \sqrt{a^2+1}, \text{ donde } a = \frac{T}{T'}\,\frac{n^2-1}{2n}.$$

Por cierto, ¿con qué está relacionada la aparición de una raíz superflua negativa? ▲

5. **Número de moléculas en la atmósfera.** Estimen el número de moléculas del aire en la atmósfera terrestre.

△ En el planteamiento del problema no hay ninguna clase de datos. Por lo tanto, se sobreentiende que el número de moléculas del aire en la atmósfera ha de expresarse con ayuda de las características bien conocidas de la atmósfera. ¿Qué sabemos de la atmósfera terrestre? Ante todo, que la presión del aire cerca de la superficie de la Tierra, al nivel del mar, por término medio, es igual a 760 mm Hg. Prácticamente, toda la atmósfera está constituida por moléculas de nitrógeno y oxígeno, con la particularidad de que la masa molar media del aire $\mu = 0{,}029$ kg/mol, por ello si conociéramos la masa de la atmósfera, sería fácil determinar el número de moléculas en ella.

¿Pero cómo estimar la masa de la atmósfera? «Por abajo» la atmósfera está limitada por la superficie terrestre, cuyo radio es igual a 6400 km. ¿Qué podemos considerar como la frontera «superior» de la atmósfera? La presión del aire decrece con la altura y, p.ej., a la altura de Elbrús[1]) (5,6 km) es igual sólo a la mitad de la presión a nivel del mar, es decir, la concentración de las moléculas es ya dos veces menor. Claro está, de lo dicho no se puede llegar a la conclusión de que a una altura dos veces mayor no hay en absoluto moléculas. Como sabemos, los aviones modernos, que emplean la fuerza sustentadora del ala, pueden volar a la altura de 30 km. Esto significa que allí todavía hay suficiente cantidad de aire. Pero el satélite que vuela a una altura algo mayor que 200 km no siente, prácticamente, la resistencia del aire, es decir, toda la masa de la atmósfera se concentra más abajo.

Veamos como varía la aceleración de la caída libre g en función de la altura dentro de los límites de la atmósfera:

$$g(h) = \frac{GM_T}{(R+h)^2} = \frac{g}{(1+h/R)^2} \approx g\left(1 - \frac{2h}{R}\right), \quad g \equiv g(0). \qquad (1)$$

[1] Cima culminante de la cordillera del Cáucaso (*N. del T.*)

En esta fórmula M_T es la masa de la Tierra; G, la constante gravitatoria universal.

Ya que la altura de la atmósfera, como hemos aclarado, constituye varias decenas de kilómetros, lo que es mucho menos que el radio de la Tierra R, la variación de g dentro de los límites de la atmósfera, como se desprende de (1), no sobrepasa del 2% y al realizar las estimaciones es posible considerar que la aceleración de la caída libre es constante. Por esta razón, la presión del aire p_0 al nivel del mar es numéricamente igual al peso de la columna de aire de base unitaria: $P = Mg$, donde M es la masa del aire en dicha columna.

La masa total de la atmósfera M_0 será obtenida al multiplicar M por el área de la superficie terrestre $S = 4\pi R^2$:

$$M_0 = \frac{P}{g} 4\pi R^2.$$

Dividiendo M_0 entre la masa molar media del aire μ, obtenemos el número de moles que contiene la atmósfera terrestre y, entonces, el número total de moléculas

$$N = \frac{M_0}{\mu} N_A = \frac{4\pi R^2 p_0}{\mu g} N_A, \qquad (2)$$

donde N_A es la constante de Avogadro. Expresando todas las magnitudes que entran en (2) en cualquiera de los sistemas de unidades, obtenemos $N \approx 10^{44}$.

Así pues, para calcular el número de moléculas del aire en la atmósfera terrestre, es sólo suficiente conocer la presión del aire al nivel del mar, la masa molar del aire, el radio de la Tierra y la aceleración de la caída libre g junto a su superficie. En la solución no entra la altura de la atmósfera, sólo es de importancia que ella sea pequeña en comparación con el radio de la Tierra. Resultó no tener absoluta importancia la temperatura del aire y su distribución por la atmósfera terrestre.

Al resolver este problema hicimos uso de que el espesor de la atmósfera es pequeño en comparación con el radio de la Tierra. Este hecho es bien conocido, pero resta la pregunta: ¿por qué esto es así, por qué la atmósfera terrestre está constituida precisamente de esta forma? Con objeto de responder a esta pregunta hay que conocer cómo depende de la altura la concentración de moléculas del aire.

La distribución de las moléculas de aire por la altura se halla con facilidad si suponemos que la atmósfera se encuentra en el estado de equilibrio termodinámico, es decir, la temperatura del aire T es igual por doquier. Como la presión del gas p está ligada con su concentración n con ayuda de la relación $p = nkT$, a temperatura constante la dependencia de la concentración y la presión respecto de la altura es la misma. Por ello, podemos buscar la dependencia entre la presión del aire y la altura. Mentalmente, separemos una capa

horizontal de aire a la altura h con el área de la base S, cuyo espesor Δh es tan pequeño que la densidad del aire ρ, dentro de los límites de dicha capa, puede considerarse constante. Al mismo tiempo, el espesor de la capa separada debe ser tal que dentro de ella haya una cantidad suficientemente grande de moléculas y se pueda hablar de la presión que ellas ejercen. Para semejante capa se puede aplicar la condición del equilibrio mecánico, considerando que la fuerza de la gravedad que sobre ella actúa se compensa con las fuerzas de presión en las bases superior e inferior por parte de las capas vecinas (fig. 5.1). Si designamos con p la presión del aire a la altura h, mientras que con $p + \Delta p$ a la altura $h + \Delta h$, la condición de equilibrio se escribirá en la forma

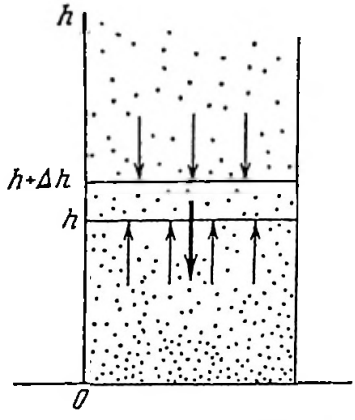


Fig. 5.1. Fuerzas que actúan en una capa de gas separada mentalmente en el campo de gravedad

$$pS - (p + \Delta p)\, S - \rho g S\, \Delta h = 0, \tag{3}$$

de donde

$$\Delta p = -\rho g\, \Delta h. \tag{4}$$

La densidad del aire ρ, que entra en la fórmula (4), se puede expresar mediante la presión con ayuda de la ecuación de Mendeléiev—Clapeyron:

$$\rho = \frac{\mu p}{RT}. \tag{5}$$

Poniendo ρ de (5) en la ecuación (4) y pasando en ella al límite $\Delta h \to 0$, obtenemos una ecuación diferencial para la función $p(h)$:

$$\frac{dp}{dh} = -\frac{\mu g}{RT}\, p. \tag{6}$$

De nuevo tropezamos con una ecuación en la que la derivada de la función buscada es proporcional a la propia función. La solución de esa ecuación es un exponente

$$p(h) = C \exp\left(-\frac{\mu g}{RT}\, h\right). \tag{7}$$

La constante C se determina de la condición de que la presión a altura nula $h = 0$ es igual a la presión atmosférica normal p_0:

$$p(h) = p_0 \exp\left(-\frac{\mu g}{RT}\, h\right). \tag{8}$$

La gráfica de esta función se ofrece en la fig. 5.2.

Poniendo en la fórmula (8) los valores $\mu = 0{,}029$ kg/mol, $g = 9{,}8$ m/s^2, $R = 8{,}31$ J/(mol·K), $T = 300$ K nos cercioramos de que la magnitud $RT/\mu g$, con dimensión de longitud, es igual a 8,8 km. A semejante altura la presión decrece $e = 2{,}72$ veces. Esto significa que la escala característica con la que varían la presión o la concentración por la altura constituye unos 10 km. A la altura de 100 km, de acuerdo con la fórmula (8), la presión del aire ya es, prácticamente, igual a cero. Así pues, la atmósfera de la Tierra es una fina cubierta alrededor del globo terráqueo.

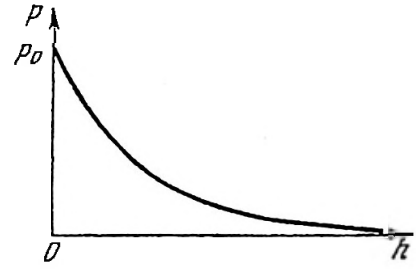


Fig. 5.2. Dependencia entre la presión del gas y la altura en el campo homogéneo de gravedad

La fórmula (8) sigue siendo cierta cuando el gas se encuentra en un recipiente cerrado ubicado en un campo homogéneo de la gravedad. En efecto, al deducir la fórmula (8) no se hizo por completo uso de la circunstancia de que la atmósfera es un gas en un recipiente abierto, sin «tapa» por arriba. Aplicando la fórmula (8) al gas en un recipiente cerrado, hay que considerar que p_0 es la presión que el gas ejerce sobre el fondo del recipiente. Como se desprende de (8), la presión contra la tapa será menor que p_0, de modo que la diferencia de las fuerzas de presión sobre el fondo y la tapa de un recipiente cilíndrico es, precisamente, igual al peso del gas en el recipiente.

Resumiendo, podemos decir que aunque la presión del gas está condicionada por los choques de las moléculas en movimiento caótico, en un recipiente abierto (en la atmósfera) ella se determina por el peso de la columna de gas. En este caso el campo de la gravedad desempeña el papel de esa «tapa» que obstaculiza la posibilidad de que el gas se propague por todo el volumen que se le ha concedido. ▲

6. Frenado de un satélite en las capas superiores de la atmósfera. Al resolver el problema acerca de la variación de los parámetros de la órbita de un satélite durante su frenado en las capas superiores de la atmósfera, no consideramos el propio mecanismo de frenado, ya que la pérdida de energía mecánica, relacionada con este proceso, fue prefijada en el planteamiento del problema. En este ejemplo vamos a examinar la causa del frenado del satélite y relacionaremos las pérdidas de energía con los parámetros de la atmósfera. Para mayor precisión, vamos a considerar que el satélite está en movimiento por una órbita circular a una altura $h = 200$ km, donde la densidad de la atmósfera ρ constituye unos $3 \cdot 10^{-9}$ kg/m^3. Estimemos la fuerza de rozamiento que actúa sobre el satélite cuya área de la sección transversal $S = 1$ m^2 y su masa, $M = 10^3$ kg.

△ ¿Cómo habrá que considerar el frenado del satélite en la atmósfera? ¿Será necesario considerar que el movimiento del satélite transcurre por un medio continuo o bien la interacción del satélite con la atmósfera se debe describir como el resultado de un gran número de choques aislados con las moléculas de aire?

Cuando un sólido se mueve en el seno de un medio continuo, cerca de su superficie se forma la llamada capa límite, en la que algunas propiedades del medio, tales como, p. ej., la velocidad de movimiento de las partículas del medio, se diferencian de las propiedades lejos del sólido, donde el medio ambiente queda no perturbado. En el transcurso de su movimiento el sólido arrastra las partículas del medio que se encuentran dentro de los márgenes de la capa límite. Las dimensiones de semejante capa son comparables con las del propio sólido. ¿Cuándo es justa tal representación?

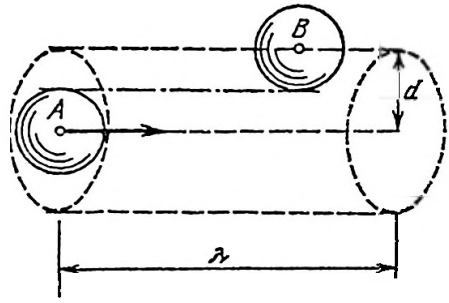


Fig. 6.1. Para la estimación de la longitud media de la carrera libre de las moléculas

En su movimiento caótico térmico las moléculas del medio chocan entre sí permanentemente. Si la distancia media que recorre la molécula entre dos choques consecutivos es mucho menor de las dimensiones del sólido, se puede emplear la representación de un medio continuo y hablar de la formación de la capa límite junto al sólido en movimiento.

Pero si la longitud media de la carrera libre de las moléculas del medio supera las dimensiones del sólido no se forma ninguna capa límite: cada una de las moléculas que choca con el sólido, hasta la siguiente colisión con otras moléculas, tiene tiempo para alejarse a tal distancia del sólido que, por parte de éste, ya no se somete a la menor influencia. Con otras palabras, el sólido en movimiento tropieza con las moléculas que hasta el choque «no sabían» nada acerca de dicho sólido, es decir, realizaban el movimiento característico para el estado de equilibrio del medio sin la presencia del sólido en movimiento. En tal caso, el frenado del sólido en el medio es el resultado de los choques con moléculas individuales.

Así pues, la elección de una u otra representación acerca del mecanismo físico del frenado del satélite en la atmósfera se determina por la relación entre sus dimensiones y la longitud media de la carrera libre de las moléculas del aire. Estimemos la longitud media de la carrera libre. Para simplificar, supongamos que las moléculas del aire son bolas de diámetro d. Tomemos al azar la molécula A y vamos a considerar que ella se mueve en la dirección indicada con la flecha en la fig. 6.1 y todas las demás moléculas del aire están inmó-

viles. De dicha figura se desprende que la molécula A chocará con otra molécula B en el caso cuando el centro de esta última se encuentra en el interior del cilindro cuyo radio es igual al diámetro de la molécula d.

Tomemos la longitud de este cilindro igual a la longitud media de la carrera libre λ. Es evidente que, en el volumen de tal cilindro, por término medio, sólo se encontrará una molécula de aire. Por ello,

$$n\pi d^2\lambda \approx 1, \qquad (1)$$

donde n es la concentración, es decir, el número medio de moléculas por unidad de volumen. Prestemos atención a que la longitud media de la carrera libre λ no depende de la velocidad de las moléculas, o sea, de la temperatura, sino que sólo se determina por las dimensiones de las moléculas y su concentración.

Hallemos la longitud de la carrera libre de las moléculas de aire a la altura de 200 km, donde la densidad de la atmósfera $\rho = 3 \times \times 10^{-9}$ kg/m^3. Consideramos que la masa molar media del aire $\mu = 0{,}029$ kg/mol y el diámetro de la molécula $d \approx 3 \cdot 10^{-10}$ m. La densidad ρ es igual al producto de la concentración n por la masa de una molécula m que está ligada con la masa molar μ y la constante de Avogadro N_A mediante la razón $m = \mu/N_A$. Por ello, con ayuda de (1), obtenemos

$$\lambda \approx \frac{1}{\pi d^2 n} = \frac{\mu}{\pi d^2 \rho N_A} \approx 60 \text{ m}. \qquad (2)$$

En semejantes condiciones, la longitud de la carrera libre de la molécula de aire resultó ser de un orden de 100 m. Esta magnitud supera muchas veces las dimensiones del satélite, por lo que el cálculo del frenado en tan enrarecida atmósfera se debe realizar considerando los choques aislados de las moléculas.

El resultado de un enorme número de choques de las moléculas de aire en movimiento caótico contra la superficie del sólido en movimiento, que provocan su frenado, puede ser descrito introduciendo la fuerza de rozamiento que, permanentemente, actúa sobre dicho sólido. La dependencia entre esa fuerza y la velocidad del sólido será distinta para diversas relaciones entre la velocidad del sólido V y la velocidad media del movimiento caótico de las moléculas de aire $\langle v \rangle$.

Siendo lento el movimiento del sólido por el aire inmóvil, cuando $V \ll \langle v \rangle$ para determinar dicha fuerza podemos razonar lo mismo que al calcular la presión de las moléculas de gas contra las paredes del recipiente. Con ello, hay que tener en cuenta que las moléculas, en movimiento al encuentro del sólido, chocan con él con mayor frecuencia y en cada choque le transmiten, por término medio, un impulso mayor que las moléculas que han de alcanzarle. Como resultado, la presión del aire sobre la pared delantera del sólido resulta

ser mayor que sobre la posterior. Un análisis minucioso, tomando en consideración la distribución de las moléculas por las velocidades, muestra que, en tal caso, la fuerza de rozamiento es proporcional a la primera potencia de la velocidad del sólido. Pero si la velocidad

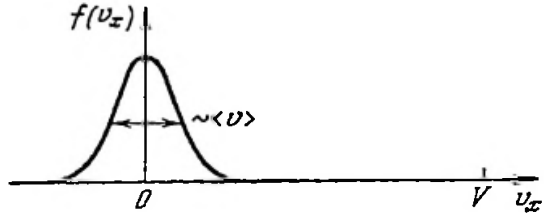


Fig. 6.2. Distribución de las moléculas por la proyección de la velocidad de su movimiento térmico sobre el sentido de la velocidad del cuerpo

del sólido V es mucho mayor que la velocidad media del movimiento térmico de las moléculas de aire, la dependencia entre la fuerza de rozamiento y la velocidad del sólido será otra por completo.

En la fig. 6.2 se muestra la distribución de las moléculas de aire por la proyección de la velocidad de su movimiento térmico sobre la dirección separada, es decir, la de movimiento del sólido. La anchura de esta «campana», según el orden de la magnitud, es igual a la velocidad media térmica de las moléculas $\langle v\rangle$. Si $V \gg \langle v\rangle$ el punto que representa la velocidad del sólido yace en esta gráfica lejos de los límites de la «campana», es decir, a una distancia mucho mayor que la anchura de la «campana» del origen de coordenadas. Por ello, al calcular el efecto del aire sobre el sólido, en movimiento a tal velocidad, es posible despreciar totalmente el movimiento térmico de las moléculas de aire y considerar que el cuerpo choca con las moléculas inmóviles. Todas las interacciones con el aire sólo transcurren en la superficie delantera del sólido.

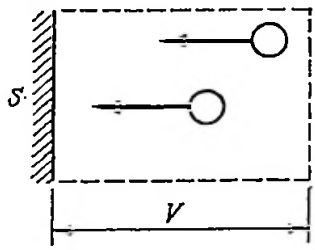


Fig. 6.3. Para el cálculo del impulso transmitido por las moléculas de aire al chocar con el cuerpo

Con el fin de hallar la fuerza que actúa sobre el sólido es más cómodo suponer que, a la inversa, el sólido está en reposo y sobre él incide el flujo de moléculas en el que, todas ellas, tienen la misma velocidad, igual a la del sólido V. Si la superficie del sólido es perpendicular a la dirección del flujo que incide en caso de que el choque sea perfectamente elástico cada molécula transmite al sólido un impulso $2mV$ (fig. 6.3). El número de semejantes choques, por unidad de tiempo, contra la superficie delantera del sólido de área S es igual al número de moléculas de aire que se encuentran en el cilindro de

base S y altura V (fig. 6.3), es decir, nVS. Por ello, la fuerza total que actúa sobre el sólido

$$F = 2mnV^2S = 2\rho V^2S. \tag{3}$$

Así pues, si $V \gg \langle v \rangle$ la fuerza de resistencia es proporcional al cuadrado de la velocidad del sólido. Durante el movimiento del sólido por la órbita circunterrestre circular su velocidad constituye unos 8 km/s. Ésta es mucho mayor que la velocidad térmica media de las moléculas de aire que, a una temperatura T del orden de varias centenas de kelvines, característica para la atmósfera a una altura de unos 200 km, constituye aproximadamente $\langle v \rangle \approx \sqrt{kT/m} \leqslant 10^3$ m/s. Por esta causa, para hallar la fuerza de resistencia hay que hacer uso de la fórmula (3). Poniendo en ella los datos del planteamiento del problema, obtenemos $F \approx 0{,}4$ N. Semejante fuerza comunica a un satélite de masa igual a 1 t una aceleración $a \approx 4 \cdot 10^{-4}$ m/s^2.

Al obtener la fórmula (3) considerábamos que el choque de las moléculas contra la superficie del satélite era perfectamente elástico. Si consideramos que el choque es inelástico, la fuerza de frenado será dos veces menor. Para el choque inelástico la forma de la superficie del satélite no influye sobre la fuerza, sino que se determina por el área de la sección transversal S.

Es de interés señalar que para un satélite en forma de esfera la fuerza de resistencia no depende de si las moléculas de aire chocan elástica o inelásticamente con su superficie.

La expresión (3), obtenida para la fuerza de resistencia, proporciona la posibilidad de hallar la disminución relativa de la energía $\Delta E/E$ por una vuelta del satélite en torno a la Tierra. La pérdida de energía por vuelta ΔE se determina por el trabajo de la fuerza de frenado:

$$\Delta E = -F \cdot 2\pi (R + h), \tag{4}$$

donde R es el radio de la Tierra. La velocidad del satélite en la órbita circular de una altura h se determina por la relación

$$V^2 = \frac{gR^2}{R+h}. \tag{5}$$

Como la energía mecánica del satélite

$$E = -\frac{MgR^2}{2(R+h)}, \tag{6}$$

para $\Delta E/E$, obtenemos

$$\frac{\Delta E}{E} = 8\pi \frac{\rho S}{M} (R+h). \tag{7}$$

Empleando los datos del problema, con ayuda de la fórmula (7), es posible cerciorarse que la disminución de la energía, p. ej., en el 2%, se producirá, aproximadamente, en el transcurso de 40 vueltas alrededor de la Tierra. ▲

7. Gas en un recipiente con pared intermedia. Un recipiente con gas enrarecido está dividido en dos partes por una fina pared intermedia en la que hay un agujero, cuyo tamaño es pequeño en comparación con la longitud media de la carrera libre (fig. 7.1). Hallen la razón de la concentración del gas en diferentes partes del recipiente si en una de ellas se mantiene la temperatura T_1 y en la otra T_2.

△ Vamos a considerar que el gas en el recipiente es perfecto, es decir, sus moléculas se someten a la interacción sólo durante los choques. De acuerdo con el planteamiento del problema, el gas está enrarecido hasta tal punto que la longitud media de la carrera libre de las moléculas entre los choques es mucho mayor que el tamaño del orificio. En tal caso, las moléculas pasan libremente por el agujero, con la particularidad de que cada molécula llega a la otra mitad del recipiente con la misma energía que ella poseía antes de esto. Con el equilibrio termodinámico, la energía media de las moléculas se determina por la temperatura. Por esta razón, el paso de las moléculas de una parte del recipiente a otra debe conducir a la compensación de las temperaturas.

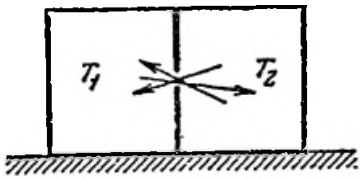


Fig. 7.1. Las moléculas del gas pueden pasar por el orificio en la pared del recipiente

Acerca de una determinada temperatura del gas en cada parte del recipiente, sólo se puede hablar cuando el agujero en la pared es suficientemente pequeño, de modo que el establecimiento del equilibrio termodinámico en una de las partes del recipiente transcurre con mucha más rapidez que la nivelación de las temperaturas de dichas partes.

¿Cuántas moléculas pasan por unidad de tiempo por el agujero de una mitad del recipiente a la otra? Es fácil comprender que el número medio de semejantes moléculas N es proporcional a la concentración n y a la velocidad media $\langle v \rangle$ de las moléculas en aquella mitad del recipiente de la cual ellas pasan, así como al área del agujero S:

$$N = Cn \langle v \rangle S. \qquad (1)$$

Con el fin de calcular el valor numérico del coeficiente adimensional C es preciso conocer la ley de distribución de las moléculas por las direcciones de las velocidades. No obstante, para resolver este problema no es necesario conocer su valor.

En estado estacionario el número total de moléculas en cada mitad del recipiente no varía con el tiempo. Por ello, el número medio de moléculas que pasa por el orificio de izquierda a derecha y de derecha a izquierda debe ser el mismo. De esto y con ayuda de la relación (1), obtenemos

$$n_1 \langle v_1 \rangle = n_2 \langle v_2 \rangle. \qquad (2)$$

Las velocidades medias de las moléculas en cada mitad es proporcional a la raíz cuadrada de la correspondiente temperatura. Por esto, de la igualdad (2), hallamos

$$n_1/n_2 = \sqrt{T_2/T_1}. \qquad (3)$$

En la parte caliente del recipiente la concentración de moléculas es menor. Pero, la presión del gas es allí mayor que en la parte fría. Teniendo en cuenta que la presión se expresa con la fórmula $p = nkT$, mediante la igualdad (3), para la razón de las presiones en diferentes mitades del recipiente tendremos

$$p_1/p_2 = \sqrt{T_1/T_2}. \qquad (4)$$

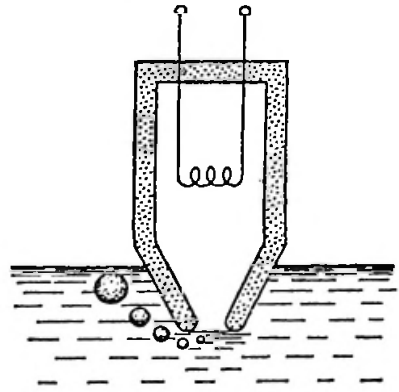


Fig. 7.2. Al calentar la espiral, del recipiente salen continuamente burbujas de aire

Las regularidades relacionadas con el paso de las moléculas de gas por el agujero que une los recipientes con distintas temperaturas, consideradas en este problema, permiten explicar el siguiente experimento, sencillo pero muy espectacular. Un receptáculo de cerámica con paredes porosas se sumerge en el agua con su extremo abierto (fig. 7.2). Dentro del receptáculo hay una espiral con la que, al pasar la corriente eléctrica, se puede calentar el aire que hay en el interior de aquél. Al conectar la espiral aumenta la temperatura del aire, éste se expande y en forma de burbujas, comienza a salir por el orificio del receptáculo que se encuentra debajo del agua. Al alcanzar el estado estacionario, cuando el calor que transmite la espiral se iguala al calor que cede la superficie del receptáculo al medio ambiente, en él se establece determinada temperatura. Al parecer, con ello debería cesar la salida de burbujas de aire. Así ocurriría si las paredes del receptáculo fueran impermeables para las moléculas de aire, p. ej., si fuesen de vidrio o metal.

Pero si las paredes del receptáculo son porosas, las burbujas de aire saldrán continuamente, incluso icuando la temperatura del aire en el receptáculo deje de subir! ¿A qué se debe esto?

La temperatura del aire dentro del receptáculo poroso es más alta que en el exterior, en la atmósfera. En lo que se refiere a la presión ella es igual tanto dentro como fuera: en el interior del receptáculo es mayor que la atmósferica sólo en unos centímetros de la columna de agua, lo que corresponde a la profundidad de sumersión del orificio del receptáculo bajo el agua. Por los poros en las paredes del receptáculo transcurre el constante intercambio de moléculas

entre el aire dentro del receptáculo y en la atmósfera, lo mismo que esto se produce en el recipiente con el agujero en la pared, considerado en el presente problema. En el recipiente cerrado, en estado estacionario, el número de moléculas que pasan por el agujero en ambas direcciones, es el mismo. Como se deduce de la fórmula (3), de resultas, en las partes del recipiente se establecen tales concentraciones que el producto de la concentración por la raíz de la temperatura termodinámica sea el mismo: $n\sqrt{T} = \text{const}$.

En el caso que estudiamos, por los dos lados de la pared porosa, serán iguales las presiones del aire. Como $p = nkT$, ahora $nT = \text{const}$. Esto significa que los flujos de moléculas de aire que pasan por los poros de la atmósfera al receptáculo y a la inversa, no son iguales. ¿Cuál de ellos es mayor? Como el flujo de moléculas es proporcional al producto $n\sqrt{T}$ en aquella parte de donde él proviene, al cumplirse la condición $nT = \text{const}$ el mismo será mayor de aquella parte donde la temperatura es más baja. Esto explica el experimento descrito: el flujo de aire que pasa al interior por los poros es mayor que al exterior. Como resultado, en estado estacionario el aire excesivo que entra por los poros al receptáculo, se calienta, expande y sale del orificio en forma de burbujas. ▲

8. **Separación de isótopos.** Para separar los isótopos puede ser empleado el paso de un gas por un tabique poroso a presión suficientemente baja, cuando el diámetro medio de los poros es pequeño en

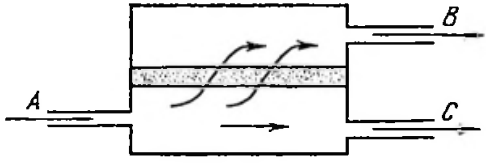


Fig. 8.1. Esquema de la célula de una cascada para la separación de isótopos: *A*, a la entrada se alimenta la mezcla de isótopos; *B*, la mezcla enriquecida por un isótopo ligero, que ha pasado por el tabique poroso, se alimenta a la entrada del siguiente escalón de la cascada; *C*, la mezcla enriquecida por un isótopo pesado retorna a la entrada de la célula de la anterior cascada.

comparación con la longitud de la carrera libre de las moléculas. Con este fin, el compuesto químico gaseoso del elemento, que contiene una mezcla natural de isótopos (p. ej., hexafluoruro de uranio que contiene las moléculas $^{235}UF_6$ y $^{238}UF_6$), se hace pasar por la célula, cuya estructura se muestra en la fig. 8.1. En el gas que ha pasado por el tabique poroso aumenta el contenido en por ciento del isótopo ligero. El gas que ha pasado se aspira permanentemente y alimenta a la siguiente célula. Este proceso se repite muchas veces. ¿Qué cantidad de ciclos hay que realizar para que la razón entre las

concentraciones de los isótopos ligero y pesado aumente 10 veces si las masas molares de los compuestos de los isótopos ligero y pesado son iguales a μ_1 y μ_2, respectivamente?

△ Como en cada una de las células el gas que ha pasado por el tabique poroso se evacua constantemente con una bomba, podemos considerar que su concentración (es decir, el número de moléculas por unidad de volumen) tras el tabique es despreciablemente pequeña en comparación con la concentración en la entrada a la célula. Por ello, al efectuar los cálculos podemos despreciar el flujo inverso de moléculas y considerar que el gas pasa por los poros sólo en una dirección.

El número de moléculas que pasa por cada orificio en el tabique poroso, por unidad de tiempo, es proporcional a la concentración de moléculas antes del tabique y a la velocidad media de su movimiento térmico caótico. Como el gas es una mezcla de moléculas, con contenido de diversos isótopos, lo mismo que en el problema anterior, podemos escribir la expresión para los números N_1 y N_2 de moléculas que pasaron por el tabique por unidad de tiempo:

$$N_1 \sim n_1 \langle v_1 \rangle, \quad N_2 \sim n_2 \langle v_2 \rangle, \tag{1}$$

donde n_1 y n_2 son las concentraciones de los isótopos antes del tabique; $\langle v_1 \rangle$ y $\langle v_2 \rangle$, las velocidades medias de su movimiento térmico. La razón de las concentraciones de las moléculas del gas de cada isótopo después de pasar por una célula será

$$\gamma_1 = \frac{N_1}{N_2} = \frac{n_1 \langle v_1 \rangle}{n_2 \langle v_2 \rangle}. \tag{2}$$

Si las velocidades medias del movimiento térmico de las moléculas, con contenido de diferentes isótopos, fuesen iguales, como se desprende de la fórmula (2), la razón de las concentraciones de los isótopos ligeros y pesados sería la misma que delante del tabique. Pero, en virtud de la diferencia de masas de distintos isótopos, las velocidades térmicas de las moléculas con isótopos ligeros y pesados resultan ser distintas, aunque las energías cinéticas medias de unas y otras moléculas son iguales y corresponden a la temperatura de la mezcla. Como la velocidad media del movimiento térmico es proporcional a la raíz cuadrada de la razón entre la temperatura termodinámica y la masa de la molécula:

$$\langle v \rangle \sim \sqrt{T/m}, \tag{3}$$

en las moléculas del isótopo ligero dicha velocidad es mayor y, después de pasar por el tabique, aumenta el contenido del isótopo ligero en la mezcla. Teniendo en cuenta (3), de la relación (2) se deduce, que

$$\gamma_1 = \frac{n_1}{n_2} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} = \frac{n_1}{n_2} \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}. \tag{4}$$

En la entrada a la segunda célula la razón entre las concentraciones de los isótopos ligeros y pesados en la mezcla no será ya igual a n_1/n_2, sino a

$$\gamma_1 = \frac{n_1}{n_2} \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}.$$

Por ello, después de pasar la segunda célula la razón de las concentraciones será

$$\gamma_2 = \gamma_1 \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} = \frac{n_1}{n_2} \left(\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}\right)^2. \qquad (5)$$

Es fácil ver que después de pasar k células la razón de las concentraciones γ_k se expresa con la fórmula

$$\gamma_k = \frac{n_1}{n_2} \left(\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}\right)^k. \qquad (6)$$

Si queremos que γ_k sea 10 veces mayor que n_1/n_2, como se desprende de (6), el número necesario de células

$$k = \frac{1}{\log \sqrt{\mu_2/\mu_1}} = \frac{2}{\log (\mu_2/\mu_1)}. \qquad (7)$$

Debido a la pequeña diferencia entre las masas de las moléculas con distintos isótopos, es necesario efectuar gran cantidad de ciclos de enriquecimiento. P. ej., para el hexafluoruro de uranio con la mezcla de isótopos ^{235}U y ^{238}U, para aumentar 10 veces la razón de las concentraciones, hay que unir en serie unas 540 células.

En conclusión, señalemos que a medida que el gas pasa por el tabique poroso, en cada célula debería aumentar el contenido del isótopo pesado en la mezcla que se halla delante del tabique. Este hecho conduciría, a su vez, al aumento del número de moléculas con el isótopo pesado que pasan por el tabique. Como resultado, se reduciría la eficacia del funcionamiento de la célula. Con el fin de que esto no se produzca, hay que renovar la mezcla antes del tabique y no tolerar la acumulación del gas enriquecido con el isótopo pesado. Por esta razón, el gas enriquecido con el isótopo pesado se evacua y dirige a la entrada de la etapa anterior de la cascada (fig. 8.1).

El procedimiento descrito se emplea para separar los isótopos de uranio en grandes escalas industriales. La idea de semejante método fue propuesto por Rayleigh ya en 1896. ▲

9. Vaso Dewar. Los gases licuados se almacenan en los llamados vasos o frascos Dewar que son recipientes de vidrio o metal con paredes dobles (fig. 9.1). Del espacio entre las paredes se ha evacuado el aire, lo que conduce a la disminución de su conductibilidad térmica. Como es imposible evacuar el aire por completo, las moléculas res-

tantes transportarán el calor del medio ambiente al contenido del vaso Dewar. Esta conductibilidad térmica residual conduce a que el gas licuado en el frasco se evapore continuamente. Al llenar el vaso Dewar con nitrógeno líquido, cuyo punto de ebullición a presión atmosférica normal es igual a 77,3 K, resultó que, por unidad de tiempo, se evaporó la masa M_1 de nitrógeno. ¿Qué masa de gas se evaporará de ese mismo frasco por unidad de tiempo si se llena de hidrógeno, cuyo punto de ebullición es igual a 20,4 K? En ambos casos, la temperatura del medio ambiente es igual a 300 K.

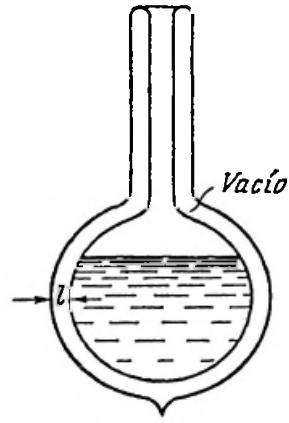


Fig. 9.1. Estructura del vaso Dewar

△ El transporte de calor tiene lugar con tales desviaciones del estado de equilibrio termodinámico, en que diversas partes del sistema tienen distinta temperatura. Para las condiciones habituales el mecanismo de la conductibilidad térmica de gas consiste en lo siguiente: las moléculas de la región más «caliente», a consecuencia del movimiento caótico, se desplazan en todas direcciones y chocan con las moléculas de las regiones más «frías» y les transmiten parte de su energía. Cada molécula puede transportar el «exceso» de energía termica a una distancia del orden de la longitud de la carrera libre λ. Por esta razón, el flujo completo de calor desde el sector que tiene temperatura más alta al sector con temperatura más baja es proporcional a la concentración de las moléculas n y la longitud media de su carrera libre.

Cada una de las magnitudes n y λ depende de la presión a la que se encuentra el gas. Pero el producto de las mismas no depende de la presión. En efecto, recuerden el problema 6 acerca del frenado del satélite en las capas superiores de la atmósfera, donde se examinaba de qué dependía la longitud media de la carrera libre de las moléculas. Allí, obtuvimos la relación

$$n\lambda\sigma \approx 1. \qquad (1)$$

La magnitud $\sigma = \pi d^2$ (d es el diámetro de la molécula) no depende de la presión. Por ello, tampoco depende de ella el producto $n\lambda$, aunque la concentración n de las moléculas es proporcional a la presión.

Así pues, a condiciones habituales la conductibilidad térmica del gas no depende de la presión, ya que todas las demás magnitudes, que entran en la expresión para el flujo de calor (la diferencia de temperatura, área de las paredes y distancia entre ellas), tampoco dependen de la presión.

Entonces, ¿para qué se evacua en el vaso Dewar el aire en el espacio entre las paredes? La cuestión radica en que a una presión muy baja, cuando la longitud de la carrera libre de las moléculas es mayor que la distancia entre las paredes, el mecanismo de la conductibilidad térmica se transforma en otro: las moléculas de gas vuelan libremente de una a otra pared sin chocar entre sí y transportan el «exceso» de energía de pared a pared directamente. Ahora, la conductibilidad térmica no depende de la longitud de la carrera de las moléculas, sólo es de importancia que ella supere la distancia l entre las paredes dobles del vaso. Claro está, como el flujo de calor es, en este caso, proporcional a la concentración de las moléculas, mientras menor sea la presión del aire entre las paredes, menor será su conductibilidad térmica.

Con el fin de estimar el flujo de calor desde la pared externa del vaso Dewar a la pared interna fría, vamos a considerar que cada molécula de aire, al abandonar la pared del frasco, tiene una energía correspondiente a la temperatura de dicha pared. Al chocar con la otra pared la molécula cede a ella toda su energía. Con otras palabras, consideramos que la interacción de las moléculas con la pared tiene el carácter de un choque inelástico. Si el choque de las moléculas de gas contra la pared fuera perfectamente clástico, ellas no transportarían en absoluto calor.

Supongamos que la pared externa del vaso tiene una temperatura T_0 igual a la del medio ambiente. El gas licuado que se encuentra en el vaso Dewar, continuamente, se evapora un poco, por ello, a pesar del suministro ininterrumpido de calor, su temperatura queda invariable. El gollete del vaso Dewar se deja abierto con el fin de que el gas que se evapora pueda salir a la atmósfera con libertad, ya que, de lo contrario, inevitablemente, el frasco explotaría debido al crecimiento continuo de la presión. Así pues, la temperatura de la pared interna es igual a la temperatura de ebullición T_1 del gas licuado a presión atmosférica.

El flujo de energía, transportado por las moléculas de aire desde la pared caliente a la fría, es proporcional a la energía de la molécula que se desprende (es decir, a la temperatura de la pared caliente T_0) y al número de moléculas z que abandonan la pared caliente por unidad de tiempo. Pues bien, ¿cuántas moléculas abandonan la pared caliente? Es evidente que tantas como vuelan hacia ella de la pared fría. El número de tales moléculas es proporcional a la concentración de moléculas que tienen la temperatura de la pared fría T_1 y a su velocidad media $\langle v_1 \rangle$:

$$z \sim n_1 \langle v_1 \rangle. \qquad (2)$$

Por ello, el flujo de energía de la pared caliente a la fría es proporcional al producto $T_0 z \sim T_0 n_1 \langle v_1 \rangle$. De forma análoga, el flujo de energía, transportado por las moléculas de la pared fría a la caliente,

es proporcional al producto $\lambda T_1 z \sim T_1 n_1 \langle v_1 \rangle$. Por consiguiente, el flujo de energía Q de la pared caliente a la fría, igual a la diferencia de los flujos de energía al encuentro, es proporcional a la diferencia de temperaturas, la concentración y la velocidad media de las moléculas:

$$Q \sim (T_0 - T_1)\, n_1\, \langle v_1 \rangle. \tag{3}$$

¿Cuál es la concentración n_1 de las moléculas «frías» de aire en el espacio entre las paredes? Si designamos con n_0 la concentración de las moléculas «calientes», es decir, de aquellas que abandonaron la pared externa, la suma $n_1 + n_0$ es igual a la concentración total del aire n entre las paredes:

$$n = n_1 + n_0. \tag{4}$$

Como ya indicamos, a la pared caliente, por unidad de tiempo, llegan tantas moléculas como a la fría. Por ello,

$$n_1 \langle v_1 \rangle = n_0 \langle v_0 \rangle. \tag{5}$$

Como la velocidad media es proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura termodinámica, de la igualdad (5), tendremos

$$n_0 = n_1 \langle v_1 \rangle / \langle v_0 \rangle = n_1 \sqrt{T_1/T_2}. \tag{6}$$

Poniendo n_0 en la relación (4), hallaremos

$$n_1 = \frac{n}{1+\sqrt{T_1/T_2}}. \tag{7}$$

Ahora, para el flujo de calor la expresión (3) se puede anotar en la forma

$$Q \sim (T_0 - T_1)\, \frac{n\sqrt{T_1}}{1+\sqrt{T_1/T_0}} = n\sqrt{T_0 T_1}\,(\sqrt{T_0} - \sqrt{T_1}). \tag{8}$$

A cuenta de este flujo de calor, por unidad de tiempo, se evapora la masa M_1 de gas licuado igual a la razón entre Q y el calor específico de vaporización Λ_1:

$$M_1 \sim \frac{n}{\Lambda_1}\sqrt{T_0 T_1}\,(\sqrt{T_0} - \sqrt{T_1}). \tag{9}$$

Una expresión exactamente igual también será cierta en el caso cuando el vaso Dewar está lleno de otro gas licuado, para el que la temperatura de ebullición es igual a T_2 y el calor específico de vaporización, Λ_2. Todos los coeficientes de proporcionalidad, omitidos en la fórmula (9), no dependen de qué gas es el que, precisamente, se encuentra en el vaso. Por ello, para la razón entre las masas de diversos gases que, por unidad de tiempo, se evaporan de un mismo vaso

Dewar, obtenemos

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{\Lambda_1}{\Lambda_2} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \frac{\sqrt{T_0} - \sqrt{T_2}}{\sqrt{T_0} - \sqrt{T_1}}. \qquad (10)$$

Poniendo aquí los valores del calor específico de vaporización del hidrógeno $\Lambda_2 = 4{,}5 \cdot 10^5$ J/kg, del nitrógeno $\Lambda_1 = 2{,}0 \cdot 10^5$ J/kg y su temperatura de ebullición $T_2 = 20{,}4$ K, $T_1 = 77{,}3$ K, hallamos $M_2/M_1 \approx 0{,}34$.

Hemos obtenido que, según la masa, el hidrógeno en el vaso Dewar se evapora con mayor lentitud que el nitrógeno, aunque la temperatura de ebullición del hidrógeno es más baja. Sin embargo, en lo que atañe a la velocidad de evaporación, según el volumen, todo transcurre de otro modo. La densidad del hidrógeno licuado es igual a unos 0,07 g/cm^3, del nitrógeno, 0,8 g/cm^3, por ello para la razón de los volúmenes del hidrógeno V_2 y del nitrógeno V_1 evaporados obtenemos $V_2/V_1 = 3{,}89$, es decir, el hidrógeno se evapora con una rapidez unas 4 veces mayor que el nitrógeno.

De la fórmula (9) se deduce que la masa del gas evaporado es proporcional a la concentración n del aire que queda entre las paredes del vaso Dewar. Por esta causa, el aislamiento térmico será tanto mejor, cuanto menor sea la cantidad del aire residual. Por regla, en los vasos de Dewar se crea alto vacío (10^{-3} . . . 10^{-6} mm Hg). Esto corresponde a una concentración del aire residual $n = p/k\ T_0 \sim$ $\sim 10^{11} - 10^{13}$ cm^{-3}. Con semejantes concentraciones la longitud de la carrera libre constituirá una magnitud del orden de $\lambda \approx 1/(n\pi d^2) \sim 10 - 10^3$ cm, lo que se desprende de la relación (1). La distancia entre las paredes dobles l, por regla, es igual a varios milímetros. Por esto, con tal presión del aire residual, la longitud media de la carrera libre supera considerablemente la distancia entre las paredes y el mecanismo de la conductibilidad térmica es, precisamente, aquel que se consideró en el problema.

A una presión del aire entre las paredes de un orden de 10^{-2}mm Hg, la longitud de la carrera libre es comparable con la distancia entre las paredes. Por esta razón, el bombeo del aire hasta esta presión o hasta otra mayor está exento de sentido, ya que a tales condiciones la conductibilidad térmica del aire no depende de la presión.

La superficie de las paredes del frasco, que son las que forman el espacio de vacío, por regla, se cubren de una fina capa de plata con el fin de disminuir el intercambio térmico radiante entre las paredes. Debido a esto, en el problema en cuestión no se ha tenido en cuenta la componente radiante del flujo térmico.

Los vasos Dewar también se utilizan para almacenar sustancias a temperatura más alta que la del medio ambiente. Para fines domésticos encuentran propagación los termos que, de por sí, son vasos Dewar de vidrio dispuestos en una cubierta metálica o de plástico para protegerlos contra los deterioros. ▲

10. Capacidad calorífica de un gas perfecto. Un mol de gas perfecto se calienta a tales condiciones que la presión del gas es proporcional a su volumen:

$$p = \alpha V,$$

donde α *es una constante.* (Aquí, *para no recargar la fórmula*, el volumen molar del gas se designa con V y no con V_μ.) Hallen la capacidad calorífica del gas en semejante proceso. Intenten inventar un dispositivo en el que la presión del gas y el volumen que él ocupa estén ligados con la indicada relación.

△ La capacidad calorífica de un gas perfecto (como, asimismo, la de cualquier otro sistema físico) es una magnitud física que caracteriza no tanto el propio sistema, como el proceso que en él transcurre.

Recordemos el primer principio de la termodinámica, es decir, la ley de la conservación de la energía para procesos ligados con la termotransferencia:

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A, \tag{1}$$

o sea, la cantidad de calor ΔQ transmitida al sistema determina la variación de la energía interna en éste ΔU y el trabajo ΔA que, con ello, él realiza. El sistema que consideramos es un gas perfecto y su energía interna no depende del volumen que él ocupa y sólo se determina por la temperatura. Por ello, cualquiera que sea el procedimiento con el que se calienta el gas hasta ΔT, su energía interna varía en una misma magnitud. En lo que se refiere al trabajo que, con ello, realizará el gas él puede ser diferente. P. ej., al calentar un gas a volumen constante, aquél no realiza ningún trabajo, mientras que al calentarlo a presión constante, el gas realiza el trabajo $\Delta A = p\,\Delta V$. Como se desprende de la ecuación (1), debido a esto la capacidad calorífica del gas $C = \Delta Q/\Delta T$ será diferente en función de las condiciones a las que se efectúa su calentamiento. En el primer caso, la capacidad calorífica de un mol se designa con C_V y se determina por la fórmula

$$C_V = \Delta U/\Delta T. \tag{2}$$

En el segundo caso la capacidad calorífica se designa con C_p y, con ayuda de la ecuación (1), para ella obtenemos la expresión

$$C_p = C_V + p\,\Delta V/\Delta T.$$

De la ecuación de estado de un mol de gas perfecto $pV = RT$, a presión constante, hallamos $p\Delta V = R\Delta T$. Ahora, para la capacidad calorífica C_p de un mol de gas perfecto, obtenemos

$$C_p = C_V + R. \tag{3}$$

En el caso general, para hallar la capacidad calorífica de un gas es preciso saber calcular el trabajo que él realiza durante un proceso arbitrario.

¿Cómo calcular el trabajo efectuado por un gas cuando su presión no queda constante, sino que está ligada con el volumen mediante la relación $p = \alpha V$? Es evidente que el trabajo se expresa, asimismo, con la relación $\Delta A = p\Delta V$, pero sólo que a presión constante ΔV podía ser cualquiera, mientras que en el caso que examinamos ΔV se debe elegir tan pequeña que sea posible despreciar la variación de la presión Δp durante la expansión del gas en ΔV. Ahora, hay que ligar $p\Delta V$ con una pequeña variación del volumen al variar la temperatura. Para ello, empleemos la ecuación de estado

$$pV = RT. \tag{4}$$

Supongamos que con la variación de la temperatura del gas en ΔT su volumen varió en ΔV y la presión, en Δp. Estas variaciones están ligadas entre sí gracias a la ecuación de estado:

$$(p + \Delta p)(V + \Delta V) = R(T + \Delta T). \tag{5}$$

Sustrayendo la expresión (4) de la (5) y despreciando el pequeño término $\Delta p \Delta V$, obtenemos

$$p\Delta V + V\Delta p = R\Delta T. \tag{6}$$

En el proceso que consideramos, cuando la presión del gas es proporcional a su volumen, tenemos $\Delta p = \alpha \Delta V$. Por esto,

$$V\Delta p = \alpha V \Delta V = p\Delta V. \tag{7}$$

Poniendo $V\Delta p$ de (7) en (6), hallamos

$$\Delta A = p\Delta V = R\Delta T/2.$$

Mediante la ecuación (1) hallamos la capacidad calorífica del gas en dicho proceso:

$$C = C_V + R/2.$$

Recordando la ligazón entre C_V y C_p, ofrecida en la fórmula (3), vemos que C se puede representar en la forma

$$C = (C_V + C_p)/2.$$

Señalemos que en los tres procesos examinados (calentamiento del gas a volumen constante, presión constante y con $p = \alpha V$) la capacidad calorífica del gas no varía en el transcurso de todo el proceso.

Ahora, reflexionemos cómo se puede realizar en la práctica un dispositivo en el que la presión del gas sea proporcional al volumen que él ocupa. Aquél, p. ej., puede ser un recipiente con un émbolo. Pongámoslo en posición vertical. Con el fin de que el calentamiento transcurra a volumen constante podemos fijar el émbolo. Para el calentamiento a presión constante podemos ubicar sobre el émbolo un peso constante. En el caso que nos interesa, podemos sujetar el

émbolo con un muelle elástico (fig. 10.1), ya que en virtud de la ley de Hooke la fuerza que actúa sobre el émbolo por parte del muelle dependerá linealmente de su desplazamiento.

¿Cómo elegir los parámetros de semejante dispositivo para que se verifique la relación $p = \alpha V$? Con $V = 0$, cuando el émbolo yace en el fondo (fig. 10.2), la presión del gas debajo de él debe ser nula,

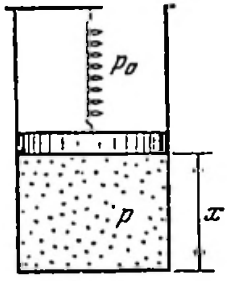


Fig. 10.1. Dispositivo en el que la presión del gas puede ser proporcional a su volumen

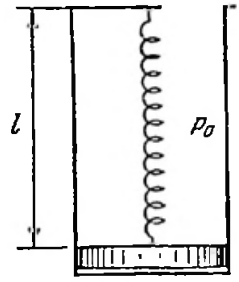


Fig. 10.2. Para la elección de los parámatros del dispositivo en el que $p = \alpha V$.

por ello la fuerza de la gravedad mg que actúa sobre el émbolo y la fuerza de la presión atmosférica $p_0 S$ (S es el área del émbolo) han de equilibrarse con la fuerza de extensión del muelle:

$$mg + p_0 S = k\,(l - l_0). \tag{8}$$

Aquí, k es la rigidez del muelle; l_0, su longitud en estado libre. Así pues, hay que elegir tal muelle que asegure la verificación de la relación (8). Comprobemos si, con ello, la presión del gas p será proporcional a su volumen V cuando la posición del émbolo se toma al azar (fig. 10.1). Escribamos la condición de equilibrio del émbolo:

$$mg + p_0 S = k\,(l - l_0 - x) + pS.$$

Tomando en consideración la igualdad (8), de aquí obtenemos

$$p = \frac{kx}{S} = \frac{k}{S^2}\,V.$$

¡Intenten inventar otros dispositivos! ▲

11. Establecimiento del equilibrio. En un cilindro que ocupa la posición horizontal (fig. 11.1) a la izquierda del émbolo fijado se halla un gas perfecto, en la parte derecha del cilindro, se ha creado el vacío. El cilindro está termoaislado del medio ambiente, mientras que el muelle, situado entre el émbolo y la pared, primero, se encuentra en estado no deformado. El émbolo se libera y, después de establecerse el equilibrio, el volumen que ocupa el gas aumenta dos veces. En tal caso, ¿cómo varían la temperatura y la presión del gas? Las

capacidades caloríficas del cilindro, el émbolo y el muelle se desprecian.

△ De acuerdo con el planteamiento del problema, al principio, el muelle se encuentra en estado no deformado y la fuerza de presión del gas sobre el émbolo se compensa con el apoyo que sujeta el émbolo. Cuando el apoyo se quita, baja el efecto de la presión del gas, el émbolo se desplaza a la derecha y comprime el muelle. Por inercia el émbolo sobrepasa la posición de equilibrio y, después de su parada, el muelle empuja el émbolo en sentido contrario. En el sistema surgen oscilaciones que, debido al rozamiento, se amortiguan gradualmente y el émbolo se para en la posición de equilibrio. En la posición inicial toda la energía del sistema que examinamos sólo constaba de la energía interna del gas, ya que el émbolo estaba inmóvil, y el muelle no deformado. En el estado final la energía del sistema está formada por la energía interna del gas y la energía potencial del muelle comprimido. En el proceso de establecimiento del equilibrio, transcurrieron múltiples transformaciones de la energía de una forma a otra: la energía interna del gas se transformaba, parcialmente, en la energía cinética del movimiento macroscópico del gas por el cilindro siguiendo al émbolo, en la energía cinética del émbolo, en la energía potencial del muelle deformado y a la inversa.

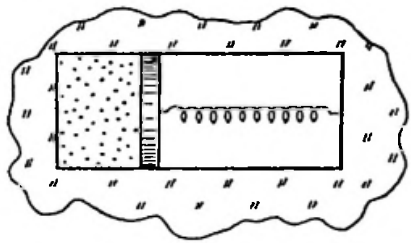


Fig. 11.1 El recipiente con gas está termoaislado del medio ambiente

En el transcurso de las oscilaciones, en virtud del rozamiento, la energía mecánica se transformaba en calor, es decir, en la energía interna del gas. La variación de la energía interna del émbolo, las paredes del recipiente y el muelle se puede despreciar, ya que, según el planteamiento del problema, sus capacidades caloríficas son pequeñas en comparación con la del gas. Basándonos en el primer principio de la termodinámica, podemos afirmar que la energía total del sistema no varió de resultas de todos los mencionados procesos, ya que no había termotransferencia con el medio ambiente y el sistema no realizó trabajo sobre cuerpos externos.

La conservación de la energía total del sistema se expresa con la relación

$$\Delta U + \frac{kx^2}{2} = 0, \qquad (1)$$

donde el segundo sumando es la energía potencial del muelle de rigidez k comprimido en la magnitud x, mientras que la variación de la energía interna del gas perfecto, al cambiar su temperatura desde

T_1 hasta T_2, es igual a

$$\Delta U = \nu C_V (T_2 - T_1), \tag{2}$$

donde $\nu = m/\mu$ es la cantidad de gas en el cilindro, mientras que C_V es la capacidad calorífica molar de un gas perfecto a volumen constante.

En la posición de equilibrio la fuerza de presión del gas sobre el émbolo de área S se equilibra con la fuerza de la reacción del muelle comprimido:

$$p_2 S = kx. \tag{3}$$

El desplazamiento del muelle x está ligado evidentemente con la variación del volumen del gas de V_1 a V_2:

$$x = (V_2 - V_1)/S. \tag{4}$$

Poniendo las expresiones (2) y (4) en la ecuación de balance la energía (1), obtenemos

$$\nu C_V (T_1 - T_2) = k (V_2 - V_1)^2/2S^2. \tag{5}$$

Empleando la ecuación de estado de un gas perfecto

$$pV = \nu RT, \tag{6}$$

en las condiciones del equilibrio mecánico del émbolo (3), expresamos la presión del gas p_2 por los valores finitos de la temperatura y el volumen, mientras que el desplazamiento, con ayuda de la fórmula (4):

$$\frac{\nu R T_2}{V_2} = \frac{k (V_2 - V_1)}{S^2}. \tag{7}$$

Dividiendo entre sí (5) y (7), término por término, obtenemos

$$\frac{2C_V}{R}\left(\frac{T_1}{T_2} - 1\right) = 1 - \frac{V_1}{V_2}. \tag{8}$$

Para la razón prefijada de los volúmenes inicial y final del gas la fórmula (8) da la posibilidad de determinar la razón de las temperaturas:

$$\frac{T_1}{T_2} = 1 + \frac{R}{2C_V}\left(1 - \frac{V_1}{V_2}\right). \tag{9}$$

Conociendo las razones de los volúmenes y las temperaturas, con ayuda de la ecuación de estado (6), se puede hallar la razón de las presiones:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{R}{2C_V}\left(\frac{V_2}{V_1} - 1\right) + \frac{V_2}{V_1}. \tag{10}$$

Como para un gas perfecto monoatómico $C_V = 3R/2$ y, según el planteamiento del problema, el volumen final es dos veces mayor

que el inicial, mediante las fórmulas (9) y (10), hallamos

$$T_2/T_1 = 6/7, \quad p_2/p_1 = 3/7.$$

Es útil comprobar las fórmulas (9) y (10) obtenidas para el caso límite, cuando el resultado es evidente. Si la rigidez del muelle $k \to \infty$, el gas no puede mover el émbolo de su lugar y, por lo tanto, el volumen, la temperatura y la presión del gas quedarán invariables. En este caso, $V_2 = V_1$ y las fórmulas (9) y (10), como debe ser, proporcionan $T_2 = T_1$ y $p_2 = p_1$. ▲

12. Medición de la razón de las capacidades caloríficas. Para la determinación experimental de la razón de las capacidades caloríficas de un gas $\gamma = C_p/C_V$ se puede emplear el siguiente método. Cierta cantidad de gas ν, cuyo volumen y presión iniciales son iguales a V y p, se calienta dos veces mediante una espiral eléctrica por la que se hace pasar la corriente en el transcurso de un mismo tiempo: primero a volumen constante V, con la particularidad de que la presión final es igual a p_1, a continuación, a presión constante p, partiendo de ese mismo estado inicial, siendo el volumen final igual a V_2. ¿Cómo calcular la razón γ con estos datos?

△ Como en ambos casos el calentador eléctrico funciona un mismo tiempo, la cantidad de calor comunicada al gas también será la misma: $\Delta Q_1 = \Delta Q_2$. Vamos a considerar que las condiciones del experimento aseguran la ausencia de intercambio de calor del gas con el medio ambiente, es decir, el recipiente con el gas está adiabáticamente aislado. Por ello, es posible escribir

$$\Delta Q_1 = \nu C_V \Delta T_1, \quad \Delta Q_2 = \nu C_p \Delta T_2, \tag{1}$$

donde C_V y C_p son las capacidades caloríficas molares del gas a volumen constante y a presión constante; ΔT_1 y ΔT_2, las variaciones de la temperatura del gas en el primero y segundo casos. Como $\Delta Q_1 = \Delta Q_2$, de la fórmula (1) obtenemos para $\gamma = C_p/C_V$

$$\gamma = \Delta T_1/\Delta T_2. \tag{2}$$

Como en el experimento que describimos no se mide la temperatura, sino el volumen y la presión del gas, la variación de la temperatura se debe expresar por intermedio de la variación del volumen y la presión. Con el fin de hacer esto, hay que emplear la ecuación de estado.

La fórmula (2) es cierta para cualquier gas sin ser obligatorio que él sea perfecto. Por esta causa, si pudiéramos medir la variación de la temperatura con suficiente precisión, con la fórmula (2) hallaríamos en directo la razón de las capacidades caloríficas de un gas real. No obstante, es difícil medir la variación de la temperatura, ya que semejante medición requiere tiempo considerable, hasta que el termómetro adquiera el equilibrio térmico con el gas. A su vez,

esto sobrepone rigurosos requerimientos sobre el grado de termoaislamiento del gas respecto del medio ambiente. Durante la medición de la variación del volumen y la presión del gas no surgen semejantes requisitos. Pero por la comodidad de las mediciones es necesario pagar: ahora es preciso conocer la ecuación de estado del gas.

Si las condiciones del experimento son tales que el gas con suficiente precisión se puede considerar perfecto, es posible hacer uso de la ecuación de Mendeléiev—Clapeyron

$$pV = \nu RT. \tag{3}$$

Entonces, en el primer caso, al calentar el gas a volumen constante, obtenemos

$$(p_1 - p)\, V = \nu R \Delta T_1. \tag{4}$$

En el segundo caso, con el calentamiento a presión constante p, de (3) obtenemos

$$p\,(V_2 - V) = \nu R \Delta T_2. \tag{5}$$

Expresando ΔT_1 y ΔT_2 de las igualdades (4) y (5) y poniendo sus valores en la relación (2), hallamos

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{(p_1 - p)\, V}{p\,(V_2 - V)} = \frac{p_1/p - 1}{V_2/V - 1}. \quad \blacktriangle \tag{6}$$

13. Salida del gas por un orificio. ¿Qué velocidad tiene el chorro de gas que se escapa de un pequeño orificio en la pared de una botella con gas comprimido (fig. 13.1)? La temperatura y la presión del gas en la botella tienen los valores T y p.

△ Si el tamaño del orificio supera en alto grado la longitud de la carrera libre de las moléculas en la botella, la salida del gas se puede considerar como un flujo macroscópico. Limitémonos a un pequeño intervalo de tiempo, tal que la presión y la temperatura del gas en la botella puedan considerarse invariables. Entonces, es posible examinar el proceso de salida del gas de la botella como si fuera estacionario, con la particularidad de que las trayectorias de cualesquiera elementos del gas, separados mentalmente, coincidan con las líneas de corriente. Si despreciamos las fuerzas tangenciales de viscosidad entre los elementos vecinos del gas, lo que es plenamente justo para el proceso que analizamos, para el estudio del movimiento del gas se puede emplear la ley de la conservación de la energía.

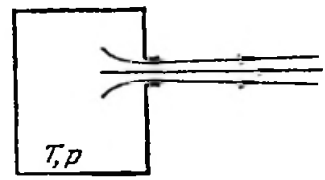


Fig. 13.1. Salida del gas por el orificio en una botella

En el flujo estacionario del gas separemos un determinado tubo currentilíneo (fig. 13.2). En este tubo examinamos el gas que, en cierto instante, se encuentra entre las secciones *1* y *2*. En el transcurso de tiempo Δt este gas pasará a una nueva posición entre las seccio-

nes *1'* y *2'*. Apliquemos al gas separado el primer principio de la termodinámica, es decir, la ley de la conservación de la energía. La peculiaridad del proceso consiste en que en la parte separada del gas varía no sólo la energía interna U, sino también la energía cinética E_c del movimiento macroscópico dirigido. La variación completa de la energía del gas se determina por los influjos externos sobre él:

$$\Delta U + \Delta E_c = \Delta Q + \Delta A', \qquad (1)$$

donde ΔQ es la cantidad de calor comunicado al gas separado; $\Delta A'$, el trabajo realizado por las fuerzas externas, que actúan sobre el gas, durante el tiempo Δt. En el fenómeno que examinamos, es decir,

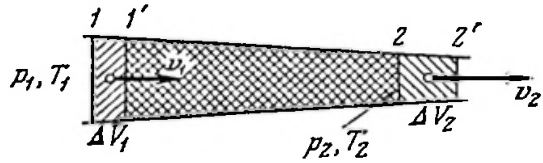


Fig. 13.2. Con la corriente estacionaria la energía del gas entre las secciones *1'* y *2* (mostrada con doble sombreado) no varía con el tiempo

la salida rápida por un orificio, el proceso que transcurre en la parte separada del gas se puede considerar adiabático, es decir, hacer en (1) $\Delta Q = 0$. Claro está, no podemos afirmar que no hay por completo intercambio de calor con los sectores contiguos, ya que no hay envoltura adiabática. Sin embargo, en el chorro de gas el trabajo que realizan los sectores vecinos al «empujar» la parte separada del gas a lo largo del tubo currentilíneo, es mucho mayor que ΔQ y, por ello, podemos despreciar el intercambio de calor.

Al calcular el trabajo $\Delta A'$ hay que tener en cuenta que las fuerzas de presión que actúan sobre la parte separada del gas desde los sectores vecinos en la sección *1*, están dirigidas a lo largo del desplazamiento y en sentido inverso a éste en la sección *2* (fig. 13.2). Por ello, la expresión para el trabajo $\Delta A'$, al desplazarse el gas en el transcurso del tiempo Δt, tiene la forma

$$\Delta A' = p_1 \Delta V_1 - p_2 \Delta V_2, \qquad (2)$$

donde p_1 y p_2 son las presiones del gas en las secciones *1* y *2*; ΔV_1, el volumen de la parte del tubo currentilíneo en las secciones *1* y *1'*; ΔV_2, entre las secciones *2* y *2'*.

En un sistema termodinámico en equilibrio, los parámetros macroscópicos, tales como la temperatura T y la presión p, tienen un mismo valor en todos los puntos. En el flujo de gas, a diferencia de un sistema en equilibrio, los valores de dichos parámetros varían de punto en punto, de modo que sólo podemos hablar del equilibrio termodinámico local en partes aisladas del flujo. Pero semejante

descripción sólo es aplicable en aquellos casos, cuando la velocidad de movimiento macroscópico del gas varía con suficiente lentitud en el espacio y el tiempo. Vamos a considerar que esta condición se ha cumplido. Entonces, la presión y la temperatura del gas varían a lo largo del tubo en la fig. 13.2, pero los valores de estos parámetros dentro de los márgenes de pequeños elementos, p. ej., entre las secciones *1* y *1'* o bien *2* y *2'*, se pueden considerar invariables y ligados entre sí con la ecuación de estado.

Con ayuda de la ecuación de estado el trabajo $\Delta A'$ en (2) se puede expresar por la temperatura del gas en las secciones *1* y *2*. Suponiendo que durante el tiempo Δt por cada sección del tubo currentilíneo pasa la cantidad ν de gas, tendremos

$$p_1 \Delta V_1 = \nu R T_1, \quad p_2 \Delta V_2 = \nu R T_2$$

y la expresión (2) toma la forma

$$\Delta A' = \nu R (T_1 - T_2). \tag{3}$$

Pasemos ahora al cálculo de la variación de la energía del gas ΔU y ΔE_c. Como la energía interna de un gas perfecto depende sólo de la temperatura, al pasar la cantidad de gas ν la energía interna de la parte separada variará en la magnitud

$$\Delta U = \nu C_V (T_2 - T_1), \tag{4}$$

donde C_V es la capacidad calorífica molar a volumen constante. La variación de la energía cinética

$$\Delta E_c = \nu \mu (v_2^2 - v_1^2)/2, \tag{5}$$

donde μ es la masa molar del gas; v_1 y v_2, las velocidades del chorro en las secciones *1* y *2*.

Poniendo las relaciones (3) — (5) en la ecuación de la ley de la conservación de la energía (1) y reduciendo ν, obtenemos

$$(C_V + R) (T_2 - T_1) + \mu (v_2^2 - v_1^2)/2 = 0. \tag{6}$$

Como las secciones *1* y *2* fueron tomadas al azar, de la relación (6) se desprende que la magnitud $(C_V + R) T + \mu v^2/2$ tiene un mismo valor a lo largo de toda la longitud de la línea de corriente. Teniendo en cuenta que $C_V + R = C_p$, donde C_p es la capacidad calorífica molar a presión constante, podemos escribir

$$C_p T + \mu v^2/2 = \text{const}. \tag{7}$$

A esta ecuación se le puede dar una forma análoga a la de Bernoulli en hidrodinámica de un líquido perfecto. Con este fin, dividimos la ecuación (7), término por término, entre el volumen molar V_μ. Teniendo en cuenta que $RT/V_\mu = p$ y μ/V_μ es la densidad del gas ρ, tendremos

$$p + \rho c_V T + \rho v^2/2 = \text{const},$$

donde $c_V = C_V/\mu$ es el calor específico del gas. Los términos primero y tercero en el primer miembro de esta ecuación coinciden con los correspondientes términos de la ecuación de Bernoulli. En la ecuación (8) falta el término ρgh que expresa la densidad de la energía potencial del gas (o del líquido) en el campo de la gravedad. Esto está ligado con que en la ecuación (1) no se tuvo en consideración la variación de la energía potencial, ya que se supuso que el chorro era horizontal. En comparación con la ecuación de Bernoulli, es nuevo el segundo término en la ecuación (8) que expresa la densidad de la energía interna del gas. En un fluido incompresible dicha densidad es invariable y ella debe tenerse en cuenta en la ecuación de balance de la energía.

La relación (7) permite expresar la velocidad del chorro de gas, que fluye del orificio en la botella, mediante la variación de la temperatura del gas. Como en el interior de la botella la velocidad del movimiento dirigido, prácticamente, es igual a cero,

$$C_p T = C_p T_1 + \mu v_1^2/2, \tag{9}$$

de donde para la velocidad del chorro v_1, obtenemos

$$v_1 = \sqrt{\frac{2}{\mu} C_p (T - T_1)}. \tag{10}$$

Con el fin de calcular la velocidad del chorro con la fórmula (10) es preciso conocer la temperatura T_1 del gas en el chorro. Ella puede determinarse con ayuda de la ecuación del proceso adiabático. Cuando el gas sale al vacío, podemos estimar la velocidad del chorro v_{vac} haciendo en la fórmula (10) $T_1 = 0$. Semejante estimación es razonable, ya que cuando tiene lugar la expansión en el vacío la presión del gas en el chorro baja hasta cero y, por lo tanto, debe también aproximarse a cero su temperatura:

$$v_{vac} \approx \sqrt{\frac{2}{\mu} C_p T}. \tag{11}$$

Señalemos que la energía cinética del movimiento dirigido del gas en el chorro surge a cuenta de la energía interna, es decir, la energía del movimiento térmico caótico de las moléculas del gas en la botella. La velocidad de salida se determina por la temperatura y no depende de la presión. La independencia entre la velocidad de salida y la presión está ligada con que la energía interna del gas perfecto sólo depende de la temperatura.

A la fórmula (11) se le puede dar una forma más idónea si C_p se expresa por $\gamma = C_p/C_V$, y la constante de los gases R:

$$C_p = \frac{C_p}{C_V} C_V = \gamma (C_p - R),$$

de donde $C_p = R\gamma/(\gamma - 1)$. De resultas, en lugar de (11) podemos escribir

$$v_{vac} = \sqrt{\frac{2}{\mu} \frac{\gamma}{\gamma - 1} RT}. \qquad (12)$$

Las fórmulas obtenidas para la velocidad de salida permiten efectuar una estimación comparativa para diferentes tipos de combustible para los propulsores cohetes. Para obtener mayores velocidades de salida de los gases de la tobera del cohete es preferente aquel combustible que posee alto poder calorífico (con el fin de obtener grandes temperaturas T en la cámara de combustión) y forma productos de combustión de pequeña masa molar. ▲

14. Relleno de un recipiente vaciado. En un recipiente termoaislado con volumen interno V se ha practicado un vacío profundo. El aire circundante tiene la temperatura T_0 y presión p_0. En cierto momento se abre el grifo, después de lo cual tiene lugar la rápida carga del recipiente con el aire atmosférico. ¿Qué temperatura T tendrá el aire en el recipiente una vez que se llene?

△ Hablando en general, ¿por qué debe variar la temperatura del aire atmosférico al llenar de éste el recipiente? Para comprender esto hay que examinar las transformaciones energéticas que transcurren al cargar el recipiente. Al abrir el grifo cierta porción de aire se «empuja» al recipiente por la presión atmosférica. Esto significa que sobre el aire que ha entrado en el recipiente realizan cierto trabajo las fuerzas de la presión atmosférica. Gracias a este trabajo, el aire que se precipita al recipiente adquiere la energía cinética del movimiento dirigido macroscópico, es decir, el aire entra en el recipiente en forma de chorro. Al tropezar con las paredes del recipiente y con el aire que ya lo ha ocupado, el chorro varía su dirección, se debilita y, a fin de cuentas, desaparece por completo. Con ello, la energía cinética del movimiento ordenado del aire en el chorro se transforma en la energía interna, es decir, en la energía de movimiento térmico caótico de sus moléculas.

Todo esto transcurre con tal rapidez que es posible despreciar el intercambio de calor entre el aire que entra en el recipiente y el aire en la atmósfera. Por esta razón, con arreglo al proceso que examinamos, el primer principio de la termodinámica tiene la forma: el trabajo A de las fuerzas de la presión atmosférica sobre el aire que entró en el recipiente es igual a la variación de la energía interna de dicho aire ΔU:

$$A = \Delta U. \qquad (1)$$

¿Cómo calcular este trabajo? Para ello, lo más sencillo es operar del siguiente modo. Imaginémonos que nuestro recipiente vaciado se encuentra en el interior de un gran cilindro con un émbolo móvil

(fig. 14.1). La presión y la temperatura del aire en el interior del cilindro grande son las mismas que en la atmósfera. Como al llenar de aire el recipiente vaciado la temperatura y la presión del aire en la atmósfera que lo rodea quedan invariables, el proceso de carga del recipiente en la fig. 14.1 corresponde al desplazamiento del émbolo a la derecha a presión constante p_0. Con ello, la fuerza que actúa sobre el émbolo por la izquierda realiza el trabajo p_0V_0, donde V_0 es la disminución del volumen dentro del cilindro. Ya que la energía del aire, que no entró en el recipiente, pero que se encuentra dentro del cilíndro queda constante, ese trabajo realizado al desplazar el émbolo es igual al trabajo efectuado por las fuerzas de la presión atmosférica al «empujar» el aire al recipiente.

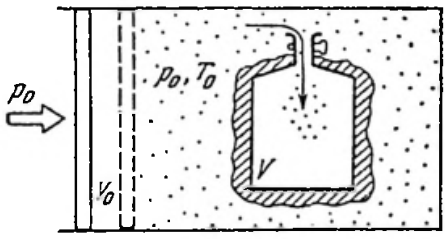


Fig. 14.1. Al llenar de aire el recipiente vaciado, las fuerzas de la presión atmosférica realizan trabajo igual a p_0V_0

Presten atención a que el cálculo, aducido aquí, del trabajo al desplazarse el aire se distingue de los cálculos considerados en el problema anterior. Esta diferencia se explica porque en este último nos interesaba el trabajo realizado sobre una porción aislada de aire en movimiento, mientras que aquí hallamos el trabajo sumario de las fuerzas externas sobre todo el aire que ha entrado en el recipiente.

La variación de la energía interna ΔU del aire que ha penetrado en el recipiente, se expresa sólo mediante la variación de su temperatura, claro está, si consideramos el aire como un gas perfecto:

$$\Delta U = \nu C_V (T - T_0), \tag{2}$$

donde C_V es la capacidad calorífica molar del aire. La cantidad de aire que ha entrado en el recipiente ν se puede expresar con ayuda de la ecuación de estado. Como en el recipiente vaciado entró, exactamente, tanto aire como el émbolo desalojó del cilindro al desplazarse (fig. 14.1), podemos escribir

$$p_0V_0 = \nu RT_0. \tag{3}$$

Ahora, la expresión (2) para la variación de la energía interna ΔU se anota en la forma

$$\Delta U = \frac{p_0V_0}{RT_0} C_V (T - T_0). \tag{4}$$

En correspondencia con el primer principio de la termodinámica (1), igualando la variación de la energía interna (4) y el trabajo reali-

zado $A = p_0V_0$, hallamos

$$C_V (T - T_0) = RT_0,$$

de donde, para la temperatura final del aire en el recipiente T, obtenemos

$$T = T_0 (1 + R/C_V). \quad (5)$$

Como la suma $C_V + R$ es igual a la capacidad calorífica molar a presión constante C_p la expresión (5) se puede escribir en la forma

$$T = T_0C_p/C_V = \gamma T_0. \quad (6)$$

La temperatura del aire que ocupó el recipiente vaciado resulta ser más alta que la del aire en la atmósfera. Señalemos, que el resultado no depende ni del volumen del recipiente ni de la presión del aire en la atmósfera. Tampoco depende la temperatura del aire en el recipiente de si la carga de éste se efectúa a fondo, o sea, hasta que la presión del aire en él se iguale a la atmosférica o bien si el grifo se cierra antes de esto. En efecto, todos los razonamientos aducidos en la solución son ciertos, asimismo, cuando la presión final del aire en el recipiente es menor que la atmosférica.

El aumento de la temperatura al llenar el recipiente, calculado con la fórmula (6), es muy considerable. Como para el aire $\gamma \approx 1{,}4$, el aire a la temperatura del medio ambiente debe calentarse a centenares de kelvines. Sin embargo, es complicado observar en un experimento ese considerable aumento de la temperatura. La cuestión radica en que en el transcurso del intervalo de tiempo necesario para medir la temperatura del aire, se establecerá el equilibrio termodinámico no sólo entre el aire en el recipiente y el termómetro, sino también entre el aire y las paredes del recipiente. Pero, al resolver el problema no tomamos en consideración la capacidad calorífica del recipiente. Por ello, la fórmula (6) sólo es cierta hasta el instante en que el aire en el recipiente alcanza el equilibrio termodinámico con las paredes. ▲

15. Proceso cíclico. ¿Qué trabajo, positivo o negativo, realiza un gas perfecto cuando transcurre el proceso cíclico que viene mostrado en la fig. 15.1?

△ El trabajo que realiza el gas en un proceso en equilibrio, con una pequeña variación de su volumen ΔV, es igual al producto $p\Delta V$. Por ello, es cómodo examinar el trabajo que efectúa el gas por medio del diagrama pV. En la fig. 15.2 se muestra cierto proceso cíclico en el que el gas pasa del estado *1* al *2* y, a continuación, retorna al estado inicial por otra vía, es decir, con ayuda de otro proceso en equilibrio. La comodidad del empleo de los diagramas pV consiste en que el trabajo que realiza el gas se representa en ellos por el área limitada con la gráfica del correspondiente proceso. P. ej., durante

la expansión del gas pasando del estado *1* al *2* él efectúa trabajo positivo, igual al área del trapecio curvilíneo mostrado con rayas verticales en la fig. 15.2, Cuando el gas se comprime del estado *2* al *1* el trabajo positivo lo realizan las fuerzas externas que comprimen el

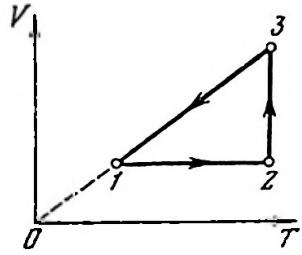


Fig. 15.1. En el diagrama VT el proceso cíclico transcurre en la dirección antihoraria

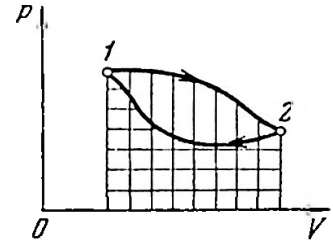


Fig. 15.2. En el diagrama pV el trabajo del gas se representa con la correspondiente área

gas, es decir, el propio gas realiza trabajo negativo, igual en módulo al área del trapecio curvilíneo mostrado en la indicada figura con rayas horizontales.

El trabajo total efectuado por el gas en el transcurso del proceso cíclico es igual en módulo al área limitada por la gráfica de este proceso en el diagrama pV. Como está claro de lo anteriormente expuesto, este trabajo es positivo si el proceso cíclico se realiza en sentido horario y negativo si el proceso cíclico transcurre en sentido antihorario.

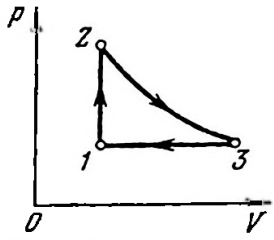


Fig. 15.3. En el diagrama pV el proceso cíclico que consideramos transcurre en la dirección horaria

Con el fin de responder de inmediato a la pregunta planteada en el problema, hay que representar el proceso indicado en la fig. 15.1 en el diagrama pV. En el sector *1—2* la temperatura del gas aumenta a volumen constante. Este es un proceso isocórico que en el mencionado diagrama se representa con un segmento vertical dirigido hacia arriba (fig. 15.3). En el sector *2—3* se produce la expansión del gas a temperatura constante. Esto es un proceso isotérmico y en el diagrama pV se representa con el segmento *2—3* de una hipérbola. Por fin, el sector *3—1* en la fig. 15.1 corresponde a un proceso isobárico, ya que aquí el volumen del gas es proporcional a la temperatura termodinámica (esto se desprende de inmediato de la ecuación de estado $pV = \nu RT$). En el diagrama pV a la compresión isobárica del gas corresponde el segmento de la recta horizontal *3—1*, dirigido a la izquierda.

Así pues, el proceso cíclico que examinamos corresponde en el diagrama pV al sentido horario de recorrido. Por lo tanto, el gas realiza trabajo positivo. ▲

16. Hielo artificial. ¿Cuánta energía hay que consumir para que 1 kg de agua, tomado a 0 °C, se convierta en hielo? La temperatura del medio ambiente es igual a 20 °C.

△ Si la temperatura del medio ambiente es más alta que 0 °C, el agua se puede congelar por medio de un aparato refrigerador. El esquema de principio de semejante aparato es, de por sí, el esquema

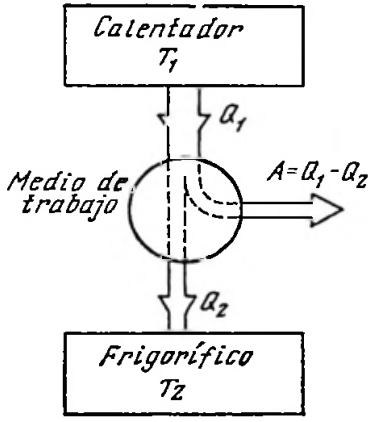


Fig. 16.1. Esquema de principio de la máquina térmica

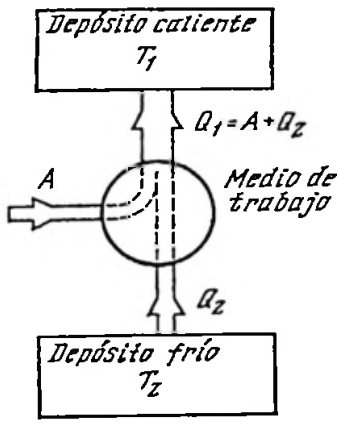


Fig. 16.2. Esquema de principio del aparato refrigerador

invertido de un motor térmico. En éste, a la sustancia (agente) de trabajo se le transmite cierta cantidad de calor Q_1 del calentador, es decir, de un depósito a temperatura constante T_1. Como resultado de los procesos, que transcurren con la sustancia de trabajo, cierta cantidad de dicho calor se transforma en el trabajo A, mientras que el resto del calor se transmite al refrigerador, o sea, a un depósito a temperatura más baja T_2. En forma esquemática el funcionamiento del motor térmico se muestra en la fig. 16.1.

El rendimiento del motor térmico η es la razón entre el trabajo A realizado durante un ciclo y la cantidad de calor Q_1 recibido del calentador:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}. \qquad (1)$$

Si el motor térmico funciona de modo reversible, es decir, según el ciclo de Carnot, en correspondencia con el segundo principio de la termodinámica, su rendimiento sólo depende de las temperaturas

del calentador y del refrigerador:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \qquad (2)$$

En el aparato refrigerador todos los procesos transcurren en sentido inverso (fig. 16.2). A cuenta de la realización del trabajo mecánico, cierta cantidad de calor Q_2 se toma del depósito a temperatura más baja T_2. Con ello, al depósito a temperatura más alta T_1 se transmite la cantidad de calor Q_1, igual a la suma $A + Q_2$. Si el aparato refrigerador funciona reversiblemente, es decir, puede utilizarse también como motor térmico, para él es, asimismo, cierta la relación (2).

Al emplear el aparato refrigerador para congelar el agua, el papel de depósito a temperatura más alta T_1 lo desempeña el aire circundante, mientras que el depósito a temperatura más baja T_2, el agua a congelar. La temperatura del agua queda invariable hasta que toda ella se convierta en hielo, esto ocurre a pesar de que de ella se toma calor. Con el fin de congelar la masa de agua m a 0 °C, hay que quitarle la cantidad de calor $Q_2 = \lambda m$, donde λ es el calor específico de fusión del hielo a 0 °C.

Sustituyendo en la relación (2) Q_1 por $A + Q_2$ y poniendo en lugar de Q_2 el producto λm, obtenemos

$$\frac{A}{A + \lambda m} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \qquad (3)$$

de donde

$$A = \lambda m \, (T_1/T_2 - 1). \qquad (4)$$

El rendimiento del motor térmico es tanto más alto, cuanto mayor sea la razón T_1/T_2. Mientras mayor sea dicha razón, tanto mayor parte del calor, recibido del calentador, se convertirá en trabajo. En el aparato refrigerador todo es a la inversa: la eficacia de su funcionamiento es tanto más alta, cuanto menor sea la razón T_1/T_2. Como se desprende de la fórmula (4), el trabajo A que hay que realizar para tomar del cuerpo frío una misma cantidad de calor λm será tanto menor, cuanto más próxima a la unidad sea la razón T_1/T_2. Así pues, cuanto más cercana a 0 °C sea la temperatura del aire circundante, menor cantidad de energía hará falta para congelar 1 kg de agua. A 20 °C la expresión entre paréntesis en la fórmula (4) es igual a $293/273 - 1 \approx 0{,}073$. El calor específico de fusión del hielo λ a 0 °C es igual a $3{,}34 \cdot 10^5$ J/kg. Por esta razón, para congelar 1 kg de agua se requiere realizar el trabajo $A = 2{,}4 \cdot 10^4$ J.

La fórmula (4) obtenida es cierta para el aparato refrigerador reversible y, por lo tanto, determina la energía mínima necesaria para congelar el agua. Cualquier aparato refrigerador real funciona de forma irreversible y por ello exige grandes consumos de energía.

Esta conclusión se basa en el segundo principio de la termodinámica y no depende de qué dispositivo se utiliza, precisamente, para congelar el agua. ▲

17. Calefacción dinámica. El principio del aparato refrigerador, considerado en el problema anterior permite comprender la idea de la calefacción dinámica expuesta por Thompson en 1852. Esta idea consiste en lo siguiente. El calor obtenido al quemar el combustible no se emplea para el calentamiento directo del local a calefaccionar, sino que se dirige a una máquina térmica para obtener trabajo mecánico. Con ayuda del trabajo obtenido se pone en funcionamiento un aparato refrigerador que toma el calor del medio ambiente y lo cede al agua en el sistema de calefacción. ¿En qué consisten las ventajas de semejante calefacción dinámica?

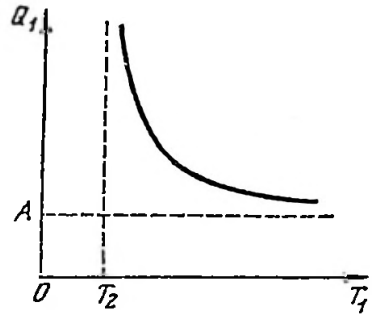


Fig. 17.1. Dependencia entre el calor que llega al sistema de calefacción y su temperatura

△ Si hay una fuente de energía, mediante la cual es posible obtener el trabajo mecánico A, durante la calefacción directa la cantidad de calor Q_1, que se alimenta al sistema, es igual a dicho trabajo: $Q_1 = A$. P. ej., en los electrocalentadores habituales toda la energía eléctrica que se consume, es decir, el trabajo de la corriente eléctrica, se transforma en calor.

Pero si dicho trabajo se utiliza para poner en funcionamiento el aparato refrigerador, entonces, como vimos en el problema precedente, el calor Q_1 que recibe el cuerpo a calentar será mayor que el trabajo que se realiza A: $Q_1 > A$. Supongamos que la temperatura del agua en el sistema de calefacción es igual a T_1, en tanto que la temperatura del medio ambiente que rodea el local que se calefacciona, p. ej., la del agua subterránea o la del agua en el río, T_2, con ello $T_2 < T_1$. En tal caso, de acuerdo con la fórmula (2) del problema anterior, cantidad de calor que recibe el sistema de calefacción

$$Q_1 = A\frac{T_1}{T_1 - T_2} = A\frac{1}{1 - T_2/T_1}. \qquad (1)$$

La gráfica de la dependencia de Q_1 respecto de la temperatura del sistema de calefacción T_1, expresada por la fórmula (1), se ofrece en la fig. 17.1. Vemos que cuanto menos se diferencia la temperatura del sistema de calefacción T_1 de la del medio ambiente T_2, tanto mayor ganancia proporciona semejante sistema en comparación con la conversión directa del trabajo en calor. Para una gran diferencia entre las temperaturas T_1 y T_2, cuando la razón $T_2/T_1 \ll 1$, el sistema

dinámico de calefacción no ofrece notorias ventajas, lo que se desprende de la fig. 17.1: $Q_1 \to A$.

En el sistema dinámico de calefacción el trabajo A se obtiene con ayuda de la máquina térmica, en la que el calentador, a una temperatura T, recibe el calor Q a cuenta de quemar el combustible. Vamos a considerar que dicha temperatura T es más alta que la del sistema de calefacción T_1: $T > T_1$. Como refrigerador de la máquina térmica se puede emplear bien el medio ambiente, o bien el agua en el propio sistema de calefacción. En el primer caso la temperatura del refrigerador será T_2, en el segundo, T_1. Examinemos por separado cada uno de estos casos.

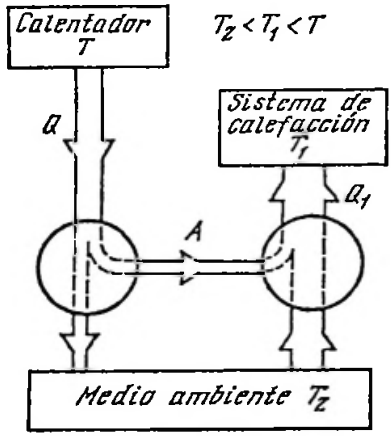


Fig. 17.2. Esquema de la calefacción dinámica en la que el aparato refrigerador de la máquina térmica es el medio ambiente

Comencemos por el primer caso. Aplicando la fórmula para el rendimiento de la máquina térmica, expresemos el trabajo A mediante la cantidad de calor Q que recibe el calentador al quemar el combustible:

$$\frac{A}{Q} = \frac{T - T_2}{T},$$

de donde

$$A = Q\,\frac{T - T_2}{T}. \qquad (2)$$

El calor que la máquina térmica cede al refrigerador se expulsa al medio ambiente y no se emplea para la calefacción. Por ello, todo el calor Q_1, recibido por el sistema de calefacción en el caso que analizamos, está condicionado por el efecto del aparato refrigerador. Poniendo la expresión (2) en la fórmula (1), hallamos

$$Q_1 = Q\,\frac{T_1}{T}\,\frac{T - T_2}{T_1 - T_2} = Q\,\frac{1 - T_2/T}{1 - T_2/T_1}. \qquad (3)$$

El esquema de funcionamiento de este sistema de calefacción dinámica se muestra en la fig. 17.2.

Ahora, veamos qué resulta en el segundo caso, cuando como refrigerador de la máquina térmica se emplea el agua en el sistema de calefacción. La expresión para el trabajo obtenida debido al funcionamiento de la máquina térmica, como antes, se da con la fórmula (2) en la que ahora, en lugar de T_2, hay que poner la temperatura T_1. Designando este trabajo con A', tendremos

$$A' = Q\,\frac{T - T_1}{T}. \qquad (4)$$

En el caso que analizamos el sistema de calefacción recibe el calor tanto como resultado del efecto del aparato refrigerador, como, directamente, de la máquina térmica para la que el sistema de calefacción sirve de refrigerador (fig. 17.3). El calor Q'_1, recibido a cuenta del aparato refrigerador, se determina por la fórmula (1) si en ella, en lugar de A, ponemos el trabajo A' tomado de la expresión (4):

$$Q'_1 = Q \frac{T_1}{T} \frac{T - T_1}{T_1 - T_2}. \qquad (5)$$

El calor Q', recibido por el sistema de calefacción de la máquina térmica, se halla con facilidad mediante la expresión para el rendimiento:

$$\frac{Q - Q'}{Q} = \frac{T - T_1}{T},$$

de donde

$$Q' = Q \frac{T_1}{T}. \qquad (6)$$

La cantidad total de calor Q''_1 que se alimenta al sistema de calefacción, es igual a la suma de Q'_1 y Q':

$$Q''_1 = Q \frac{T_1}{T} \left(\frac{T - T_1}{T_1 - T_2} + 1 \right) =$$

$$= Q \frac{T_1}{T} \frac{T - T_2}{T_1 - T_2}. \qquad (7)$$

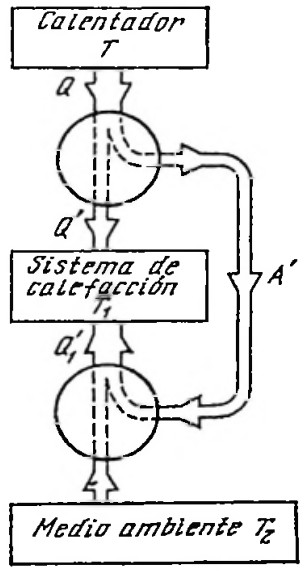


Fig. 17.3. En este esquema el refrigerador de la máquina térmica es el agua del sistema de calefacción

Comparando las fórmulas (7) y (3) vemos que los dos procedimientos de calefacción dinámica proporcionan igual resultado. Si reflexionamos, no veremos en ello nada asombroso: aunque en el segundo caso el rendimiento de la máquina térmica es más bajo que en el primero y, por lo tanto, para el funcionamiento del aparato refrigerador hace falta menos trabajo, en cambio, el sistema de calefacción recibe en directo trabajo adicional de la máquina térmica.

Prestemos atención a que en todos los cálculos y razonamientos hemos considerado que los procesos en la máquina térmica y el refrigerador son reversibles: las fórmulas empleadas para el rendimiento sólo son ciertas para las máquinas reversibles. Como, en mayor o menor grado, todas las máquinas reales son irreversibles, en la práctica el segundo procedimiento de la calefacción dinámica es preferente. En efecto, en este procedimiento la cantidad menor de energía, obtenida del depósito con la más alta temperatura T, sufre transformación doble: del calor en trabajo y, a continuación, de nuevo en calor. Por esta razón, en este caso, debido a la irreversibilidad, las

pérdidas son menores. Esto queda en particular claro en el caso límite de un rendimiento bajo de la máquina térmica real: con ello, el trabajo A es despreciablemente pequeño y en el primer caso (fig. 17.2) todo el calor Q pasará al medio ambiente, mientras que en el segundo (fig. 17.3) él se alimentará al sistema de calefacción.

Podemos cerciorarnos, sin ninguna clase de cálculos, de que en ambos procedimientos de realización de la calefacción dinámica se obtiene una misma cantidad de calor Q_1 (fórmulas (3) y (7)) si empleamos el segundo principio de la termodinámica en la enunciación de Clausius: es imposible llevar a cabo tal transformación cuyo único resultado sea la transición del calor de un cuerpo frío a otro caliente. Para demostrar lo dicho, supongamos lo contrario: p. ej., sea que el primer procedimiento de calefacción dinámica es más eficaz, o sea, con una misma cantidad de calor Q, obtenida del depósito a la más alta temperatura T, el sistema de calefacción a temperatura T_1 recibe más calor que al aplicar el segundo procedimiento:

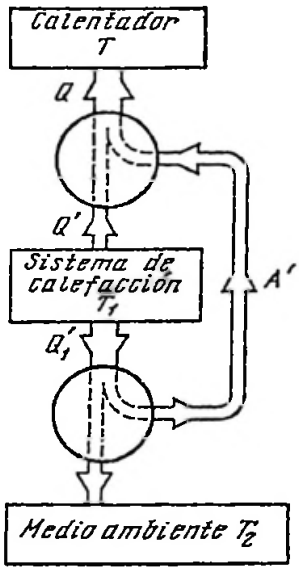


Fig. 17.4. Los procesos en el sistema invertido de calefacción dinámica

$$Q_1 > Q_1''. \qquad (8)$$

Invirtamos todos los procesos que transcurren al emplear el segundo procedimiento. Esquemáticamente esto se muestra en la fig. 17.4. Ahora, la máquina dispuesta entre los depósitos a temperaturas T_1 y T_2, trabaja como térmica y el trabajo A' que en ella se obtiene pone en funcionamiento el aparato refrigerador situado entre los depósitos a temperaturas T y T_1. Como resultado, el sistema de calefacción cede el calor $Q_1'' = Q' + Q_1'$, mientras que el depósito a la más alta temperatura T recibe el calor Q.

Ahora, tomemos el primer sistema de calefacción dinámica (fig. 17.2) y el segundo invertido (fig. 17.4) y obliguémoles a funcionar simultáneamente entre los mismos tres depósitos térmicos. A consecuencia de este funcionamiento conjunto el depósito a la temperatura T cede y recibe una cantidad igual de calor Q, es decir, en él no se produce ningún cambio. En virtud de la suposición expresada (8), el sistema de calefacción recibe más calor que cede y, en total, obtiene calor del medio ambiente. Así pues, el único resultado del funcionamiento conjunto de los dos sistemas, es la transición del calor del medio ambiente al sistema de calefacción, es decir,

de un cuerpo frío a otro caliente, lo que contradice el segundo principio de la termodinámica. Por consiguiente, la suposición (8) es incierta.

Por analogía puede demostrarse que, con los procesos reversibles, la suposición contraria acerca de la mayor eficacia del segundo procedimiento de la calefacción dinámica también conduce a contradecir el segundo principio de la termodinámica. Esto significa que ambos procedimientos son eficaces de igual modo: $Q_1 = Q'_1$.

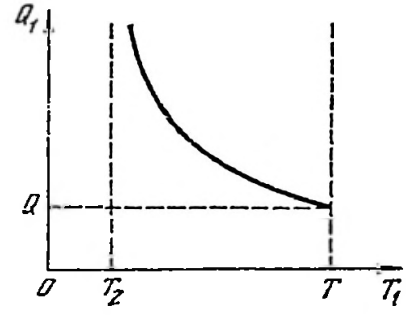


Fig. 17.5. Dependencia entre el calor alimentado al sistema de calefacción y su temperatura T_1 con la calefacción dinámica

Investiguemos la dependencia entre el calor Q_1, recibido por el sistema de calefacción, y la razón de las temperaturas del calentador T, del sistema de calefacción T_1 y del medio ambiente T_2. La gráfica de la dependencia entre Q_1 y T_1, expresada en la fórmula (3), se muestra en la fig. 17.5. Como la temperatura del sistema de calefacción T_1 es más baja que la del calentador T y más alta que la del medio ambiente T_2, la gráfica Q_1 se encuentra entre los puntos T_2 y T en el eje de abscisas.

De esta misma gráfica se desprende que para los valores prefijados de la temperatura del medio ambiente T_2 y del calentador T, el sistema dinámico será tanto más eficaz, cuanto más próxima sea la temperatura en el sistema de calefacción a la del medio ambiente. En tales condiciones el calor que llega al sistema de calefacción supera considerablemente el calor obtenido al quemar el combustible. Si la temperatura del calentador T sobrepasa la del sistema de calefacción en pequeño grado, el empleo del sistema dinámico no proporciona ventajas: $Q_1 \to Q$ cuando $T_1 \to T$.

Desde el punto de vista económico el empleo de la calefacción dinámica es ventajoso cuando los gastos para su construcción y servicio se compensan con el coste del combustible economizado.

Es de interés señalar que la calefacción dinámica puede asimismo funcionar si $T < T_1$, es decir, cuando es preciso transmitir al cuerpo el calor del calentador, cuya temperatura T es menor que la del cuerpo a calentar T_1. Es evidente, que para esto es posible, p. ej., hacer uso del esquema aducido en la fig. 17.4, en el que el calentador y el sistema de calefacción deben cambiarse de lugar entre sí. ▲

18. Intersección de la isoterma y la adiabática. ¿Puede existir tal sustancia que pueda pasar de cierto estado inicial a un mismo estado final tanto adiabática como isotérmicamente?

△ De inmediato está claro que un gas perfecto no sirve de ejemplo de semejante sustancia. En efecto, la energía interna de un gas perfecto es la energía cinética del movimiento caótico de sus moléculas, que sólo depende de la temperatura del gas. En la transformación adiabática el intercambio de calor con el medio ambiente no existe y, en virtud del primer principio de la termodinámica, sólo puede realizarse trabajo a cuenta de la energía interna. Por ello, p. ej., durante la expansión la energía interna decrece, lo que para un gas perfecto significa la disminución de su temperatura. Así pues, en el transcurso de la transformación adiabática el gas perfecto nunca llegará al estado con la misma temperatura.

Sin embargo, la variación de la temperatura en la transformación adiabática con una sustancia, en la cual entre sus moléculas existe interacción, puede no ser tan sencilla. P. ej., supongamos que la energía potencial de la interacción es tal que en estado fuertemente comprimido, cuando entre las moléculas las distancias son pequeñas, predominan las fuerzas de repulsión, mientras que en caso de expansión, es decir, al aumentar esas distancias, comienzan a predominar las fuerzas de atracción. Entonces, al parecer, puede suceder que con la expansión adiabática de un sistema desde el estado fuertemente comprimido, la disminución de la energía potencial de interacción de las moléculas asegura no sólo la realización de trabajo, sino también el aumento de la energía cinética del movimiento caótico, es decir, la elevación de la temperatura. Durante la posterior expansión, cuando la repulsión entre las moléculas cambia por la atracción, la energía potencial de interacción de las moléculas comenzará a aumentar. Ahora, semejante aumento de dicha energía, lo mismo que la realización de trabajo durante la expansión, transcurrirá sólo a cuenta de la energía cinética del movimiento caótico de las moléculas. Esto quiere decir que la temperatura del sistema bajará y puede tomar aquel valor que ella tenía antes del comienzo de la expansión.

Así pues, tomando en consideración la teoría cineticomolecular, a primera vista no se advierte por qué la sustancia con tales propiedades no podría existir. No obstante, se puede mostrar de inmediato que desde el punto de vista de los principios generales de la termodinámica la existencia de semejante sustancia es imposible. Es fácil demostrar esto razonando a la inversa.

Supongamos que tal sustancia existe, es decir, del estado inicial *1* podemos llegar a cierto estado *2* a la misma temperatura, tanto por la isoterma $T = \text{const}$, como por la adiabática $Q = 0$ (fig. 18.1).

Puede parecer que semejante marcha de la adiabática contradice el modelo de la sustancia hipotética, descrito más arriba, en el que durante la expansión adiabática la temperatura primero crece y, a continuación, disminuye. Como vemos en la fig. 18.1, de acuerdo con el modelo examinado, en un mismo volumen a las temperaturas más

altas corresponden menores presiones. Sin embargo, recordemos que no se trata de un gas perfecto, sino que de una sustancia hipotética, cuya ecuación de estado puede ser muy complicada.

Una sustancia con tales propiedades se puede emplear como agente de trabajo en la máquina térmica, cuyo ciclo de trabajo consta de la expansión isotérmica desde el estado *1* al *2* y de la compresión adiabática (fig. 18.2). En el transcurso de la expansión isotérmica el agente de trabajo recibe calor del medio ambiente. Durante la compresión adiabática no hay intercambio de calor. Al transcurrir todo

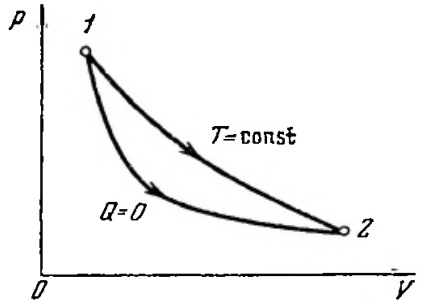


Fig. 18.1. La isoterma y la adiabática de una sustancia hipotética

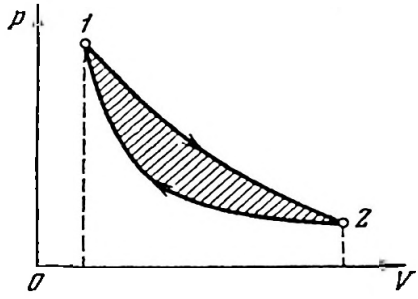


Fig. 18.2. El ciclo de la máquina térmica con medio de trabajo de una sustancia hipotética

el ciclo la máquina realiza trabajo positivo igual al área limitada por el ciclo en el diagrama p — V. Hacia el final del ciclo el agente de trabajo retorna al estado inicial y, por lo tanto, la energía interna toma el valor que tenía al comenzar el ciclo. Por esta causa, partiendo del primer principio de la termodinámica, podemos afirmar que todo el calor recibido por el sistema durante el ciclo se convirtió en trabajo. Semejante máquina es un móvil perpetuo de segunda especie. La existencia de semejante máquina está prohibida por el segundo principio de la termodinámica que, según la enunciación de Thompson, tiene la forma: es imposible crear una máquina térmica que funcione periódicamente y que convierta por completo en trabajo todo el calor recibido.

Así pues, hemos obtenido una contradicción respecto del segundo principio de la termodinámica.

En los razonamientos habíamos supuesto que la isoterma que une los estados *1* y *2* se encontraba en el diagrama p — V por encima de la adiabática y que con la expansión isotérmica nuestra sustancia hipotética recibía calor. Si suponemos que la adiabática yace más arriba que la isoterma o que con la expansión isotérmica la sustancia hipotética cede calor, o bien lo uno y lo otro conjuntamente, con ayuda de razonamientos análogos podemos cerciorarnos de que en

todos los casos llegaremos a contradecir bien el segundo principio de la termodinámica, o bien incluso el primero. ▲

19. Presión del aire húmedo. Dos recipientes de volumen $V = 10$ l cada uno contiene aire seco a la presión $p_0 = 1$ atm y temperatura $t_0 = 0$ °C. En el primero se echan $m_1 = 3$ g de agua, en el segundo, $m_2 = 15$ g y se calientan ambos recipientes hasta la temperatura $t = 100$ °C. Determinen la presión del aire húmedo en cada recipiente a esa temperatura.

△ El agua echada en el recipiente se evapora y, según la ley de Dalton, la presión en él será igual a la suma de las presiones parciales del aire y de los vapores de agua.

La presión parcial del aire p en ambos recipientes es la misma y se halla con facilidad mediante la ley de Charles, ya que el calentamiento de una masa invariable de aire transcurre a volumen constante (la dilatación térmica del recipiente puede despreciarse):

$$p = p_0 T/T_0 = 1 \text{ atm} \cdot 373 \text{ K}/273 \text{ K} = 1{,}37 \text{ atm}.$$

Ahora determinemos la presión parcial p_1 del vapor de agua en el primer recipiente a 100 °C. Para ello, empleamos la ecuación de Mendeliév — Clapeyron

$$p_1 = \frac{1}{V} \frac{m_1}{\mu} RT. \qquad (1)$$

Poniendo en (1) los valores numéricos de todas las magnitudes ($R = 0{,}082$ atm·l/(mol·°C), $\mu = 0{,}018$ kg/mol), hallamos $p_1 = 0{,}51$ atm < 1 atm. La presión total en el primer recipiente $p + p_1 = 1{,}88$ atm.

Calculando de este mismo modo la presión parcial del vapor de agua en el segundo recipiente, obtenemos $p_2 = 2{,}55$ atm > 1 atm.

Así pues, podía pensarse que la presión total en el segundo recipiente

$$p + p_2 = 3{,}92 \text{ atm}.$$

Pero no nos apresuremos. Reflexionemos, ¿puede la presión del vapor de agua a 100 °C ser mayor que 1 atm? Recordemos que a la presión de 1 atm el agua hierve a 100 °C. Esto significa que la presión del vapor de agua saturado es igual a 1 atm a 100 °C. Con otras palabras, la presión del vapor de agua a 100 °C, con la presencia de la superficie libre del líquido, no puede superar 1 atm. Por ello, en el segundo recipiente el agua se evaporará no por completo, el vapor será saturado y su presión parcial resultará igual a 1 atm. En dicho recipiente la presión total $p + 1$ atm $= 2{,}37$ atm.

Ahora, piensen cómo hay que calcular la masa del agua que no se evaporó en el segundo recipiente.

Al resolver este problema, con el fin de hallar la presión del vapor de agua, hicimos uso de la ley de Mendeléiev — Clapeyron,

es decir, la ecuación de estado de un gas perfecto. Esto se puede hacer para un vapor suficientemente enrarecido, sin que tenga importancia si es saturado o no. Pero, en estos dos casos, el contenido de la ley es diferente en absoluto. Si el vapor está lejos de la saturación, empleando la ecuación (1) hallamos la presión del vapor que resulta ser muy próxima a la que se observa en el experimento. El empleo de esta ecuación para calcular la presión del vapor saturado, como acabamos de ver, conduce a un absurdo. No obstante, esto no quiere decir que la ley no es cierta. Si la presión del vapor de agua, calculada según la ecuación (1), resulta ser mayor que la presión del vapor saturado a la temperatura dada, esto significa que, en realidad, la masa del vapor es menor que la que pusimos en la ecuación, es decir, parte de la sustancia se encuentra en la fase líquida. Poniendo en la fórmula (1) la presión del vapor saturado, tomada en las tablas, de ella se puede hallar la masa del vapor saturado, contenido en el volumen V a temperatura T.

Así pues, aplicando la ecuación de Mendeléiev — Clapeyron a los vapores siempre hay que tener a mano la tabla de la dependencia entre la presión del vapor saturado y la temperatura, es decir, la dependencia entre la temperatura de ebullición y la presión.

Ahora, con facilidad, se puede responder a la pregunta adicional planteada: determinar la masa del agua no evaporada en el segundo recipiente. ▲

20. El líquido en un tubo capilar. Un tubo capilar vertical de radio interior r se sumerge con su extremo inferior en un líquido con tensión superficial σ y densidad ρ. El líquido moja por completo la superficie del capilar. ¿Qué cantidad de calor se desprenderá en el proceso de ascensión del líquido?

△ ¿Por qué cuando el líquido asciende por el tubo capilar debe producirse el desprendimiento de calor? Por desprendimiento de calor entendemos la transformación irreversible de la energía mecánica, eléctrica y otros géneros de energía en la energía del movimiento caótico de las moléculas. En esencia, esta frase contiene la respuesta a la pregunta planteada: el estado inicial del sistema, cuando el extremo inferior del tubo se puso en contacto con el líquido, es un estado de desequilibrio, del cual el sistema espontáneamente pasa al estado final de equilibrio, con la particularidad de que dicha transición se efectúa de modo irreversible, con desprendimiento de calor.

Con el fin de hallar la cantidad de calor desprendido consideremos los detalles de esta transformación irreversible. En el estado final la columna de líquido se encontrará en reposo, después de ascender a la altura h, magnitud que puede ser determinada partiendo de la condición de equilibrio mecánico. La fuerza de la gravedad P, igual en módulo a $\pi r^2 h\rho g$, que actúa sobre la columna del líquido, se

compensa con la fuerza de la tensión superficial F, que actúa verticalmente hacia arriba, aplicada a la columna del líquido por el límite anular superior de contacto del líquido con la superficie interior del tubo capilar. La longitud de ese límite es igual a $2\pi r$, por lo que $F = 2\pi r\sigma$. Igualando P y F, obtenemos

$$h = 2\sigma/\rho g r. \tag{1}$$

El centro de masas de dicha columna de masa $m = \pi r^2 h\rho$ se encuentra a la altura $h/2$ sobre la superficie del líquido en el recipiente. Por ello, su energía potencial

$$E_p = mgh/2 = 2\pi\sigma^2/\rho g. \tag{2}$$

El trabajo A de la fuerza de la tensión superficial, realizado durante el ascenso del líquido a la altura h, es igual a

$$A = F \cdot h = 4\pi\sigma^2/\rho g. \tag{3}$$

Vemos que este trabajo de la fuerza de la tensión superficial es mayor que la energía potencial de la columna del líquido. Es evidente que el exceso de trabajo es, precisamente, igual a la cantidad de calor desprendido Q que buscamos:

$$Q = A - E_p = 2\pi\sigma^2/\rho g. \tag{4}$$

Es de interés señalar que durante el ascenso libre, cuando ningunas otras fuerzas, salvo la de la gravedad y de la tensión superficial, no actúan, la cantidad de calor desprendido es igual, exactamente, a la mitad del trabajo de la fuerza de la tensión superficial. Durante semejante ascenso el líquido, acelerado por las fuerzas de la tensión superficial, «pasa» por inercia la posición de equilibrio. Al no haber rozamiento, el líquido en el tubo capilar realizaría oscilaciones entretenidas junto a la posición media h, ascendiendo a la altura máxima $2h$. En la realidad, incluso con una viscosidad insignificante del líquido, dichas oscilaciones se amortiguan gradualmente, lo que se acompaña del desprendimiento de calor. Con viscosidad bastante grande las oscilaciones no surgen en absoluto: a la altura h la velocidad del líquido ya disminuye hasta anularse.

La cantidad de calor desprendido se puede menguar e, incluso, anular por completo, si se aseguran las condiciones para la transición reversible al estado final. Para ello, en el transcurso de todo el proceso de ascenso, la columna de líquido debe encontrarse en estado de equilibrio, es decir, además de la fuerza de la gravedad y de la fuerza de la tensión superficial, hay que aplicar a la columna una fuerza externa adicional. La transición reversible al estado final de equilibrio sólo es posible cuando el sistema que analizamos realiza trabajo sobre cuerpos externos. Por cierto, piensen ¿qué fuerza externa adicional hay que aplicar a la columna de líquido en cada momento

de su ascenso, para que no haya desprendimiento de calor? ¿Qué trabajo realizará, entonces, el sistema sobre los cuerpos externos?

Incluso habiendo obtenido respuesta a estas preguntas, merece la pena, además, reflexionar, asimismo, a cuenta de la reserva de qué energía se realiza el trabajo con las fuerzas de la tensión superficial y cómo explicar el hecho de que en el estado final de equilibrio estable la energía potencial es mayor que en el estado inicial de

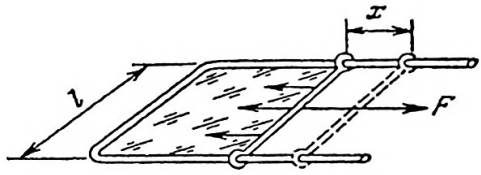


Fig. 20.1. Para el cálculo de la energía superficial de un líquido

desequilibrio. La cuestión radica en que, junto con la energía potencial en el campo de gravedad, el sistema que consideramos también se caracteriza por la llamada energía superficial. Esta es proporcional al área S de la superficie libre del líquido:

$$W_{sup} = \sigma S. \tag{5}$$

Esta expresión obtiénese igualando el trabajo, realizado por las fuerzas externas al aumentar el área de la superficie de la película horizontal (fig. 20.1), y el incremento de la energía superficial:

$$F \cdot x = 2\sigma l x = \Delta W_{sup}.$$

Al desplazar el puente en la fig. 20.1 el área de la superficie libre del líquido crece en $\Delta S = 2lx$, ya que la película tiene dos superficies libres. Como la variación lenta de la superficie que consideramos, con la que en cada momento hay equilibrio de las fuerzas, es reversible, la energía superficial puede ser considerada como potencial.

Si en el sistema sólo puede variar la energía superficial, el estado de equilibrio estable corresponde al mínimo del área de la superficie libre. P. ej., durante la caída libre las gotas tienen forma esférica, ya que con el volumen prefijado la forma esférica asegura la menor superficie.

En realidad, la energía superficial del líquido está ligada con la diferencia entre la energía potencial de interacción de las moléculas del líquido que se encuentran en el volumen y en la capa superficial. Al referir dicha energía a una molécula, ella es mayor en la capa superficial que en el interior del líquido. Por ello, el aumento de la superficie libre, cuando parte de las moléculas del volumen pasan a la capa superficial, requiere que se realice trabajo por las fuerzas externas.

Pero al ascender el líquido por el tubo capilar su superficie libre no varía prácticamente. Esto significa que tampoco cambia la energía superficial, ligada con la superficie libre. Sin embargo, al ascender por el tubo aumenta la superficie de contacto del líquido con el vidrio del tubo capilar. Si el líquido moja la superficie del sólido, es decir, espontáneamente se derrama por él, esto significa que la energía de las moléculas del líquido en la capa límite es menor que su energía dentro del líquido, lo que se debe a la interacción con las moléculas del sólido. Por esta causa, el aumento de la superficie de contacto con las paredes conduce a la disminución general de la energía potencial de interacción de las moléculas. De resultas, semejante aumento de la superficie de contacto a diferencia del aumento de la superficie libre, va acompañado de la realización de trabajo positivo por las fuerzas de la tensión superficial.

Así pues, el aumento de la energía potencial de la columna del líquido, al ascender éste por el tubo capilar, así como el desprendimiento de calor se producen a cuenta de la disminución de la energía potencial de interacción de las moléculas al pasar éstas de la profundidad del líquido a la capa que limita con la superficie que se moja. ▲

21. Presión del vapor sobre una superficie curvada. ¿Cómo influye la curvatura de la superficie del líquido sobre la presión de su vapor saturado?

△ La presión del vapor saturado, es decir, del vapor que se encuentra en estado de equilibrio termodinámico con su líquido, depende de la forma de la superficie de éste: sobre una superficie cóncava la presión es más baja, mientras que sobre la convexa, más alta que sobre la plana. Con el fin de hallar la dependencia entre la presión del vapor y la curvatura de la superficie del líquido, consideremos el fenómeno de ascenso (o descenso) del líquido por un fino tubo capilar abierto por los dos extremos, uno de los cuales está sumergido en el líquido. Supongamos que el espacio sobre el líquido está limitado y, por ello, después de establecerse el equilibrio en el sistema, resulta lleno de vapor saturado. Analicemos los casos límites de mojabilidad total (*a*) y de total no mojabilidad (*b*) de las paredes del tubo capilar por el líquido (fig. 21.1). En el caso *a* el menisco

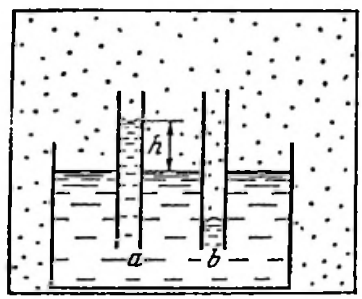


Fig. 21.1. En el campo de gravedad el vapor en un recipiente cerrado puede encontrarse en equilibrio con los sectores de la superficie del líquido con diferente curvatura

del líquido es cóncavo y se produce el ascenso del líquido, en el caso *b* el menisco es convexo y el líquido desciende. Como la presión del vapor decrece con la altura, está claro que sobre el líquido elevado ella será menor y sobre el descendido, mayor que sobre la superficie plana del líquido en el recipiente. Comparando esto con la forma del menisco en el tubo capilar, en ambos casos, llegamos a la conclusión de que la presión del vapor saturado sobre la superficie cóncava es menor y sobre la convexa, mayor que sobre la plana. Este resultado es cierto no sólo para el líquido en el tubo, sino también para toda superficie curvada de un líquido, p. ej., para la gota.

Analicemos el papel que desempeña la fuerza de la gravedad en el ejemplo que consideramos. En ausencia de dicha fuerza, la presión de los vapores debe ser igual a cualquier altura y, por ello, el vapor no puede encontrarse, simultáneamente, en equilibrio con los sectores del líquido que tienen diferente curvatura de la superficie. A la inversa, en el campo de la gravedad, donde la presión del vapor depende de la altura, el vapor puede al mismo tiempo hallarse en equilibrio tanto con la superficie plana, como con la cóncava y convexa. Precisamente así sucede en el ejemplo que examinamos.

Hallemos la dependencia cuantitativa entre la presión del vapor saturado y la curvatura de la superficie del líquido. Si h es la altura de ascenso del líquido por el tubo capilar (fig. 21.1), el decrecimiento de la presión del vapor saturado a semejante altura $\Delta p = \rho_{vap} g h$, donde ρ_{vap} es la densidad del vapor saturado a la temperatura dada. Por otro lado, la altura de ascenso del líquido puede ser expresada mediante la tensión superficial σ, la densidad del líquido ρ y el radio del tubo r (que en caso de mojabilidad total coincide con el radio de curvatura del menisco del líquido). Con este fin, hay que igualar el peso de la columna del líquido en el tubo capilar $\pi r^2 h \rho g$ a la fuerza de la tensión superficial $2\pi r\sigma$ que la sujeta. De aquí hallamos $h = 2\sigma/(\rho r g)$. Poniendo este valor de h en Δp hallamos que en las condiciones de equilibrio termodinámico la presión del vapor saturado sobre la superficie esférica cóncava de radio r es menor que sobre la plana en la magnitud

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r} \frac{\rho_{vap}}{\rho}. \qquad (1)$$

Para la superficie esférica convexa esta misma fórmula determina la elevación de la presión del vapor saturado en comparación con su presión sobre la superficie plana. La fórmula (1) no contiene la aceleración de la caída libre g, lo que no es casual. La ligazón de la presión del vapor saturado con la curvatura de la superficie de un líquido sólo está condicionada por la tensión superficial. Como ya señalamos más arriba, el papel de la fuerza de la gravedad se reduce a asegurar el equilibrio del vapor, simultáneamente, con los sectores de la superficie del líquido que tienen diferente curvatura.

En muchos casos, cuando r no es demasiado pequeño, podemos despreciar la dependencia entre la presión del vapor saturado y la curvatura de la superficie. En efecto, de la fórmula (1) se deduce que, incluso para gotas muy pequeñas de agua, cuyo radio sólo constituye 10^{-6} cm, la presión del vapor saturado crece solamente el 10%. Pero para gotas pequeñas de líquido esta dependencia puede desempeñar considerable papel. P. ej., imaginémonos un vapor que contiene gran número de gotas de líquido de diversos tamaños. Puede resultar que, con relación a las gotas grandes, el vapor es sobresaturado (es decir, su presión es mayor que en estado de equilibrio a la misma temperatura), mientras que, con relación a las gotas pequeñas, todavía no es saturado. Entonces, surge un flujo de vapor desde las superficies de las gotas pequeñas a las grandes, es decir, el líquido que se evapora de las gotas pequeñas se condensará sobre las grandes y, por lo tanto, éstas crecerán a cuenta de las pequeñas. Así pues, el estado de un sistema en el que, a una misma altura, existen simultáneamente tanto la superficie plana del líquido como gotas aisladas, no será de equilibrio, ya que a una misma altura, en equilibrio, la presión de los vapores saturados debe ser la misma.

Prestemos atención a que al deducir la fórmula (1) la densidad del vapor saturado ρ_{vap} se consideraba que no dependía de la altura. No obstante, para un radio muy pequeño del tubo capilar la altura de ascenso del líquido es tan grande que semejante suposición puede resultar ser demasiado ruda. Es evidente que para la presión de los vapores saturados hay que emplear, en tal caso, la fórmula barométrica en la que se tiene en cuenta la dependencia entre la densidad y la altura:

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right). \tag{2}$$

Aquí, m es la masa de la molécula de vapor; k, la constante de Boltzmann; T, la temperatura termodinámica. De la fórmula (2) se desprende que p_0 es la presión de los vapores saturados a $h = 0$, es decir, sobre la superficie plana.

Poniendo en la fórmula (2) el valor de la altura de ascenso del líquido en el tubo, hallada más arriba, $h = 2\sigma/(\rho r g)$, hallamos

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{2m\sigma}{kT\rho r}\right). \tag{3}$$

Esta fórmula determina la presión de los vapores saturados que están en equilibrio con la superficie cóncava del líquido. En el caso de la superficie convexa del líquido, sobre la que la presión de los vapores saturados es mayor que sobre la plana, la fórmula para la presión sólo se diferencia de (3) por el signo en el grado del exponente:

$$p = p_0 \exp\frac{2m\sigma}{kT\rho r}. \tag{4}$$

Estas fórmulas fueron obtenidas por vez primera por W. Thompson (Kelvin).

Con valores no demasiado pequeños del radio de curvatura de la superficie r, cuando el grado del exponente en (3) ó (4) es pequeño en comparación con la unidad, como es natural, estas fórmulas conducen al mismo resultado que proporciona la fórmula (1). Para mostrar lo dicho, hagamos uso de que para la función exponencial e^x es cierta la fórmula aproximada $e^x \approx 1 + x$, eso para pequeños x ($x \ll 1$). Como resultado, para el decrecimiento de la presión $\Delta p = p_0 - p$ sobre la superficie cóncava, con ayuda de la fórmula (3), hallamos

$$\Delta p = p_0 \frac{2m\sigma}{kT\rho r}. \tag{5}$$

Aplicando al vapor saturado la ecuación de estado del gas perfecto $p = nkT$ y tomando en consideración que el producto de la concentración de las moléculas de vapor n por la masa de éstas m es igual a la densidad del vapor ρ_{vap}, nos cercioramos de que la fórmula (5) coincide con la expresión (1).

Es de interés estimar a qué valores del radio de curvatura de las gotas, en lugar de la sencilla fórmula (1), hay que emplear la fórmula más precisa (4) para hallar la presión del vapor saturado. Es evidente, que tal necesidad surge cuando el grado del exponente en (4) se aproxima a la unidad. De aquí, para el radio de la gota obtenemos la estimación

$$r \leqslant 2m\sigma/(kT\rho). \tag{6}$$

P. ej., para el agua en la que $\sigma = 72$ dyn/cm, $m = 3 \cdot 10^{-23}$ g, a $T = 300$ K, obtenemos $r = 10^{-7}$ cm. Para semejante radio de las gotas ya no se puede emplear la fórmula (1). ▲

VI. ELECTROSTÁTICA

Una de las leyes fundamentales de la naturaleza, establecidas por vía experimental, es la ley de la conservación de la carga eléctrica. En un sistema aislado, ocurra en él lo que ocurra, la carga eléctrica total, es decir, la suma algebraica de las cargas positiva y negativa, siempre es constante.

La interacción de las cargas eléctricas en reposo se describe con la ley de Coulomb. Esta ley establece la dependencia entre la fuerza de interacción de dos cargas puntuales en el vacío y sus valores q_1 y q_2 y la distancia r entre ellas. En el Sistema Internacional de Unidades (SI) la ley tiene la forma

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_1}{r^2}, \tag{1}$$

donde ε_0 es la constante dieléctrica del vacío.

Las cargas eléctricas dotan al espacio que las rodea de propiedades físicas singulares, es decir, crean el campo eléctrico. La interacción de las cargas eléctricas se lleva a cabo por medio de los campos que ellas crean.

El campo creado por cargas inmóviles no varía con el tiempo y recibe el nombre de electrostático. La característica de fuerza del campo electrostático es la intensidad E, igual a la razón entre la fuerza que actúa sobre la carga de prueba y dicha carga. El campo creado por una carga puntual solitaria q es simétricamente esférico; el módulo de su intensidad, con ayuda de la ley de Coulomb (1), se puede representar en la forma

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|q|}{r^2}. \tag{2}$$

La característica energética del campo electrostático es el potencial φ, igual a la razón del trabajo realizado por las fuerzas del campo eléctrico al desplazar la carga de prueba desde el punto dado del campo hasta cierto punto, cuyo potencial se ha tomado igual a cero, a la carga de prueba. Sólo tiene sentido físico la diferencia de potencial entre los puntos que se consideran y no el valor absoluto de los potenciales de los puntos. La existencia del potencial como característica energética del punto del campo está ligada con que el trabajo de las fuerzas del campo, al desplazar la carga, no depende de la forma de la trayectoria sino que se determina por la posición de los puntos inicial y final. Los campos que poseen esta propiedad llevan el nombre de potenciales.

Al considerar el campo electrostático de una carga puntual, en calidad de punto con potencial nulo, es idóneo elegir un punto alejado al infinito. Entonces, la expresión para el potencial de un punto que dista r de la carga, tiene la forma

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r}. \tag{3}$$

Los campos eléctricos se representan gráficamente ya sea con ayuda de las líneas de intensidad, o bien mediante las superficies equipotenciales. Las prime-

ras son perpendiculares a las superficies de potencial constante, por ello, al tener una de estas figuras es posible] construir la otra.

Los campos eléctricos satisfacen el principio de superposición: el campo eléctrico de un sistema de cargas es la suma de los campos de las cargas por separado. La intensidad del campo, creado por varias cargas, es igual a la suma vectorial de las intensidades de los campos creados por cada carga por separado. El potencial de un punto, tomado al azar de un campo de varias cargas, es igual a la suma algebraica de los potenciales creados en dicho punto por cada carga. Con ello, el punto de potencial nulo se toma uno común para todas las cargas.

Existe una ley más, equivalente a la de Coulomb, que, con el mismo éxito, puede considerarse como la ley fundamental de la interacción electrostática. Nos referimos al teorema de Gauss. La equivalencia entre el teorema de Gauss y la ley de Coulomb se basa en la proporcionalidad inversa de la fuerza de interacción entre dos cargas puntuales al cuadrado de la distancia y en el principio de superposición. El teorema de Gauss es aplicable a todo campo potencial donde actúa la ley de los cuadrados inversos, p. ej., al gravitacional.

El teorema de Gauss se enuncia del siguiente modo: en el vacío el flujo N de la intensidad del campo eléctrico E por cualquier superficie cerrada imaginaria queda definida por la carga total q ubicada en el interior de dicha superficie

$$N = q/\varepsilon_0.$$

En muchos de los problemas de este capítulo se consideran conductores situados en el campo eléctrico. En estado estático, la intensidad del campo eléctrico en el interior del conductor es nula, además todos sus puntos tienen iguales potenciales. Las cargas libres se disponen sobre la superficie del conductor. Fuera del conductor, en las proximidades de sus límites, las líneas de intensidad son perpendiculares a la superficie, mientras que la intensidad del campo está ligada a la densidad de las cargas σ en la superficie con la siguiente relación que se desprende del teorema de Gauss:

$$E = \sigma/\varepsilon_0. \tag{4}$$

La capacidad de un conductor solitario sólo se determina por su forma y dimensiones y se mide con la razón entre la carga Δq, comunicada al conductor, y la variación del potencial $\Delta\varphi$ de éste que con ello se produce.

La capacidad del sistema de dos conductores, cargados con cargas opuestas iguales en módulo (condensador), se determina por la razón entre la carga de uno de los conductores y la diferencia de potencial entre él y el otro conductor y sólo depende de las dimensiones, forma y disposición mutua de los conductores. P. ej., la capacidad en el vacío de un condensador con placas de área S y con una distancia d entre ellas

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}. \tag{5}$$

Un condensador cargado tiene energía. Si la carga del condensador es igual a q y la diferencia de potencial entre las placas U, su energía será

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}. \tag{6}$$

La energía de un condensador cargado se puede considerar bien como la energía de la interacción de las cargas, concentradas en sus armaduras, o bien como la energía del campo eléctrico creado por dichas cargas. En los márgenes de electrostática ambas representaciones son equivalentes. Al estudiar los campos variables con el tiempo (ondas electromagnéticas) es posible establecer que, en realidad, la energía está concentrada en el campo.

La expresión (6) para la energía de un condensador plano, si la consideramos como la energía del campo eléctrico contenido entre sus armaduras, tiene

la forma

$$W = \frac{\varepsilon_0 E^2 V}{2}, \tag{7}$$

donde $V = Sd$ es el volumen ocupado por el campo. El coeficiente de V tiene el sentido de la densidad volumétrica de la energía del campo electrostático.

Si el espacio entre las armaduras de un condensador plano está ocupado por un dieléctrico con constante dielétrica ε, la capacidad del condensador aumenta ε veces:

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}. \tag{8}$$

Como sigue de las fórmulas (6) y (8), la expresión para la energía del campo eléctrico en un dieléctrico puede escribirse en la forma

$$W = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2 V}{2}. \tag{9}$$

En esta fórmula E es la intensidad del campo eléctrico en el dieléctrico.

1. Una carga dentro de una esfera conductora. La carga puntual q está ubicada en el interior de una esfera conductora de finas paredes, cuyo radio es R, y se encuentra a la distancia l de su centro. ¿Qué cargas se inducirán en las superficies interior y exterior de la esfera y cuál será la figura del campo eléctrico en los siguientes dos casos: 1) la esfera está puesta a tierra, 2) la esfera está aislada y no cargada?

△ Para empezar, consideremos el primer caso. La esfera metálica está puesta a tierra, es decir, mediante un conductor se une a la Tierra que es un cuerpo conductor de enormes dimensiones. Prácticamente, el potencial de nuestro planeta no varía, a pesar de que, con semejante unión, cierta carga podría pasar de la esfera a la Tierra y a la inversa. Si tomamos igual a cero el potencial de un punto alejado al infinito, el potencial de la Tierra y, por lo tanto, el de la esfera metálica unida a ella, también será igual a cero. En efecto, debido a las enormes dimensiones del planeta, en comparación con las de la esfera, se puede considerar que la Tierra se extiende hasta el infinito.

En la profundidad de las paredes de la esfera metálica, como en cualquier conductor en estado de equilibrio, no hay campo eléctrico. Tampoco lo hay en el espacio que rodea a la esfera (fig. 1.1). En realidad nada variará si consideramos que todo ese espacio está ocupado por el conductor (fig. 1.2). Por esta razón, en la superficie exterior de la esfera metálica, conectada a Tierra, no hay carga eléctrica.

Hallemos la carga inducida a la superficie interior de la esfera metálica. Primero, intentemos simplificar el problema: ubiquemos la carga puntual q en el centro de la esfera (éste es un caso particular). De la simetría está claro en absoluto que la carga inducida se distribuirá uniformemente por la superficie interior de la esfera. Según

el principio de superposición el campo eléctrico fuera de la esfera es la suma de los campos creados por la carga puntual q y la carga inducida q'. Como fuera de la esfera estos campos se compensan entre sí, $q' = -q$, es decir, en la superficie interior de la esfera se induce una carga igual en módulo de signo contrario.

Pensemos en qué pasará si la carga q se halla en un punto arbitrario dentro de la esfera. Es fácil comprender que la carga inducida q' no depende de la disposición de la carga q en el interior de la

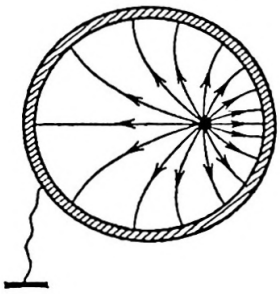


Fig. 1.1. Si la esfera está conectada a tierra sólo habrá campo eléctrico en su interior

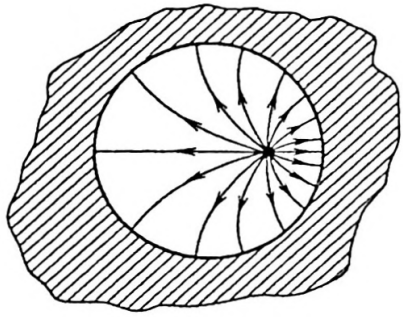


Fig. 1.2. El campo eléctrico en la cavidad del conductor no depende de lo que la rodea

esfera, es decir, de la distancia l. Durante el desplazamiento de la carga q en el seno de la esfera, sólo cambiará la distribución de la carga inducida por la superficie interior de la esfera.

Como en cualquier punto fuera de la esfera no hay campo, podemos afirmar que el sistema de cargas q y q' es electroneutro: $q' = -q$. (Señalemos que la afirmación inversa no es cierta: de la neutralidad del sistema no se desprende que el campo creado por él es nulo; en calidad de ejemplo de semejante sistema se puede aducir el dipolo.)

Este resultado se hace en particular evidente si hacemos uso de la figura de las líneas de intensidad. Como sabemos las líneas de intensidad del campo electrostático comienzan en las cargas positivas y acaban en las negativas y que el número de líneas de intensidad está ligado unívocamente con el valor de la carga. Fuera de la esfera no hay campo, es decir, no hay líneas de intensidad. Con otras palabras, en el caso que consideramos todas las líneas de intensidad comienzan y terminan en las cargas q y q', de lo que sigue de inmediato que la carga total $q + q' = 0$.

Si la carga q se encuentra en el centro de la esfera, la figura de las líneas de intensidad es simétrica: ellas son rectas radiales lo mismo que en el caso de la carga puntual solitaria. La figura de las líneas de intensidad del campo eléctrico en el interior de la esfera con la

carga q desplazada del centro será más complicada. Claro está, que junto a la carga puntual ella queda casi sin variación, pero a medida que se alejan de la carga las líneas de intensidad se curvan, de modo que ellas se aproximan a la superficie interior de la esfera bajo ángulo recto (fig. 1.1). Por ello, la espesura de las líneas de intensidad y, por lo tanto, la densidad superficial de las cargas inducidas serán las mayores en el punto de la superficie interior de la esfera más próximo a la carga q.

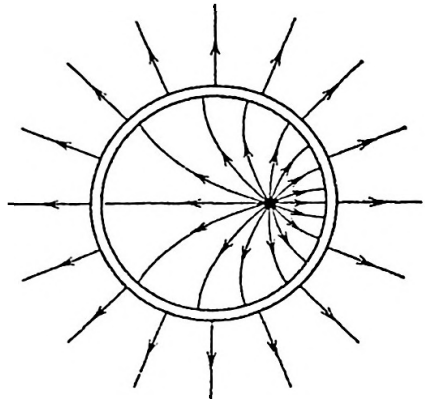


Fig. 1.3. Si la esfera está aislada también habrá campo eléctrico en el exterior

Pasemos al segundo caso, en que la esfera metálica de finas paredes está aislada. Ahora, el campo eléctrico está presente tanto dentro, como fuera de la esfera (fig. 1.3). Como es lógico, en la profundidad de las paredes, o sea, en el conductor no hay campo.

De nuevo comencemos por un sencillo caso particular: la carga q se encuentra en el centro de la esfera. De la simetría se desprende que las cargas inducidas se disponen uniformemente por las superficies interior y exterior de la esfera. Como no hay campo en el espesor de las paredes de la esfera, la carga q_1 inducida en la superficie interior es igual a $-q$. La carga q_2 situada en la superficie exterior de la esfera no crea campo en su interior. De la electroneutralidad de la esfera conductora se desprende que $q_2 = -q_1 = q$. Así pues, el potencial fuera de la esfera es igual a $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$, es decir, el campo eléctrico creado por este sistema coincide con el campo de la carga puntual situada en el centro de la esfera.

Al desplazar la carga q del centro de la esfera, lo mismo que en el caso anterior, varía la distribución de la carga q_1 en la superficie interior de la esfera, además de manera que el campo en la profundidad de las paredes de la esfera sigue siendo igual a cero. Con ello, el campo en la cavidad dentro de la esfera claro está que varía, pero la carga inducida q_1 sigue siendo la misma. La carga en la superficie exterior $q_2 = q$ está distribuida, como antes, uniformemente y no crea el campo en el interior de la esfera. Así pues, el campo fuera de la esfera no depende de la disposición de la carga q dentro de ella.

Señalemos que si la esfera aislada estuviera cargada antes de la introducción de la carga q en ella, esta carga excesiva Q, como es fácil comprender, quedará distribuida uniformemente por la superficie exterior, de modo que la carga total en esa superficie será igual

a $q + Q$. En el interior de la esfera, la figura de distribución del campo y de las cargas inducidas no variará. ▲

2. Carga entre dos esferas. La carga q se encuentra entre dos esferas concéntricas conductoras, puestas a tierra, con radios a y b a una distancia r del centro ($a < r < b$) (fig. 2.1). Hallen las cargas inducidas en las esferas.

△ Si el lector comprendió el problema anterior, estará para él completamente claro que sólo hay campo eléctrico en el espacio entre las esferas y, por ello, la carga total del sistema es igual a cero:

$$q + q_a + q_b = 0. \qquad (1)$$

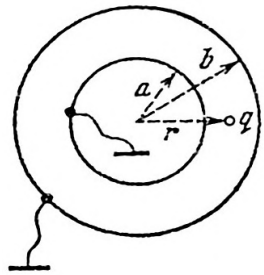


Fig. 2.1. La carga puntual q entre dos esferas conductoras conectadas a tierra

La segunda ecuación necesaria para hallar las cargas incógnitas q_a y q_b se puede obtener escribiendo las expresiones para el potencial en el centro de las esferas. Claro que el potencial en todos los puntos del interior de la esfera pequeña es el mismo e igual al de la Tierra, pero para confeccionar la ecuación elegimos precisamente el centro de la esfera, ya que todas las cargas inducidas en cada una de las esferas se encuentran a iguales distancias a y b de ese punto. En correspondencia con el principio de superposición el potencial en el centro de la esfera es igual a la suma de los potenciales de los campos creados por la carga q y por las cargas inducidas en las esferas. Consideramos, p. ej., el campo creado por las cargas de la esfera pequeña. Dividiendo la carga q_a inducida en ella en pequeñas partes Δq_i, que podemos considerar como cargas puntuales, para el potencial en el centro de la esfera, obtenemos la expresión

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{\Delta q_i}{a} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a} \sum_i \Delta q_i = \frac{q_a}{4\pi\varepsilon_0 a}. \qquad (2)$$

Es notable que esta sencilla expresión para el potencial se obtiene a pesar de que las cargas, creadoras del campo eléctrico, están distribuidas de forma no uniforme por la esfera. Más aún, para hallar el potencial en el centro de la esfera no es obligatorio conocer cómo están distribuidas, precisamente, las cargas.

Es posible obtener una expresión análoga para el potencial creado en el centro de la esfera por la carga q_b, inducida en la esfera exterior. Ahora, es fácil escribir la fórmula para el potencial total en el centro de la esfera, creado por todas las cargas. Igualándolo a cero, obtenemos

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r} + \frac{q_a}{a} + \frac{q_b}{b}\right) = 0. \qquad (3)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (1) y (3), hallamos

$$q_a = -q\frac{a}{r}\frac{b-r}{b-a}, \quad q_b = -q\frac{b}{r}\frac{r-a}{b-a}. \tag{4}$$

Como era de esperar, los signos de las cargas inducidas son contrarios a el de q. Si en estas fórmulas hacemos igual a cero el radio de la esfera interior a, llegaremos al problema anterior acerca de la carga puntual dentro de la esfera conductora. Con ello, como se desprende de (4), $q_a = 0$, $q_b = -q$.

Si hacemos que tienda al infinito el radio de la esfera exterior b, llegaremos al problema acerca de la carga puntual junto a la esfera conductora de radio a. La primera de las fórmulas (4) proporcionará, en este caso, la carga inducida en la esfera:

$$q_a = -q\frac{a}{r}. \tag{5}$$

Al aproximar ilimitadamente la carga q a la superficie exterior de la esfera, es decir, cuando $r \to a$, la carga inducida cada vez menos se distingue en módulo de la carga q que se aproxima a la esfera.

¿Qué les parece? ¿Qué sentido tiene la carga q_b en la fórmula (4) en el caso límite considerado $b \to \infty$?

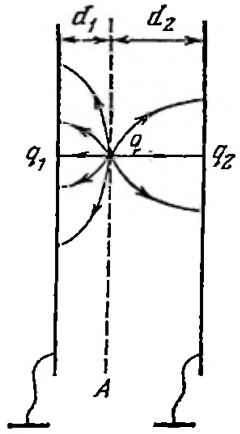


Fig. 2.2. La carga puntual q entre planos conductores infinitos

Empleando la solución de este problema podemos hallar las cargas inducidas en el caso, cuando la carga puntual q se encuentra entre dos planos infinitos paralelos conductores (fig. 2.2). Con dicho fin, es preciso hacer que tiendan al infinito los radios de ambas esferas dejando constante la distancia entre ellas y la posición de la carga q respecto de las superficies de las esferas: $a \to \infty$, $b \to \infty$, $b - a = \text{const} = d_1 + d_2$. Realizando minuciosamente el paso al límite, hallamos

$$q_1 = -q\frac{d_2}{d_1+d_2}, \quad q_2 = -q\frac{d_1}{d_1+d_2}. \tag{6}$$

Con la disposición simétrica de la carga q entre los planos $q_1 = q_2 = -q/2$.

Por supuesto, se puede buscar otra solución independiente. En realidad, el plano es más «sencillo» que la esfera. El problema con los planos es un problema límite, un caso más sencillo del problema con las esferas. Por ello, es natural inventar para él una solución independiente más sencilla, que se pudiera utilizar para comprobar la solución del problema de las esferas.

Vamos a razonar del siguiente modo. ¿Qué pasará si desplazamos la carga q a otro punto del plano A (fig. 2.2)? Es evidente que sólo

variará la distribución de las cargas inducidas en los planos, en lo que se refiere a las propias cargas q_1 y q_2 ellas seguirán siendo las mismas: simplemente las cargas inducidas se desplazarán junto con la carga q. Si ubicamos sobre dicho plano varias cargas puntuales, debido al principio de superposición, cada carga inducirá en el plano tales cargas como si ella estuviera sola. Por ello, si nos interesa el valor de las cargas inducidas y no su distribución, la carga q se puede «extender» uniformemente por todo el plano A. Debido a esto, las cargas inducidas no varían, mientras que el problema se simplifica sumamente, ya que en tal caso el campo es homogéneo. La intensidad del campo a la izquierda de ese plano $E_1 = q_1/\varepsilon_0 S$ (S es el área de las placas), a su derecha $E_2 = q_2/\varepsilon_0 S$, ya que las cargas q_1 y q_2, inducidas en las superficies interiores de las placas, en este caso se distribuyen uniformemente. Como la diferencia de potencial entre el plano A y cada una de las placas es la misma, tendremos $E_1 d_1 = E_2 d_2$, de donde se desprende de inmediato

$$q_1 d_1 = q_2 d_2. \tag{7}$$

Por fuera de las placas no hay campo, las cargas inducidas sólo se encuentran en las superficies interiores de las placas y, sobre la base del teorema de Gauss, podemos afirmar que

$$q_1 + q_2 + q = 0. \tag{8}$$

Resolviendo conjuntamente las ecuaciones (7) y (8) obtenemos la solución, es decir, la fórmula (6).

¡No siempre es razonable reducir el problema al anterior! ▲

3. Una semiesfera cargada. La superficie semiesférica de una copa de radio R y finas paredes está cargada con densidad constante. Determinen el potencial en cada punto de la superficie que cubriría la copa como «la piel estirada en un tambor».

△ A primera vista el problema parece bastante complicado. Si en la superficie que nos interesa elegimos un punto arbitrario, la distancia desde él hasta diferentes puntos de la semiesfera cargada será distinta: se crea la impresión de que sin las matemáticas superiores no podremos hallar la solución. ¡Pero no nos precipitemos! Resulta que podemos resolver el problema con facilidad haciendo uso del principio de superposición de los campos eléctricos y de consideraciones de simetría.

Para empezar, examinemos una esfera cargada uniformemente por su superficie. Como ya sabemos, en su interior no hay campo eléctrico. Por otro lado, podemos considerar el campo dentro de la esfera como la superposición de los campos de dos esferas. Analicemos el campo eléctrico, creado por las cargas de las semiesferas superior e inferior en su plano de contacto. Elijamos al azar el punto A en dicho plano (fig. 3.1) y tracemos por aquél un plano vertical perpen-

dicular al diámetro de la esfera BC, en el que yace el punto A. La intensidad del campo eléctrico de la esfera, igual a cero en ese punto, es la suma vectorial de las intensidades de los campos creados por elementos aislados de las semiesferas superior e inferior. Como es fácil cerciorarse, la suma vectorial de las intensidades E_1 y E_2', creadas por los sectores S_1 y S_2, es también nula. El sector S_1' de la semiesfera inferior, simétrico al sector S_2 con relación al plano de contacto de las semiesferas, crea en el punto A una intensidad del campo E_2' tal que la suma vectorial de E_1 y E_2' es perpendicular al plano de contacto de las semiesferas. Como para cada elemento S_1 a la izquierda del plano vertical hallaremos el respectivo elemento S_2' a la derecha del mencionado plano, la intensidad total del campo, creado en el punto A por toda la semiesfera inferior (es decir, por la copa semiesférica), es perpendicular al plano de contacto (o sea, a la superficie imaginaria que cubre la copa como «la piel estirada en un tambor»).

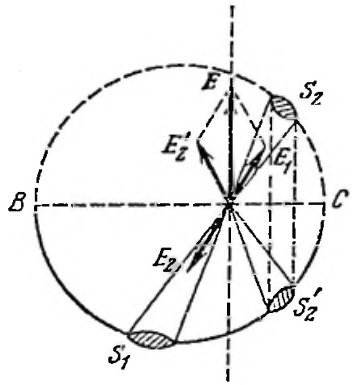


Fig. 3.1. La intensidad del campo eléctrico E de una semiesfera, cargada uniformemente, en el punto A es perpendicular al diámetro BC

El punto A fue elegido en absoluto al azar, por ello lo dicho es cierto para todos los puntos de la superficie que nos interesa. Si la intensidad del campo es perpendicular a la superficie en cualquier punto, la superficie es equipotencial. Lo más sencillo es calcular el potencial de dicha superficie en el punto que yace en el eje de simetría de la copa. Ese punto está a una misma distancia de la superficie de la copa y, según el principio de superposición, su potencial

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi R^2\sigma}{R} = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}.$$

Aún con mayor sencillez se puede resolver este problema considerando no la intensidad del campo, sino el potencial en un punto arbitrario en la superficie que nos interesa. De nuevo examinemos un problema auxiliar: hallemos el potencial φ_0 del campo creado por la esfera cargada uniformemente. El es el mismo en todos los puntos en el interior de la esfera e igual a $\sigma R/\varepsilon_0$.

Por otro lado, de acuerdo con el principio de superposición, dicho potencial es igual a la suma de los potenciales creados por las dos semiesferas. De la simetría está claro que en cualquier punto de la superficie que nos interesa, los potenciales del campo eléctrico, creados en las semiesferas superior e inferior, son iguales. Por ello, el

potencial del campo, creado por una semiesfera conductora en todos los puntos de esa superficie, es el mismo e igual a $\varphi = \varphi_0/2 = \sigma R/2\varepsilon_0$.

Piensen por su cuenta cómo hallar el potencial en cualquier punto del plano de «la piel» si continuamos éste tras los límites de la copa. ▲

4. Un dipolo junto una pared conductora. Una molécula biatómica, constituida de átomos de distintos elementos y, por lo tanto, que posee disposición asimétrica de la densidad electrónica, p. ej., el cloruro de hidrógeno HCl, es en su total un sistema electroneutral, en el que no coinciden en el espacio las posiciones de los centros de las cargas positiva y negativa. Con la primera aproximación podemos considerar semejante molécula polar como el conjunto de dos cargas puntuales q y $-q$, de signos contrarios e iguales en módulo, separadas entre sí a cierta distancia l. Este sistema de cargas lleva el nombre de dipolo eléctrico. ¿Cuál será la interacción de tal molécula polar con la pared conductora del recipiente?

△ Como las dimensiones de las moléculas son pequeñas, con suficiente precisión, podemos considerar que las paredes del recipiente son planas. Por ello, con el fin de hallar la fuerza que actúa sobre la molécula por parte de la pared, es posible examinar el problema de la interacción del dipolo con un plano conductor infinito.

Las fuerzas de interacción entre el dipolo y la pared surgen debido a que las cargas del primero inducen cargas en la superficie conductora de la pared. La interacción del dipolo con semejantes cargas inducidas es, precisamente, la interacción con la pared conductora. Para hallar la fuerza que actúa sobre el dipolo es cómodo hacer uso del llamado método de las imágenes eléctricas. La esencia del mencionado método se ilustra de la forma más sencilla en el ejemplo de la interacción de una carga puntual con la pared conductora. Después de esto, la interacción del dipolo con la pared se podrá hallar con ayuda del principio de superposición.

Aclaremos cuál será el campo eléctrico si a la distancia r de un gran trozo de metal con límite plano se ubica la carga puntual q (fig. 4.1). Ante todo, está claro que en la profundidad del metal no hay campo eléctrico: $E = 0$. Nos queda encontrar el campo en el semiespacio izquierdo que contiene la carga q. Como en la superficie del conductor se inducen cargas, el campo total a la izquierda es la suma de los campos de la carga q y de las cargas inducidas. ¿Cómo hallar el campo de las cargas inducidas? El campo en el semiespacio derecho, igual a cero, también se puede considerar como suma de los campos de la carga q y de las cargas inducidas en la superficie del metal. Por esta razón, está claro que el campo de las cargas inducidas a la derecha del límite es equivalente al campo de una carga puntual $-q$ ubicada en el mismo punto donde se encuentra la carga q. Pero el campo de las cargas inducidas es simétrico con

relación al límite plano del metal. Por esto, a la izquierda del límite él es equivalente al campo de la carga puntual $-q$, situada a la derecha del plano de separación, simétricamente respecto de la carga q (fig. 4.2).

Así pues, la fuerza que actúa sobre la carga puntual q por parte de las cargas inducidas en la superficie del metal, es igual a aquella

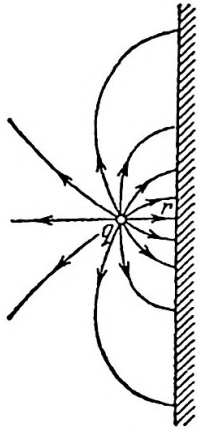


Fig. 4.1. Una carga puntual cerca de una pared conductora

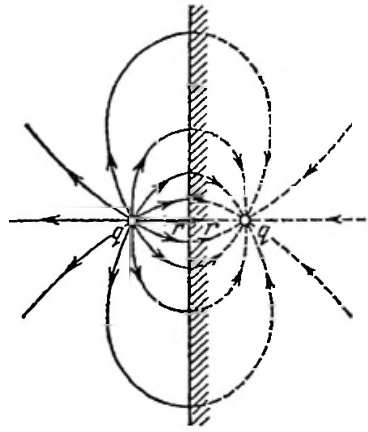


Fig. 4.2. A la izquierda de la pared el campo eléctrico de las cargas inducidas en ella es equivalente al campo de la carga $-q$

fuerza con la que actuaría sobre ella la carga $-q$ situada por el otro lado del límite del metal simétricamente a la carga q:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{(2r)^2}. \qquad (1)$$

Claro está, esta fuerza va dirigida hacia la pared, ya que la carga q experimenta la atracción por parte de las cargas inducidas de signo contrario.

Pasemos ahora a analizar el dipolo en la proximidad de la pared conductora. En semejante caso, cada una de las cargas del dipolo provoca, independientemente, la aparición de cargas inducidas en la pared, cuyo campo puede considerarse del mismo modo que fue descrito más arriba. Como resultado, el efecto sobre el dipolo de las cargas inducidas es equivalente al efecto sobre el de dos cargas puntuales, cada una de las cuales es la «imagen» de una de las cargas del dipolo (fig. 4.3).

P. ej., supongamos que el eje de la molécula es paralelo a la pared del recipiente. En la fig. 4.4 se muestran las fuerzas que actúan sobre las cargas del dipolo por parte del dipolo imagen. De esta figura

se desprende de inmediato que la interacción del dipolo con la pared tiene carácter de atracción, ya que las fuerzas de repulsión F_1 y F_2, primero, son menores que las de atracción F_3 y F_4 (la distancia entre

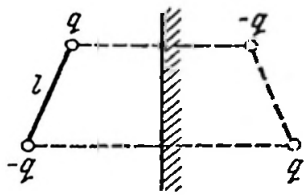


Fig. 4.3. El efecto de las cargas inducidas en la pared es equivalente al efecto de la imagen del dipolo

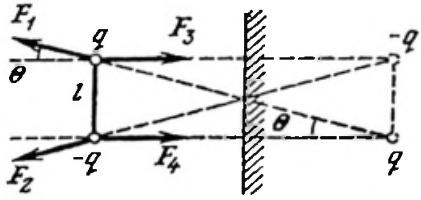


Fig. 4.4. Fuerzas que actúan sobre las cargas de dipolo

las cargas de igual signo es mayor que entre las de signo opuesto) y, segundo, están dirigidas bajo cierto ángulo θ.

Hallemos la fuerza resultante de atracción. La resultante de las fuerzas de atracción F_3 y F_4 está dirigida hacia la pared y es igual en módulo a

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2q^2}{(2r)^2}. \tag{2}$$

El módulo de cada una de las fuerzas de repulsión F_1 y F_2 se da con la expresión

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q^2}{(2r)^2+l^2}. \tag{3}$$

Como estas fuerzas están dirigidas bajo el ángulo θ (fig. 4.4), su resultante es igual a

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2q^2}{(2r)^2+l^2}\cos\theta=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2q^2}{(2r)^2+l^2}\,\frac{2r}{\sqrt{(2r)^2+l^2}}. \tag{4}$$

Vamos a considerar que la distancia l entre las cargas, que forman el dipolo, es pequeña en comparación con la distancia r hasta la pared. Entonces, la razón $l/r \ll 1$ y la fuerza resultante de repulsión se expresa con comodidad mediante el pequeño parámetro adicional $\gamma = (l/2r)^2$. Con ello, en lugar de la expresión (4), tendremos

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2q^2}{(2r)^2}\,\frac{1}{1+\gamma}\,\frac{1}{\sqrt{1+\gamma}}. \tag{5}$$

Al principio, en la expresión (5) hagamos uso de la fórmula aproximada $\sqrt{1+\gamma} \approx 1+\frac{1}{2}\gamma$ y, a continuación, después de multiplicar entre sí los denominadores de las dos últimas fracciones, la fórmula aproximada $1\Big/\left(1+\frac{3}{2}\gamma\right) \approx 1-\frac{3}{2}\gamma$. Como resultado, en lugar de

(5), obtenemos para la fuerza de repulsión

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} 2 \frac{q^2}{(2r)^2} \left(1 - \frac{3}{2}\gamma\right). \quad (6)$$

La fuerza total F de interacción del dipolo con la pared es la resultante de las fuerzas de atracción (2) y las fuerzas de repulsión (6):

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3q^2}{(2r)^2} \gamma. \quad (7)$$

Poniendo aquí $\gamma = (l/2r)^2$ e introduciendo el momento dipolar $p = ql$, obtenemos

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3p^2}{(2r)^4}. \quad (8)$$

Prestemos atención al hecho de que, a pesar de que cada una de las cargas del dipolo interactúa con la pared con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia hasta la pared, la fuerza total de interacción del dipolo con la pared decrece con la distancia con mucha mayor rapidez, es decir, inversamente proporcional al cuarto grado. El carácter de la dependencia de la fuerza de interacción que investigamos respecto de la distancia hasta la pared no depende de la orientación del dipolo. Para cerciorarnos de esto podemos analizar el caso en que el eje del dipolo es perpendicular a la pared. El cálculo será más sencillo aún, ya que las cuatro fuerzas están ahora dirigidas por una misma recta. En este caso, la fuerza de interacción será dos veces mayor que para el dipolo paralelo a la pared. Señalemos una vez más que en todos los casos la fuerza tiene carácter de atracción a pesar de que, en su totalidad, el dipolo es un sistema electroneutro. ▲

5. Campo eléctrico de un dipolo. Investiguen el campo eléctrico creado por un dipolo, es decir, por dos cargas q y $-q$ iguales en módulo y de signos opuestos, entre las que hay una distancia l. Hallen el potencial y la intensidad de ese campo a una distancia r grande en comparación con la dimensión l del dipolo.

△ El efecto eléctrico de un cuerpo cargado a una distancia grande en comparación con sus dimensiones, se determina por la carga total de ese cuerpo Q. Cuanto más lejos del cuerpo, en tanto menor grado se diferencia el campo eléctrico creado por dicha carga del campo de una carga puntual: este campo tiene simetría esférica, su potencial decrece con la distancia como $1/r$, en tanto que la intensidad, como $1/r^2$.

Pero, si el cuerpo es electroneutro en su total, es decir, su carga total Q es nula, esto no significa, de ningún modo, que él no crea en absoluto un campo eléctrico. Como vimos en el problema anterior, la molécula neutra que posee momento dipolar provoca la aparición de cargas inducidas en la superficie metálica. Esto quiere decir que

el dipolo crea un campo eléctrico. Calculemos este campo. Considerándolo como la superposición de los campos de las cargas puntiformes q y $-q$, la expresión para el potencial φ en el punto A distanciado de las cargas q y $-q$ a r_1 y r_2 (fig. 5.1), se puede escribir en la forma

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q(r_2 - r_1)}{r_1 r_2}. \quad (1)$$

El dipolo se suele caracterizar por el momento dipolar p, cuyo módulo es igual al producto ql, mientras que su sentido se toma a lo largo del eje del dipolo desde la carga negativa a la positiva. Con el fin de describir el campo a gran distancia del dipolo es idóneo introducir, en lugar de las distancias r_1 y r_2, la distancia r desde el centro del dipolo y el ángulo θ entre el vector del momento dipolar y la dirección hacia el punto de observación (fig. 5.1). Como vemos en ella, para $l/r \ll 1$ la diferencia entre las distancias $r_2 - r_1$, se puede escribir como

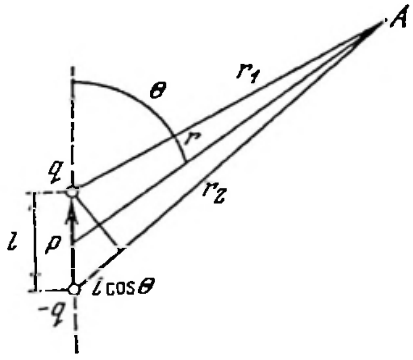


Fig. 5.1. Para el cálculo del potencial del dipolo en el punto A

$$r_2 - r_1 \approx l \cos\theta. \quad (2)$$

Con esta misma aproximación, el producto $r_1 r_2$ en el denominador de la fórmula (1), puede sustituirse por r^2. Como resultado la fórmula (1) para el potencial φ toma la forma

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{ql\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p}{r^2} \cos\theta. \quad (3)$$

A diferencia del potencial del campo de la carga puntual, que decrece como $1/r$, el potencial del campo eléctrico del dipolo decrece con la distancia con mayor rapidez, como $1/r^2$. Es obvio que el campo del dipolo no tiene simetría esférica, por ello su potencial no sólo depende de la distancia r, sino también de la dirección hacia el punto de observación caracterizada por el ángulo θ.

Al calcular la intensidad del campo en el punto A, como al hacerlo para el potencial, podemos partir de que el campo del dipolo es la superposición de los campos de las cargas puntuales q y $-q$. Por ello, la intensidad del campo E es igual a la suma vectorial de las intensidades E_+ y E_-, creadas por las mencionadas cargas (fig. 5.2*a*). Los módulos de estas intensidades se dan con las expresiones

$$E_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r_1^2}, \quad E_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r_2^2}. \quad (4)$$

El vector resultante E que nos interesa es idóneo representarlo como la suma de dos componentes perpendiculares entre sí, una de las cuales, E_r, está dirigida a lo largo del radio r, que caracteriza la posición del punto A respecto del centro de dipolo y la otra, E_θ, es perpendicular a la primera (fig. 5.2*b*).

A grandes distancias del dipolo, cuando $l/r \ll 1$, los vectores E_+ y E_- están dirigidos casi en sentidos opuestos (el ángulo entre

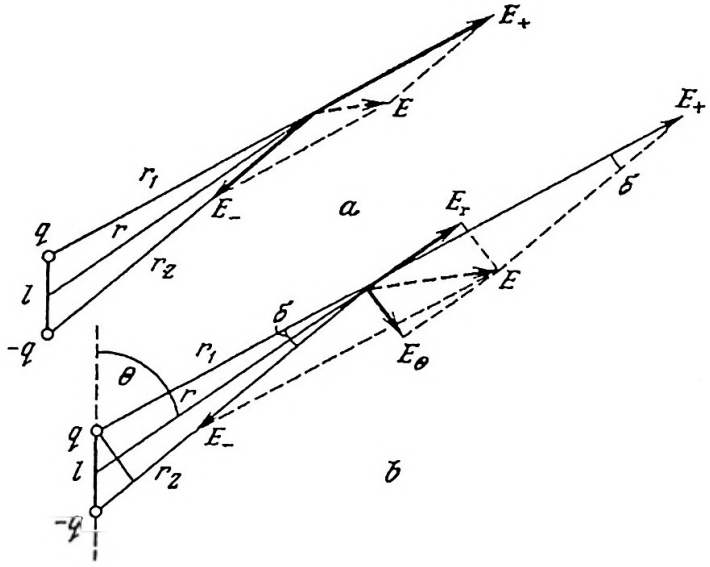


Fig. 5.2. La intensidad del campo del dipolo E se puede representar como la suma de los vectores E_+ y E_- (*a*) o bien como la suma de los vectores E_r y E_θ (*b*)

ellos se diferencia de π en la pequeña magnitud δ) y poco se distinguen en módulo (fig. 5.2*b*). Por ello, al buscar E_r, como se desprende de la fig. 5.2, hay que tener en cuenta la diferencia de los vectores E_+ y E_- en módulo, pero se puede despreciar el hecho de que ellos están dirigidos no rigurosamente en sentidos opuestos. A la inversa, al calcular E_θ podemos despreciar la diferencia en módulo de los vectores E_+ y E_-, pero, obligatoriamente, hay que tomar en consideración que no son colineares. Así pues, para E_r escribimos

$$E_r \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_1^2}-\frac{q}{r_2^2}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,q\,\frac{(r_1+r_2)(r_2-r_1)}{(r_1r_2)^2}. \qquad (5)$$

Considerando $l/r \ll 1$, se puede sustituir en el denominador de esta expresión r_1r_2 por r^2, mientras que en el numerador, la suma $r_1 + r_2$ por $2r$, la diferencia $r_2 - r_1$ por $l\cos\theta$. Como resultado, obtenemos

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2p}{r^3}\cos\theta. \qquad (6)$$

Al calcular E_θ, teniendo en cuenta que el ángulo δ es pequeño, se puede escribir

$$E_\theta \approx E_+ \delta. \tag{7}$$

Al poner aquí el valor de E_+ de la fórmula (4), podemos sustituir r_1 por r. Como vemos en la fig. 5.2*b*, para la magnitud δ podemos escribir $\delta \approx l \operatorname{sen} \theta / r$. De resultas, la expresión (7) toma la forma

$$E_\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p}{r^3} \operatorname{sen} \theta. \tag{8}$$

Las fórmulas (6) y (8) permiten imaginarse la figura de las líneas de intensidad del campo eléctrico del dipolo. En los puntos que yacen sobre el eje del dipolo (donde el ángulo θ es igual a cero o a π), $E_\theta = 0$ y, por consiguiente, la intensidad está dirigida a lo largo de ese

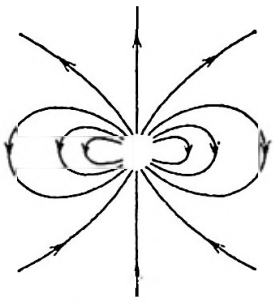


Fig. 5.3. La figura de las líneas de intensidad del campo del dipolo a gran distancia de él

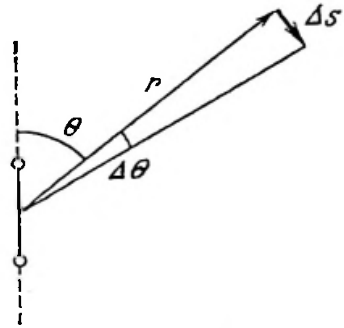


Fig. 5.4. Para hallar la ligazón entre el módulo del desplazamiento Δs y la variación del ángulo θ

eje. De la fórmula (6) se deduce que su dirección coincide con la del momento dipolar $\boldsymbol{p}$ tanto en caso de $\theta = 0$, como de $\theta = \pi$. En efecto, para $\theta = \pi$ E_r es negativa, pero hay que tener en cuenta que el radio vector r, sobre el que se proyecta el vector $\boldsymbol{E}$, está dirigido en sentido opuesto al vector $\boldsymbol{p}$. En todos los puntos del plano perpendicular al eje del dipolo y que pasa por su punto medio, para los que $\theta = \pi/2$, la componente radial E_r se anula. La intensidad del campo en estos puntos es perpendicular al plano y está dirigida en sentido opuesto a la dirección del momento dipolar $\boldsymbol{p}$. Para las distancias grandes en comparación con las dimensiones del dipolo, las líneas de intensidad se muestran esquemáticamente en la fig. 5.3. En el espacio la figura de dichas líneas es simétrica con relación al eje del dipolo.

Las fórmulas (6) y (8) para la intensidad del campo, se pueden hallar, asimismo, de otro modo, empleando la expresión (3) para el potencial, obtenida más arriba. Para ello, hagamos uso de que la proyección de la intensidad del campo sobre cualquier dirección E_s

está relacionada con la variación del potencial $\Delta\varphi$, al desplazarse el punto a lo largo de esa dirección a una distancia Δs, mediante la relación

$$E_s = -\Delta\varphi/\Delta s. \tag{9}$$

Con el fin de hallar E_r hay que desplazarse a lo largo del radio vector, es decir, en (9) hacer Δs igual a Δr. Al calcular con ayuda de la fórmula (3) el límite de la razón $\Delta\varphi/\Delta r$ cuando $\Delta r \to 0$, para E_r obtenemos la expresión (6). De modo en absoluto análogo, para hallar $E\theta$ hay que realizar el desplazamiento Δs en sentido perpendicular al radio vector r, en la dirección del crecimiento del ángulo θ. Con ello, como vemos en la fig. 5.4, $\Delta s = r\,\Delta\theta$ y el cálculo

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\Delta\varphi}{\Delta\theta}$$

con ayuda de la fórmula (3) nos conduce a la expresión (8).

Las fórmulas (6) y (8) son importantes debido a que ellas determinan el campo eléctrico a gran distancia no sólo para el dipolo presente, es decir, para dos cargas puntuales de distinto signo q y $-q$, sino también para todo sistema electroneutro de cargas en el que los centros de las cargas positivas y negativas no coinciden. Así pues, si un cuerpo con complicada distribución de la carga, cuyo valor total es igual a Q, a una distancia suficientemente grande se parece, simplemente, a una carga puntual, cuando $Q = 0$ semejante cuerpo también se parecerá a un dipolo. Con otras palabras, para un cuerpo neutro en su total, es posible elegir un dipolo con tal momento p que el campo eléctrico, creado por él a gran distancia, será, prácticamente, equivalente al campo de un cuerpo con distribución complicada de la carga. ▲

6. **Interacción de dipolos.** Tenemos dos dipolos con momentos p_1 y p_2, situados a gran distancia entre sí (fig. 6.1). El dipolo p_1 está fijado de modo que su eje forma el ángulo θ_1 con la recta que

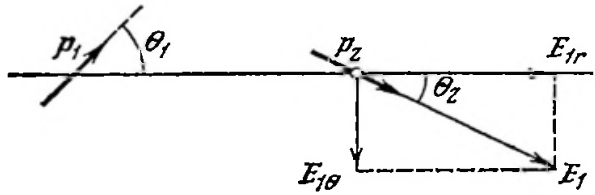


Fig. 6.1. El dipolo libre p_2 se orienta a lo largo de la intensidad del campo E_1 creado por el dipolo fijo p_1

une los centros de los dipolos. El dipolo p_2, a modo de la aguja magnética, puede girar alrededor de su eje, que es perpendicular al plano de la figura. ¿Bajo qué ángulo θ_2 se instalará el eje del segundo dipolo en equilibrio?

△ Este ejemplo da la posibilidad de ilustrar la aplicación de las fórmulas para la intensidad del campo eléctrico del dipolo, obtenidas en el problema anterior.

El campo eléctrico ejerce sobre el dipolo efecto de orientación. Es fácil comprender que para un dipolo que puede libremente girar en torno a su eje, el momento dipolar en equilibrio está dirigido a lo largo de la intensidad del campo eléctrico externo. En el caso dado, para el dipolo p_2 es externo el campo eléctrico creado por el dipolo p_1. Por ello, para hallar el ángulo θ_2 hay que determinar el sentido de la intensidad del campo eléctrico E_1 creado por el dipolo p_1, en aquel lugar donde se encuentra el dipolo p_2. Como se deduce de la fig. 6.1

$$\operatorname{tg} \theta_2 = E_{1\theta}/E_{1r}. \qquad (1)$$

Empleando para $E_{1\theta}$ y E_{1r} las fórmulas (8) y (6) del problema anterior, obtenemos

$$\operatorname{tg} \theta_2 = 0{,}5 \operatorname{tg} \theta_1. \qquad (2)$$

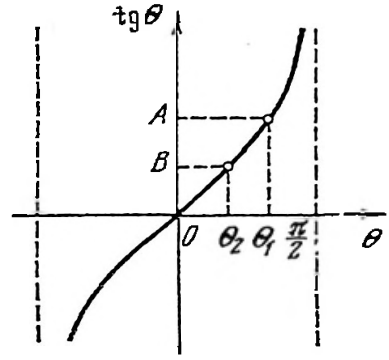


Fig. 6.2. Para la resolución gráfica de la ecuación $\operatorname{tg} \theta_2 = 0{,}5 \operatorname{tg}\theta_1$

Señalemos que el valor de θ_2, determinado con la relación (2), no depende ni del módulo del momento dipolar p_1, ni de la distancia entre los dipolos. La solución gráfica de la ecuación (2) se muestra en la fig. 6.2. Para cualquier valor prefijado de θ_1 hallamos en la gráfica el valor de $\operatorname{tg} \theta_1$ (punto A). Disminuyendo, en correspondencia con (2), la ordenada en la mitad (punto B), hallamos el valor del ángulo θ_2.

Siendo nulo el valor de θ_1, el ángulo θ_2 también será nulo, es decir, el segundo dipolo se instalará, asimismo, en la misma dirección. Si el ángulo $\theta_1 = \pi/2$, o sea, el primer dipolo está fijado bajo ángulo recto respecto a la línea que une los centros de los dipolos, el segundo dipolo (libre) también se instalará bajo ángulo recto a esa línea, pero su momento dipolar p_2 estará dirigido en sentido opuesto a la dirección del momento dipolar p_1. Aunque la fórmula (2) no es aplicable, directamente, a este caso, este resultado se puede establecer mediante el paso límite, aproximando gradualmente el ángulo θ_1 a $\pi/2$. Como es lógico, esto también se desprende de la figura de las líneas de intensidad del dipolo en la fig. 5.3.

La posición de equilibrio del dipolo p_2, mostrada en la fig. 6.1, es estable: con las desviaciones de la orientación del dipolo del valor de equilibrio de θ_2, aparece un momento de fuerzas que tiende a hacer girar el dipolo a la posición de equilibrio. Además de esta posición

de equilibrio, hay una más en la que el dipolo p_2 está dirigido en sentido opuesto. Pero esta posición de equilibrio es inestable.

Empleando la solución del problema aducida más arriba es fácil aclarar cómo se conducirá el dipolo, que puede girar con libertad alrededor del eje inmóvil, si él se encuentra junto a una pared conductora. Como fue mostrado en el problema 4, el efecto sobre el dipolo de las cargas inducidas en la superficie conductora, es equivalente al efecto del dipolo imagen (fig. 4.3).

El dipolo sobre el eje estará en equilibrio junto al plano conductor, cuando su momento dipolar p bien es paralelo, o bien per-

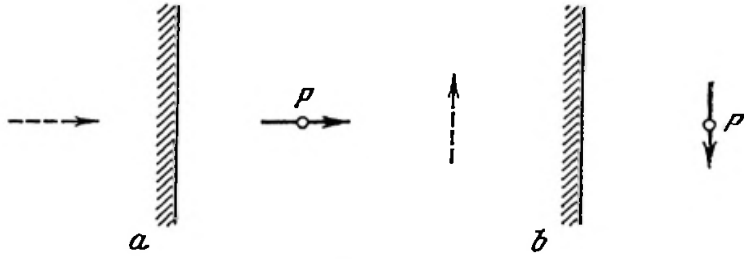


Fig. 6.3. Posición de equilibrio del dipolo p cerca de la pared conductora

pendicular a la pared (fig. 6.3). Es fácil cerciorarse de que en equilibrio el momento dipolar p puede estar dirigido no sólo como se muestra en la fig. 6.3, sino también en sentido opuesto.

Aclaremos si esas posiciones de equilibrio serán estables. Si el dipolo imagen estuviera fijado, el equilibrio del dipolo p junto a la pared conductora sería estable tanto en el caso *a*, como en el *b* de la fig. 6.3. No obstante, en realidad, el dipolo imagen no está fijado: al desviarse el dipolo en el eje de la posición de equilibrio, el dipolo imagen también gira. Como resultado, la posición de equilibrio, mostrada en la fig. 6.3*a* es estable, en 6.3*b*, inestable.

Con el fin de cerciorarse de esto consideremos la desviación del dipolo p de la posición de equilibrio mostrada en la fig. 6.3*a* (fig. 6.4*a*). Supongamos que el dipolo p ha girado en el ángulo θ. Por lo visto, en tal caso el dipolo imagen p' girará en ese mismo ángulo θ en sentido contrario. Con ello, la intensidad del campo eléctrico E, creado por las cargas inducidas en la pared, será la misma que la intensidad del campo del dipolo imagen. Como se desprende de la ecuación (2), el ángulo θ_2, bajo el que está dirigido el vector intensidad E, será menor que el ángulo θ (fig. 6.4*a*). Para pequeñas desviaciones del equilibrio, cuando $\operatorname{tg}\theta \approx \theta$, de la ecuación (2) se deduce $\theta_2 \approx \theta/2$. Como el dipolo p tiende a orientarse por el sentido del vector E, el momento de fuerzas que surge durante la desviación, retornará el dipolo a la posición de equilibrio. Así pues, ésta será estable en realidad.

En lo que atañe al caso *b*, la pequeña desviación del dipolo *p* de la posición de equilibrio, como vemos en la fig. 6.4*b*, provoca la aparición de un momento de fuerzas que desvía el mencionado dipolo cada vez más de dicha posición de equilibrio.

Hasta aquí, para hallar la respuesta a las preguntas planteadas, nos fue suficiente examinar sólo el momento giratorio de las fuerzas que actúan sobre el dipolo. Pero en muchos casos es de importancia conocer la fuerza resultante que actúa sobre el dipolo en el campo eléctrico. Es evidente que en el campo homogéneo dicha fuerza es igual a cero. Para que semejante fuerza exista el campo debe ser no homogéneo. P. ej., en el problema 4 fue mostrado que sobre un dipolo situado junto a una superficie conductora actúa una fuerza, que lo atrae a dicha superficie. Esta fuerza viene condicionada por el campo eléctrico no homogéneo de las cargas inducidas. Ya que, como hemos visto, el campo de las cargas inducidas es equivalente al campo del dipolo imagen, la fuerza allí obtenida expresa, de hecho, la fuerza de interacción de dos dipolos. Sólo hay que tener en cuenta que la fuerza de interacción entre el dipolo real y el dipolo imagen tiene siempre carácter de atracción, mientras que dos dipolos reales, en función de su orientación mutua, pueden tanto atraerse, como repulsarse. Pero con cualquier orientación de los dipolos la fuerza de interacción es inversamente proporcional al cuarto grado de la distancia entre ellos. ¿Que fuerza actuará sobre un dipolo ubicado en el campo de una carga puntual? ▲

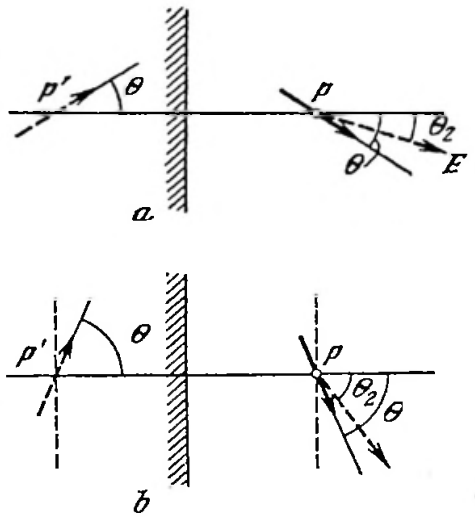


Fig. 6.4. Para aclarar la estabilidad de las posiciones del dipolo *p* mostradas en la fig. 6.3.

7. Un dipolo y una carga puntual. Hallen la fuerza que actúa sobre el dipolo con momento *p* en el campo eléctrico creado por la carga puntual *Q*.

△ En lugar de buscar la fuerza que actúa sobre el dipolo por parte de la carga puntual, podemos hallar la fuerza que actúa sobre la carga puntual por parte del dipolo y, para ello, hacer uso de las fórmulas (6) y (8) del problema 5 para la intensidad del campo eléctrico del dipolo. Para la carga y el dipolo inmóviles, en virtud de la tercera ley de Newton, dichas fuerzas son iguales en módulo: $|F_1| = |F_2| = F$.

Para empezar, analicemos el caso cuando las cargas q y $-q$, que forman el dipolo, y la carga puntual Q se encuentran en una misma recta (fig. 7.1). En este caso, la intensidad del campo del dipolo en el punto donde se encuentra la carga Q se podrá determinar por

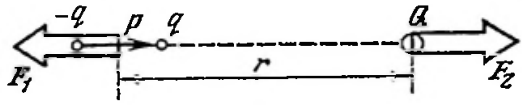


Fig. 7.1. Las fuerzas de interacción entre el dipolo y la carga puntual en el caso cuando la carga puntual Q se encuentra en el eje del dipolo p

las fórmulas (6) y (8) del problema 5 si en ellas hacemos $\theta = 0$. Entonces, $E_\theta = 0$, es decir, la intensidad está dirigida a lo largo de la línea que une las cargas y su módulo se da con la fórmula (6) para E_r si $\theta = 0$:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p}{r^3}. \qquad (1)$$

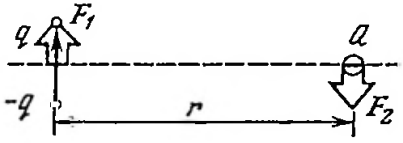


Fig. 7.2. Con semejante posición del dipolo y la carga puntual las fuerzas de su interacción F_1 y F_2 no están dirigidas a lo largo de una misma recta

De aquí, para el módulo de la fuerza F, que actúa sobre la carga Q, y, por lo tanto, sobre el dipolo, obtenemos

$$F = |Q|\,E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p\,|Q|}{r^3}. \qquad (2)$$

La aparición de la fuerza F_1, que actúa sobre el dipolo, está aquí condicionada debido a que las cargas q y $-q$ que forman el dipolo, se encuentran a diferente distancia de la carga puntual Q (fig. 7.1) y, por consiguiente, las fuerzas que sobre aquéllas actúan se distinguen en módulo. De la fig. 7.1 se deduce que las fuerzas F_1 y F_2, que actúan sobre el dipolo y la carga puntual, están dirigidas a lo largo de una misma recta (claro está, en sentidos opuestos).

Es de mayor interés el caso cuando el eje del dipolo es perpendicular a la recta que une el dipolo con la carga Q (fig. 7.2). Ahora, para determinar la intensidad del campo eléctrico, creado por el dipolo en el lugar donde se encuentra la carga Q, es preciso hacer $\theta = \pi/2$ en las fórmulas (6) y (8) del problema 5. Entonces, $E_r = 0$ y, por lo tanto, la intensidad del campo E es perpendicular a la línea que une la carga puntual Q con el centro del dipolo. El módulo de la intensidad se determina con la fórmula (8) para E_θ siendo $\theta = \pi/2$:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}. \qquad (3)$$

De aquí se desprende que la fuerza F_2, que actúa sobre la carga Q, es también perpendicular a la línea que une el dipolo y la carga

(fig. 7.2) y su módulo:

$$F = |Q|\, E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p\,|Q|}{r^3}. \qquad (4)$$

Una fuerza igual en módulo y de sentido opuesto F_1 actúa sobre el dipolo p (fig. 7.2).

El surgimiento de la fuerza F_1, que actúa sobre el dipolo, es fácil de comprender, si tomamos en consideración que las fuerzas F_+ y F_-, iguales en módulo, que actúan sobre las cargas q y $-q$ que componen el dipolo, están dirigidas bajo cierto ángulo δ hacia la línea que une el centro del dipolo con la carga Q (fig. 7.3).

La resultante (es decir, la suma vectorial) de las fuerzas F_+ y F_- es, de por sí, la fuerza F_1 actuante sobre todo dipolo. De modo

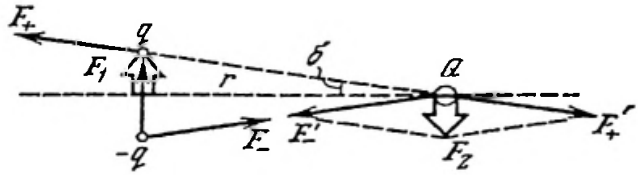


Fig. 7.3. La fuerza F_1 es la resultante de las fuerzas F_+ y F_-; la fuerza F_2, la resultante de las fuerzas F'_+ y F'_-

exactamente igual es fácil comprender por qué razón la fuerza F_2, que actúa sobre la carga Q, está dirigida como se muestra en la fig. 7.2: F_2 es la resultante de las fuerzas F'_+ y F'_- con las que actúan sobre la carga Q las cargas q y $-q$ constituyentes el dipolo (fig. 7.3). Todo lo expuesto no suscita dudas.

No obstante, en su total el cuadro de la interacción entre la carga Q y el dipolo p, mostrado en la fig. 7.2, a primera vista tiene raro aspecto: aunque las fuerzas F_1 y F_2 son iguales en módulo y de sentido opuesto, ellas no están dirigidas a lo largo de la línea que une los cuerpos interactuantes. Por ello, las fuerzas F_1 y F_2 crean un par de fuerzas. La resultante del par de fuerzas $F_1 + F_2$ es igual a cero, es decir, en el sistema que consideramos no hay aceleración del movimiento de traslación. Sin embargo, el momento de rotación del par de fuerzas es distinto de cero y se halla con la fórmula

$$M = Fr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p\,|Q|}{r^2}. \qquad (5)$$

Al parecer, bajo el efecto del mencionado momento de rotación el sistema que analizamos debe efectuar rotación acelerada en sentido horario. Pero esto no puede suceder, ya que las fuerzas F_1 y F_2 son internas y, por lo tanto, no pueden variar el momento total de impulso del sistema. Esto es una notoria paradoja.

Claro está que no surge ninguna paradoja si consideramos el dipolo no como un todo íntegro, sino como el conjunto de dos cargas

puntuales q y $-q$ (fig. 7.3). En semejante caso, las fuerzas de interacción de cada par de cargas puntuales están dirigidas a lo largo de la línea que une estas cargas y no crean momentos de rotación. ¿Pero cómo explicar esta paradoja si el dipolo se considera como un todo, lo que conduce al cuadro de interacción mostrado en la fig. 7.2? Con semejante enfoque la paradoja surge debido a que en los razonamientos no se tomó en consideración el momento de las fuerzas que actúan sobre el dipolo p ubicado en el campo de la carga puntual Q, es decir, no se tuvo en cuenta la diferencia que existe entre las dos fuerzas resultantes.

En la fig. 7.3 vemos que el efecto de las fuerzas F_+ y F_- sobre el dipolo como un todo se reduce no sólo a la fuerza resultante F_1, sino también a cierto momento de rotación que tiende a girar el

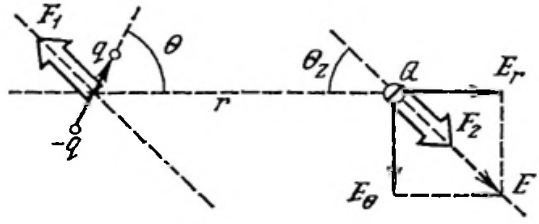


Fig. 7.4. Las fuerzas de interacción del dipolo y la carga puntual con la orientación arbitraria de aquél

dipolo en sentido antihorario. Con otras palabras, las fuerzas F_+ y F_- no se pueden sustituir por una sola resultante F_1, a diferencia de las fuerzas F'_+ y F'_- que actúan sobre la carga Q. Al calcular el momento de rotación es posible considerar que las fuerzas F_+ y F_- son paralelas y tomarlas como un par de fuerzas. Como resultado, para el valor del momento de fuerza M_1, que actúa sobre el dipolo, obtenemos

$$M_1 = F_+ l = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q\,|Q|}{r^2}\, l = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p\,|Q|}{r^2}. \qquad (6)$$

Así pues, sobre el sistema en su total, constituido por el dipolo y la carga puntual, actúan dos momentos de rotación, dirigidos en sentidos opuestos y de igual valor, como se desprende de las fórmulas (5) y (6). Por ello, el momento de rotación total es igual a cero.

Para la orientación arbitraria del dipolo, cuando su eje forma el ángulo θ con la dirección hacia la carga puntual Q, los valores de ambas componentes de la intensidad del campo del dipolo E_r y E_θ son diferentes de cero, de modo que el vector total de la intensidad E está dirigido de la forma que se muestra en la fig. 7.4. Recordando la solución del problema 6, es fácil comprender que el ángulo θ_2, bajo el que está dirigida la fuerza F_2 que actúa sobre la carga puntual Q,

se determina por la ecuación

$$\operatorname{tg} \theta_2 = 0{,}5 \operatorname{tg} \theta. \qquad (7)$$

El módulo de la fuerza F_2 es fácil de hallar teniendo en cuenta que E_θ y E_r están dirigidas bajo ángulo recto entre sí:

$$F_2 = |Q| E = |Q| \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p|Q|}{r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2\theta}. \qquad (8)$$

Sobre el dipolo p actúa la fuerza F_1 igual en módulo, pero dirigida en sentido opuesto (fig. 7.4). Las fuerzas F_1 y F_2 forman un par, cuyo momento de rotación es distinto de cero. Como en el caso que hemos analizado más arriba, dicho momento se compensa con el momento de rotación que actúa sobre el dipolo.

Como se deduce de la fórmula (8), la fuerza que actúa sobre el dipolo es distinta de cero con cualquier orientación del dipolo. Ella alcanza el máximo cuando $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ y el mínimo cuando $\theta = \pi/2$.

La fuerza de interacción del dipolo y la carga puntual es inversamente proporcional al tercer grado de la distancia entre ellos, es decir, con la distancia decrece con mayor rapidez que la fuerza de interacción de las cargas puntuales. La fuerza de interacción de dos dipolos, como vimos en el problema 4, decrece con aún mayor rapidez: inversamente proporcional al cuarto grado de la distancia.

Empleando los resultados de este problema, podemos explicar el surgimiento de las fuerzas que actúan sobre un dieléctrico no cargado en el campo eléctrico no homogéneo. Cada elemento del volumen del dieléctrico se puede considerar como un dipolo, cuyo momento dipolar está dirigido a lo largo de la intensidad del campo eléctrico. En el campo no homogéneo sobre el dipolo orientado de este modo, actuará una fuerza dirigida hacia donde la intensidad del campo es mayor. Con otras palabras, el dipolo será atraído a la región del campo más fuerte. Para evitar equívocos, señalemos que en la fig. 7.1 está representado el caso contrario, cuando el dipolo está orientado no por el campo, sino en sentido contrario a él y se repulsa de la región del campo fuerte. Semejante orientación corresponde al equilibrio inestable del dipolo. El momento dipolar que surge en el dieléctrico isótropo, al ubicar éste en el campo eléctrico, siempre está orientado por el campo y, por ello, el dieléctrico se atrae a la región del campo fuerte. ▲

8. **Esfera cargada seccionada.** Una esfera metálica cargada de radio R está seccionada en dos partes con un plano que pasa a la distancia h del centro de la esfera (fig. 8.1). ¿Con qué fuerza se repulsarán dichas partes? La carga total de la esfera es igual a Q.

△ Para mayor determinación consideremos que la esfera tiene carga positiva. Al no haber en las proximidades de la esfera metálica

otros cuerpos cargados o no cargados, su carga Q se distribuye uniformemente por la superficie de la esfera. Con ello, la densidad superficial de la carga σ es igual en todos los puntos y vale

$$\sigma = Q/(4\pi R^2). \tag{1}$$

De la simetría es evidente que la fuerza electrostática ΔF, que actúa sobre cada pequeño elemento ΔS de la superficie cargada, está dirigida por la normal a la superficie (fig. 8.2). ¿Cómo hallar esa fuerza?

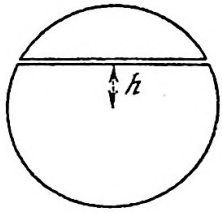


Fig. 8.1. La esfera metálica cargada está cortada en dos partes

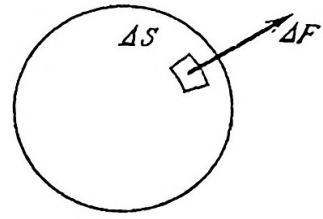


Fig. 8.2. La fuerza electrostática ΔF está dirigida en cada punto por la normal a la superficie

Con este fin podemos encontrar la intensidad del campo eléctrico creado en el lugar donde está situado el elemento separado de la superficie ΔS por la parte restante de la esfera cargada.

La intensidad del campo eléctrico, fuera de la esfera cargada, coincide con el campo de la carga puntual de la misma magnitud, ubicada en el centro de la esfera. Por esta causa, el módulo de la intensidad directamente en la superficie de la esfera

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \tag{2}$$

De acuerdo con el principio de superposición, este campo se puede considerar como la suma vectorial de los campos creados por el elemento separado de la superficie de la esfera ΔS y por la parte restante de la esfera. Como nos interesa la intensidad del campo directamente en la superficie de la esfera, el elemento separado ΔS puede considerarse plano y al calcular el campo que él crea, hacer uso de la expresión para la intensidad del campo de un plano uniformemente cargado. Como sabemos, este campo existe por ambos lados del plano (fig. 8.3) y el módulo de su intensidad

$$E_1 = \sigma/2\varepsilon_0. \tag{3}$$

Dentro de la esfera, incluida su propia superficie, la resultante de la intensidad del campo es igual a cero. Esto quiere decir, que en el interior de la esfera, junto al elemento ΔS, el campo de éste, dirigido al interior de la esfera, se compensa con el campo creado por la parte restante de la esfera. Así pues, en el lugar donde está ubicado el ele-

mento separado S, toda la parte restante de la esfera cargada crea el campo eléctrico E_2 dirigido al exterior, con la particularidad de que el módulo de la intensidad E_2 se determina, asimismo, por la relación (3). En el exterior, este campo E_2 tiene el mismo sentido

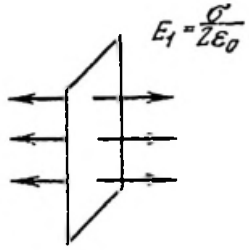


Fig. 8.3. Campo eléctrico de un plano cargado

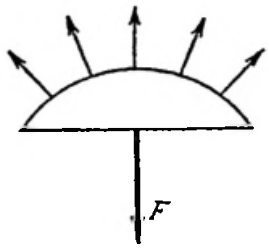


Fig. 8.4. Para determinar la fuerza de presión que actúa sobre la parte cortada de la esfera

que el campo creado por el elemento ΔS y, sumándose con él, proporciona el campo total, cuya intensidad es dos veces mayor y se determina por la expresión (2).

La fuerza que actúa sobre el elemento ΔS es igual al producto de la carga de este elemento $\sigma \Delta S$ por la intensidad del campo $E_2 = \sigma/2\varepsilon_0$:

$$\Delta F = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \Delta S. \qquad (4)$$

La fuerza que actúa sobre la unidad del área de la superficie, por la normal a ella, es la presión p para la que, en correspondencia con la fórmula (4), tenemos

$$p = \Delta F/\Delta S = \sigma^2/2\varepsilon_0. \qquad (5)$$

Con el fin de hallar la resultante F de las fuerzas de la presión electrostática que, p. ej., actúan sobre la parte superior de la esfera, podemos imaginarnos una envoltura hueca rígida que tenga una forma exactamente igual (fig. 8.4). Si en el interior de semejante envoltura hay gas a una presión p, la fuerza de presión de este gas sobre la «tapa» de la envoltura coincide con la fuerza F que nos interesa. Pero es evidente en absoluto que una fuerza totalmente igual en módulo actúa sobre el «fondo» de esta envoltura rígida. Por ello, $F = pS$, donde $S = \pi (R^2 - h^2)$ es el área del «fondo». Así pues,

$$F = pS = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \pi R^2 \left(1 - \frac{h^2}{R^2}\right). \qquad (6)$$

Poniendo aquí el valor de la densidad superficial de la carga σ de (1), obtenemos

$$F = \frac{1}{4\varepsilon\pi_0} \frac{Q^2}{8R^2} \left(1 - \frac{h^2}{R^2}\right). \qquad (7)$$

La fuerza de repulsión de las partes de la esfera será del valor máximo absoluto cuando la esfera está seccionada por el diámetro ($h = 0$). Prestemos atención a que en el resultado entra el cuadrado de la carga total de la esfera Q. Esto significa que la interacción de las partes de la esfera seccionada siempre tiene carácter de repulsión, independientemente de si la carga de la esfera es positiva o negativa, como se desprende, asimismo, de los razonamientos físicos cualitativos.

La presión p se puede también hallar de otro modo, empleando la ley de la conservación de la energía. Supongamos que el radio de la esfera se aumenta en una pequeña magnitud Δr. Con ello, las fuerzas electrostáticas realizan trabajo igual a $p\Delta V$, donde ΔV es el aumento del volumen de la esfera. Este trabajo se realiza a cuenta de la energía electrostática. Esta energía de la esfera cargada puede considerarse como la energía del campo que ella crea. Al aumentar el radio de la esfera la energía electrostática decrece, ya que disminuye el volumen que ocupa el campo. La indicada disminución de la energía es igual al producto de la densidad volumétrica de la energía electrostática $W = \varepsilon_0 E^2/2$ por el aumento del volumen de la esfera ΔV. Igualando el trabajo de las fuerzas electrostáticas y la disminución de la energía

$$p\,\Delta V = \frac{\varepsilon_0 E^2\,\Delta V}{2} \tag{8}$$

y poniendo aquí $E = \sigma/\varepsilon_0$ de la fórmula (2), hallamos $p = \sigma^2/2\varepsilon_0$, lo que coincide con la expresión (5) obtenida más arriba. ▲

9. **Paradoja de la energía electrostática.** Dos bolas metálicas iguales de radio R están alejadas entre sí a una distancia r grande en comparación con sus dimensiones. Una de las bolas tiene la carga q, la otra no está cargada. En el transcurso de cierto tiempo las bolas se unen con un conductor de capacidad despreciablemente pequeña y, como resultado, la carga q se distribuye entre ellas en partes iguales: $q_1 = q_2 = q/2$. Ahora ambas bolas están cargadas y la energía de su interacción

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_1 q_2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q^2}{4r}. \tag{1}$$

Expliquen la paradoja surgida: antes de la unión una de las bolas no estaba cargada y, por lo tanto, su energía de interacción era igual a cero. Después de la unión de las bolas, como se desprende de la fórmula (1), la energía de su interacción se hizo positiva, es decir, aumentó. ¿De dónde se ha tomado esa energía?

△ De la ley de la conservación de la energía se desprende que la energía electrostática de las bolas sólo podía disminuir. En efecto, al unir las bolas y al pasar la carga, en el conductor de unión se desprendió calor. Durante la unión pudo saltar una chispa, lo que de

modo inevitable conduciría a la transformación de la energía eléctrica en otras formas de energía. La contradicción con la ley de la conservación de la energía que ha surgido sólo puede significar que en los razonamientos aducidos en el planteamiento del problema algo no se ha tomado en consideración. ¿Pero el qué precisamente?

La cuestión radica en que la energía de interacción de los cuerpos cargados no es, ni mucho menos, toda la energía electrostática. La energía de interacción, expresada con la fórmula (1), es igual al trabajo de las fuerzas externas que se realiza para aproximar los cuerpos cargados desde el infinito hasta la distancia r entre ellos. Pero la mencionada fórmula no tiene en cuenta la energía de la interacción electrostática entre las partes aisladas de cada uno de los cuerpos cargados, la llamada energía propia de los cuerpos cargados. La energía propia de un cuerpo cargado es igual al trabajo de las fuerzas externas realizado al comunicar al cuerpo la carga eléctrica. ¿Cómo hallar esa energía?

Investiguemos un cuerpo cargado solitario. Su energía propia no depende del procedimiento con que fue cargado. Por esta causa, consideremos tal proceso de carga para el que el cálculo del trabajo de las fuerzas externas es el más sencillo. Supongamos que la carga pasa al cuerpo a porciones tan pequeñas $\Delta q'$ que puede despreciarse la influencia del campo de la pequeña carga en la distribución de la carga ya comunicada al cuerpo. Entonces, el trabajo ΔA, realizado para desplazar la carga $\Delta q'$ desde el infinito hasta el cuerpo, es igual al producto de la mencionada carga $\Delta q'$ por el potencial del cuerpo φ'. El potencial de un cuerpo metálico está ligado, en cualquier momento, con la carga q' que en él se encuentra mediante la relación $\varphi' = q'/C$, donde C es la capacidad del cuerpo solitario. Por ello, para el trabajo ΔA, obtenemos

$$\Delta A = \Delta q' \varphi' = \frac{q' \Delta q'}{C}. \qquad (2)$$

Sumando el trabajo ΔA para el traslado de todas las porciones $\Delta q'$ de la carga, hasta el momento cuando la carga del cuerpo sea igual q, para la energía propia obtenemos la expresión

$$W_1 = \frac{q^2}{2C}. \qquad (3)$$

La capacidad de la esfera metálica solitaria de radio R es igual a $4\pi\varepsilon_0 R$, por lo que la energía propia de semejante esfera, cargada con q, se da con la fórmula

$$W_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{2R}. \qquad (4)$$

Ahora, retornemos a la paradoja surgida. En el estado inicial, cuando la energía de interacción de las bolas es igual a cero, el siste-

ma, a pesar de todo, tiene energía electrostática que es igual a la energía propia de la bola cargada. Esta energía se da con la fórmula (4). En el estado final, después de la unión de las bolas, la energía electrostática del sistema se compone de la energía de su interacción, expresada con la fórmula (1), y de la energía propia de cada una de las bolas. Como éstas se encuentran a gran distancia la una de la otra, podemos considerar que en ellas las cargas se distribuyen uniformemente. Esto quiere decir que la energía propia de cada una de las bolas se determina mediante la misma expresión que para la esfera solitaria. Las cargas de las bolas son ahora iguales a $q/2$, por lo que, en el estado final, para la energía electrostática total del sistema, tenemos

$$W' = 2\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{(q/2)^2}{2R} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q^2}{4r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q^2}{4}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right). \qquad (5)$$

Comparando las expresiones (4) y (5), vemos que, como resultado de la unión de las bolas, la energía electrostática total del sistema disminuyó:

$$W_1 - W' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q^2}{4}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\right) > 0, \qquad (6)$$

ya que $r > R$. La diferencia $W_1 - W'$ es igual a la cantidad de energía electrostática que al unirse las bolas pasó a otras formas de energía.

Así pues, la energía electrostática total de un sistema de cuerpos cargados se constituye de sus energías propias y de la energía de su interacción. Semejante división de la energía es evidente, en particular, si consideramos la energía electrostática del sistema como la energía del campo electrostático. Según el principio de superposición, el campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ de un sistema de dos cuerpos con cargas q_1 y q_2 es igual a la suma vectorial de los campos $\boldsymbol{E}_1$ y $\boldsymbol{E}_2$ creados por separado por cada uno de los cuerpos. La densidad volumétrica de la energía del campo eléctrico, proporcional al cuadrado de la intensidad, se descompone en tres sumandos, de acuerdo con la expresión

$$E^2 = (\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2)^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2\,(\boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{E}_2). \qquad (7)$$

Los dos primeros sumandos en el segundo miembro corresponden a la densidad volumétrica de las energías propias de las cargas q_1 y q_2, en tanto que el tercer sumando corresponde a la energía de interacción de estas cargas entre sí. Precisamente esta parte de la energía electrostática total del sistema se da con la fórmula (1). Si al resolver el problema de la unión de las cargas, desde un principio, consideráramos la energía electrostática como la energía del campo eléctrico, no surgiría en absoluto la paradoja.

Resumamos. Al sistema de cuerpos cargados se puede poner en correspondencia bien la energía total, es decir, la energía del campo

eléctrico, o bien la energía de los cuerpos en interacción. ¿A cuál de estos procedimientos se puede dar preferencia al resolver problemas concretos?

Para todos los desplazamientos posibles de cuerpos cargados, si en ellos no varía la distribución de las cargas, la energía propia queda constante. Por ello, con tales desplazamientos la variación de la energía electrostática total es igual a la variación de la energía de interacción. Como en todos los fenómenos físicos es esencial, precisamente, la variación de la energía del sistema, la parte constante, o sea la energía propia, puede ser omitida. En este sentido hay que entender la afirmación, con la que se tropieza frecuentemente, de la equivalencia entre la energía de intercambio de las cargas y la energía del campo que ellas crean.

La representación de la energía electrostática como la de interacción de las cargas es en particular idónea en aquellos casos cuando en el sistema que examinamos entran cargas puntuales. Se trata de que la energía propia de una carga puntual real es infinita. P. ej., esto se desprende de la fórmula (4), si en ella, dejando invariable la carga q, hacer que el radio R de la esfera tienda a cero. Por otro lado, este valor infinito de la energía propia de la carga puntual queda rigurosamente invariable con cualesquiera de sus desplazamientos y puede ser omitido al calcular la variación de la energía. Así pues, el hecho de que la fórmula (1) no contiene la energía propia de las cargas es su ventaja y no su insuficiencia. La fórmula que contuviese la energía propia estaría exenta de sentido para un sistema en el que hay cargas puntuales.

A diferencia de las cargas puntuales, la energía propia de los cuerpos conductores no queda invariable. P. ej., como fue aclarado en el problema estudiado, ella puede variar al pasar la carga de un conductor a otro. La energía propia del conductor puede, asimismo, variar simplemente durante el desplazamiento mutuo de los cuerpos que entran en el sistema. En efecto, la energía propia de un conductor sin carga es igual a cero si en las proximidades no hay otros cuerpos cargados. Pero cuando la carga puntual q se acerca al conductor, en la superficie de éste surgen cargas inducidas. Aunque la carga total del conductor solitario es igual a cero, la redistribución de las cargas en su superficie conduce a la aparición del campo eléctrico, creado por estas cargas inducidas. Este campo posee energía y, por ello, la energía propia del conductor es ya distinta de cero.

Claro está, la conclusión de que la energía propia de los conductores no queda constante al variar la disposición mutua o bien la magnitud de las cargas de los cuerpos circundantes, también es cierta para los conductores, cuya carga total es distinta de cero, ya que en dicho caso se produce la redistribución de las cargas por la superficie de los conductores. ▲

10. Gotas de líquido cargadas. Como fue aclarado en el problema 21 del capítulo «Física molecular», el equilibrio de las gotas de un líquido con su vapor saturado es inestable: las gotas gruesas crecen a cuenta de la evaporación de las finas. Debido a esto todo el líquido en un recipiente cerrado, en ausencia del campo de la gravedad, debe acumularse en una gota, de modo que la presión del vapor saturado corresponderá a la curvatura de su superficie. (Claro está que, en presencia del campo de la gravedad, el líquido se reunirá en el fondo del recipiente y su superficie será plana.) No obstante, las pequeñas gotas cargadas de un líquido dieléctrico se comportan de otra manera: en un recipiente cerrado que contiene un líquido y su vapor saturado estas gotas crecen hasta alcanzar determinada dimensión. ¿Cómo explicar este fenómeno?

△ En el problema 21 del capítulo «Física molecular» fue mostrado que la presión de los vapores saturados p está ligada con el radio de curvatura r de la superficie cóncava del líquido mediante la relación

$$p = p_0 \exp \frac{2m\sigma}{kT\rho r}, \qquad (1)$$

donde p_0 es la presión del vapor saturado en el caso de la superficie plana del líquido. Esto significa que, gracias a la tensión superficial en el líquido, el vapor, en equilibrio con una gota de radio r, estará sobresaturado para el líquido con la superficie plana. De resultas, como hemos visto, en la superficie plana del líquido se produce la condensación y el vapor se convierte en no saturado para las gotas, lo que conduce a su evaporación. Mientras mayor sea el coeficiente de tensión superficial σ y menor el radio de las gotas, con tanto mayor rapidez transcurre el proceso descrito.

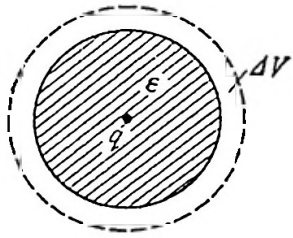


Fig. 10.1. Para el cálculo de la energía electrostática al aumentar el radio de la gota cargada

Ahora, analicemos que sucederá cuando la gota tiene carga eléctrica. P. ej., la gota se formó sobre un ion, de modo que podemos considerar que en su centro se encuentra la carga q. Con el campo eléctrico, creado por ese ion, está ligada la presión electrostática p' adicional. Para hallar esta presión vamos a razonar del siguiente modo. Supongamos que las dimensiones de la gota han aumentado un poco, de forma que la variación de su volumen es igual a ΔV (fig. 10.1). Con ello, las fuerzas electrostáticas realizan un trabajo igual a $p'\Delta V$. Este trabajo se realiza a cuenta de la energía del campo electrostático de la gota que disminuye al aumentar el radio de ésta. Antes de la dilatación de la gota la energía del campo eléctrico en la capa de volumen ΔV en la fig. 10.1, era igual a $\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\Delta V$. Después

de la dilatación de la gota, cuando dicha capa se llena del dieléctrico con permeabilidad ε, la intensidad del campo en él disminuye ε veces, mientras que la energía del campo, de acuerdo con la fórmula (9) de la introducción al presente capítulo, también disminuye ε veces y se hace igual a $\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\frac{\Delta V}{\varepsilon}$. Igualando el trabajo de las fuerzas del campo eléctrico al decrecimiento de su energía, obtenemos

$$p' = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right). \tag{2}$$

En esta fórmula E es la intensidad del campo eléctrico que había en la capa ΔV antes de la dilatación de la gota. La presencia de la gota, es decir, de un dieléctrico homogéneo esférico, que rodea a la carga puntual, no viola la simetría esférica del campo eléctrico. Por esto, aplicando el teorema de Gauss, nos cercioramos de que el campo fuera de la gota coincide con el de la carga puntual:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}. \tag{3}$$

Poniendo este valor de E en la fórmula (2), obtenemos para la presión electrostática adicional la siguiente expresión:

$$p' = \frac{\varepsilon_0}{2(4\pi\varepsilon_0)^2}\frac{q^2}{r^4}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right). \tag{4}$$

Esta presión parece como si «dilatara» la gota desde el interior y, por ello, su efecto se puede considerar como la disminución de la tensión superficial que oprime la gota. La presión del líquido dentro de la gota, condicionada por la tensión superficial, se da con la expresión

$$p_1 = 2\sigma/r. \tag{5}$$

Con la presencia de la carga q, la presión en el interior de la gota disminuye en la magnitud p' y se hace igual a $p_1 - p'$. Por esta razón, es cómodo introducir el valor efectivo de la tensión superficial σ_{ef} de modo que la presión dentro de la gota cargada $p_1 - p'$ siga, como antes, expresándose con la fórmula (5):

$$p_1 - p' = 2\sigma_{ef}/r. \tag{6}$$

Poniendo aquí los valores de p' y p_1 de las fórmulas (4) y (5), obtenemos

$$\sigma_{ef} = \sigma - \frac{\varepsilon_0 q^2}{4(4\pi\varepsilon_0)^2}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)\frac{1}{r^3} \equiv \sigma - \frac{\alpha}{r^3}, \tag{7}$$

donde el factor de $1/r^3$ en el segundo sumando se ha designado con α para mayor comodidad.

Con el fin de tener en cuenta la influencia de la variación de la tensión superficial sobre la presión de los vapores saturados en la proximidad de la gota cargada, es preciso sustituir en la fórmula (1)

σ por σ_{ef}. Entonces, con ayuda de la fórmula (7), hallamos

$$p = p_0 \exp\left\{\frac{2m}{kT\rho}\left(\frac{\sigma}{r} - \frac{\alpha}{r^4}\right)\right\}. \tag{8}$$

Con objeto de investigar la dependencia entre la presión de los vapores saturados y el radio de la gota cargada, es cómodo tomar previamente el logaritmo de la expresión (8):

$$\ln \frac{p}{p_0} = \frac{2m}{kT\rho}\left(\frac{\sigma}{r} - \frac{\alpha}{r^4}\right). \tag{9}$$

En la gota no cargada $\alpha = 0$, es decir, en el segundo miembro de la fórmula (9) sólo quedará el primer sumando. La gráfica que a este corresponde de la dependencia entre $\ln (p/p_0)$ y r se muestra en la

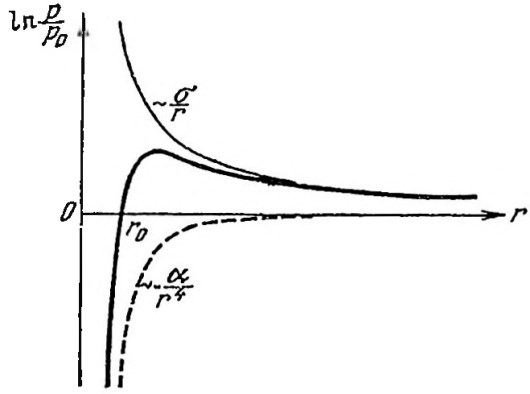


Fig. 10.2. Presión de los vapores que están en equilibrio con la gota de líquido cargada de radio r

fig. 10.2 (la línea fina). Esta gráfica refleja con evidencia la inestabilidad de las gotas de líquido cargadas en los vapores que están en equilibrio con la superficie plana: con cualquier radio, semejante vapor es no saturado para la gota. Por esto, la gota no cargada se evapora. En la misma fig. 10.2, con una línea de trazos, se muestra la gráfica del segundo sumando en la fórmula (9). La gráfica de la dependencia entre $\ln (p/p_0)$ y r para la gota cargada, se obtiene sumando estas curvas y se muestra con una línea gruesa en la fig. 10.2. De dicha gráfica se desprende que, al haber carga, la dependencia entre la presión de los vapores saturados y el radio de curvatura es no monótona. Con cierto valor del radio de la gota $r = r_0$, allí donde la gráfica corta el eje de abscisas, la presión del vapor saturado p para la gota cargada resulta ser la misma que la presión p_0 para la superficie plana de un líquido no cargado. Esto significa que las gotas cargadas de semejante dimensión estarán en equilibrio con el vapor cuya presión es igual a p_0. Además, el equilibrio será estable.

En efecto, sea que las dimensiones de la gota de radio r_0 han disminuido un poco. De la gráfica en la fig. 10.2 se deduce que la presión del vapor saturado es para ella, en tal caso, menor que p_0. Esto quiere decir que el vapor que rodea la gota a la presión p_0 será para ella sobresaturado. Semejante vapor puede condensarse en la gota, o sea, la gota crecerá. Si suponemos que las dimensiones de la gota de radio r_0 han aumentado un poco, podemos cerciorarnos de que el vapor que rodea la gota a presión p_0 será para ella no saturado. Comenzará la evaporación y las dimensiones de la gota disminuirán.

El ejemplo examinado permite comprender el principio de funcionamiento de la cámara de Wilson. La partícula cargada que atraviesa la cámara deja en su recorrido múltiples iones sobre los que, de inmediato, se produce la condensación del vapor y se crean gotas de líquido cargadas. Si en la cámara de Wilson el vapor es saturado, las gotas crecen hasta el instante en que su radio alcanza el valor r_0. Las gotas no cargadas de pequeño radio se evaporarían con rapidez. Gracias a que las gotas están cargadas, la huella que deja en la cámara de Wilson la partícula que la atraviesa se conserva tiempo prolongado.

No obstante, si apreciamos la dimensión de las gotas cargadas r_0, para el que ellas pueden estar en equilibrio con el vapor en la cámara de Wilson, descubriremos que dicha dimensión es demasiado pequeña para que esas gotas sean visibles. En efecto, para hallar el valor de r_0 hay que igualar a cero la expresión entre paréntesis en la fórmula (9). Como resultado, hallamos

$$r_0 = \sqrt[3]{\frac{\alpha}{\sigma}} = \frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{q^2}{\sigma\pi^2\varepsilon_0}\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)}. \qquad (10)$$

Haciendo uso de esta fórmula, podemos hallar que, p. ej., para las gotas de agua ($\varepsilon = 81$, $\sigma = 72$ dyn/cm), formadas sobre los iones cargados una vez ($q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C), $r_0 \approx 10^{-7}$ cm. Este valor es menor que la longitud de onda de la luz visible, por lo que tales gotas no se pueden ver incluso en el más perfecto microscopio. Entonces, ¿por qué la huella de niebla se ve claramente en la cámara de Wilson a simple vista? La cuestión radica en que en dicha cámara se emplea vapor sobresaturado que se encuentra en estado metaestable. Supongamos que la presión de este vapor es igual a $p_1 > p_0$, a lo que corresponde la recta horizontal *1* en la fig. 10.3. Cuando en semejante vapor aparecen gotas no cargadas, cuya dimensión es menor que el valor crítico r_1 (fig. 10.3), la condensación del vapor sobre ellas no se producirá, ya que con relación a esas gotas el vapor es no saturado. Con esto, precisamente, se explica la posibilidad de que exista vapor en estado sobresaturado, pues su condensación sólo puede comenzar al aparecer gotas no cargadas relativamente grandes, cuyo radio es mayor que r_1. Pero, a cuenta de las fluctuaciones térmicas, semejantes gotas grandes no surgen.

Otra cosa sucede con las gotas cargadas. Como la presión del vapor sobresaturado p_1 en la cámara es mayor que p_0, su crecimiento transcurrirá no hasta el valor r_0, sino hasta un valor mayor r_2 con el que el vapor en la cámara de Wilson será saturado para la gota cargada (fig. 10.3). Pero si en la cámara la presión del vapor sobresaturado es tan alta que la recta *2*, que le corresponde en la fig. 10.3,

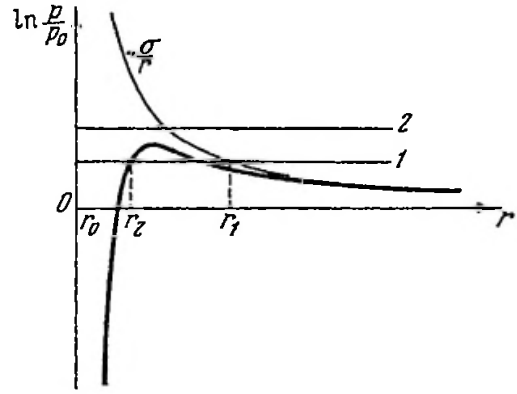


Fig. 10.3. Si la presión del vapor sobresaturado es suficientemente grande (la recta *2*), las gotas cargadas crecerán ilimitadamente

no corta la gráfica de la dependencia de la presión del vapor saturado para la gota cargada, el crecimiento de ésta transcurrirá ilimitadamente. Las gotas cargadas alcanzan dimensiones visibles y forman la huella de la partícula en vuelo. ▲

11. Conexión de condensadores. Analicemos el esquema de la conexión de condensadores mostrado en la fig. 11.1. Hay que hallar la tensión en cada uno de ellos.

△ Con frecuencia, en los esquemas radiotécnicos se tropieza con diversas conexiones de condensadores. Si éstos están unidos entre sí en paralelo, las tensiones en ellos son iguales, mientras que las cargas de los condensadores son proporcionales a sus capacidades. Para la conexión en serie de los condensadores, la suma de las tensiones en condensadores por separado es igual a la tensión aplicada. La tensión en cada uno de los condensadores se puede hallar partiendo de la condición de que las armaduras de los condensadores vecinos, unidas entre sí, forman un conductor aislado, en su total electroneutro. Por ello, las cargas de todos los condensadores son iguales. P. ej., con la conexión en serie de dos condensadores (fig. 11.2) las condiciones indicadas conducen a las igualdades

$$U_1 + U_2 = U, \quad C_1U_1 = C_2U_2. \tag{1}$$

Al resolver este sistema de ecuaciones, hallamos

$$U_1 = U\frac{C_2}{C_1+C_2}, \quad U_2 = U\frac{C_1}{C_1+C_2}. \tag{2}$$

Las tensiones en los condensadores conectados en serie son inversamente proporcionales a sus capacidades.

Sin embargo, a veces se tropieza con tales conexiones de los condensadores que no se reducen al conjunto de conexiones en paralelo

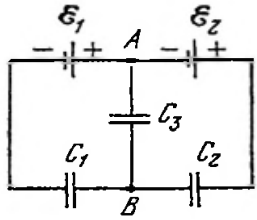


Fig. 11.1 Conexión ramificada de condensadores

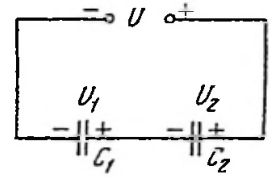


Fig. 11.2. Las armaduras de los condensadores conectadas entre sí, en su total, son electroneutras

y en serie. Con semejante ejemplo de circuito ramificado nos encontramos en el planteamiento del presente problema. ¿Cómo hallar en este caso las tensiones de los condensadores?

Intentemos confeccionar las ecuaciones necesarias. Ante todo señalemos que los signos de la carga de cada una de las placas de los condensadores C_1 y C_2 se pueden indicar de inmediato: la armadura del condensador unida al polo de la fuente tendrá la carga del mismo signo que el correspondiente polo. En lo que atañe al condensador C_3, la cuestión es más complicada, ya que, como vemos en la fig. 11.1, una de sus armaduras está unida, simultáneamente, tanto con el polo positivo de una de las fuentes, como con el polo negativo de la otra. Por ello, no podemos indicar de inmediato el signo de la carga de esta armadura. Sólo está claro que la carga de esta armadura puede ser tanto positiva, como negativa en función de qué diferencia de potencial se estableció entre los puntos A y B en ausencia del condensador C_3. Pero mejor es no perder el tiempo para aclarar esta cuestión, sino que suponer, simplemente, que la carga de esa armadura tiene determinado signo, p. ej., positivo, es decir, los signos de todas las armaduras son los mostrados en la fig. 11.3. Si no hemos adivinado el signo de la carga, entonces, de las ecuaciones para la tensión U_3, correctamente confeccionadas, obtendremos el valor negativo y no positivo.

Ahora, ya podemos escribir las ecuaciones que ligan las tensiones en los condensadores con la fem de las fuentes. Consideremos, p. ej., la diferencia de potencial entre los puntos D y F en la fig. 11.3.

Por un lado, esta diferencia de potencial es igual a la suma de las fem $\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2$ y, por otro, a la suma de las tensiones en los condensadores C_1 y C_2. Por ello,

$$U_1 + U_2 = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2. \tag{3}$$

Del mismo modo, la tensión entre los puntos A y F, por un lado es igual a la fem $\mathscr{E}_1$ y, por otro, la suma de las tensiones en los condensadores C_1 y C_3:

$$U_1 + U_3 = \mathscr{E}_1. \tag{4}$$

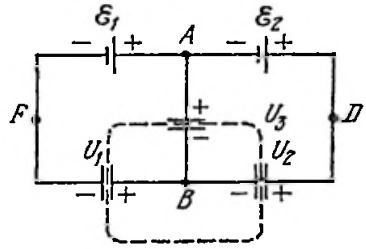


Fig. 11.3. La carga total de la parte del esquema limitada por la línea de trazos es igual a cero

Las dos ecuaciones escritas (3) y (4) son insuficientes para determinar las tres tensiones incógnitas U_1, U_2 y U_3. Por eso, hay que escribir una ecuación más. Si razonando lo mismo que antes, intentamos examinar la diferencia de potencial entre los puntos D y A, llegamos a la ecuación

$$U_2 - U_3 = \mathscr{E}_2. \tag{5}$$

No obstante, vemos con facilidad que esta ecuación no ayudará en la determinación de las incógnitas, ya que es el corolario de las dos ecuaciones escritas antes: sustrayendo, término por término, la ecuación (4) de la (3), obtenemos la ecuación (5).

Podemos hallar la tercera ecuación independiente como lo hicimos para el caso de la conexión de los condensadores en serie, tomando en consideración la condición de electroneutralidad de las armaduras de los condensadores unidas entre sí, que no tienen contacto con los polos de las fuentes. Este sistema electroneutro de las armaduras está rodeado en la fig. 11.3 con una línea de trazos. A diferencia del caso de la conexión de los condensadores en serie, esta condición conduce no a la igualdad de sus cargas, sino que al requerimiento de la igualdad a cero de la suma algebraica de las cargas de las mencionadas armaduras:

$$C_1U_1 - C_2U_2 - C_3U_3 = 0. \tag{6}$$

Junto con cualesquiera dos de las ecuaciones (3), (4) y (5), la ecuación (6) forma un sistema para hallar las incógnitas U_1, U_2 y U_3. P. ej., expresemos U_3 de la ecuación (6):

$$U_3 = \frac{C_1U_1 - C_2U_2}{C_3} \tag{7}$$

y pongámosla en (4):

$$U_1 (1 + C_1/C_2) - U_3C_2/C_3 = \mathscr{E}_1. \tag{8}$$

Ahora, podemos multiplicar, término por término, la ecuación (3) por la razón C_2/C_3 y sumarla a la ecuación (8). Como resultado, obte-

nemos

$$U_1 = \frac{(\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2)\, C_2 + \mathscr{E}_1 C_3}{C_1 + C_2 + C_3}. \qquad (9)$$

Ahora, la expresión para U_2 se escribe de inmediato haciendo uso de la simetría del esquema y cambiando de lugar en (9) los índices 1 y 2:

$$U_2 = \frac{(\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2)\, C_1 + \mathscr{E}_2 C_3}{C_1 + C_2 + C_3}. \qquad (10)$$

Aquellos que duden de la legitimidad de semejante operación, pueden poner el valor de U_1 hallado con (9) en la ecuación (8) y calcular U_2. Para determinar U_3 los valores de U_1 y U_2 de (9) y (10) han de ponerse en la expresión (7):

$$U_3 = \frac{C_1 \mathscr{E}_1 - C_2 \mathscr{E}_2}{C_1 + C_2 + C_3}. \qquad (11)$$

Ante todo, señalemos que los valores de U_1 y U_2 se obtienen positivos con cualquier valor de las fem y las capacidades de los condensadores. Esto quiere decir que los signos de las cargas de las armaduras de los condensadores C_1 y C_2, en realidad, siempre son tales como se indica en la fig. 11.3. Como se desprende de la fórmula (11), el valor de U_3 puede ser tanto positivo, como negativo. Si $C_1 \mathscr{E}_1 > C_2 \mathscr{E}_2$, entonces $U_3 > 0$ y los signos de las cargas de las armaduras del condensador C_3 serán como los mostrados en la fig. 11.3. Pero si $C_1 \mathscr{E}_1 < C_2 \mathscr{E}_2$, $U_3 < 0$. Esto significa que la polaridad de la tensión en el condensador C_3 será opuesta a la que vemos en la fig. 11.3. El valor de esta tensión se da por el módulo del segundo miembro de la expresión (11).

Es conveniente comprobar la veracidad de los resultados obtenidos en los casos evidentes límites y particulares. Primero, en el esquema simétrico, cuando $\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_2$ y $C_1 = C_2$, la tensión U_3 entre los puntos A y B debe ser igual a cero, en tanto que las tensiones U_1 y U_2 han de ser idénticas e iguales a la fem de la fuente $\mathscr{E}$. En este caso vemos que las fórmulas (9) y (11) conducen, precisamente, a semejante resultado.

Segundo, si $C_3 = 0$, lo que corresponde a la ausencia de ese condensador, tenemos la conexión en serie de los condensadores C_1 y C_2 (fig. 11.4). Las fórmulas (9) y (10) coinciden, para $C_3 = 0$, con las expresiones (2) si en ellas por la tensión aplicada U entendemos la suma $\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2$. Si $C_3 = 0$ la fórmula (11) nos proporciona el valor de la tensión entre los puntos A y B en el esquema de la fig. 11.4:

$$U_{AB} = \frac{C_1 \mathscr{E}_1 - C_2 \mathscr{E}_2}{C_1 + C_2}. \qquad (12)$$

Por fin, el caso $C_3 \to \infty$ corresponde a la unión de los puntos A y B con un conductor (fig. 11.5). Con ello, la tensión en cada condensador

es igual a la fem de la fuente a la que él está conectado en paralelo: $U_1 = \mathscr{E}_1$, $U_2 = \mathscr{E}_2$. Esto es lo que, precisamente, se obtiene de las fórmulas (9) y (10), ya que cuando $C_3 \to \infty$, en los numeradores

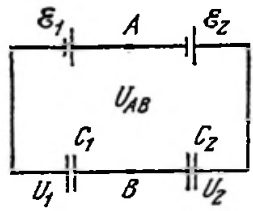


Fig. 11.4. Con $C_3 = 0$ el esquema mostrado en la fig. 11.1 toma esta forma

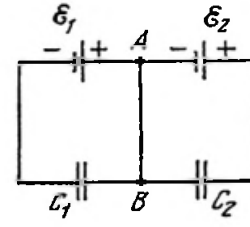


Fig. 11.5. El caso $C_3 \to \infty$ corresponde a la conexión de los puntos A y B con un conductor

y denominadores de estas fórmulas se pueden despreciar los sumandos que no contienen C_3. Con ello, como se desprende de la fórmula (11), la tensión U_3 tiende a cero. ▲

12. Conmutaciones en un circuito con condensadores. Se ha montado el circuito eléctrico, cuyo esquema se muestra en la fig. 12.1. ¿Con qué valores de los parámetros de los elementos del circuito la conmutación de la llave de la posición A a la B no conduce a la variación de la tensión en el condensador C_1?

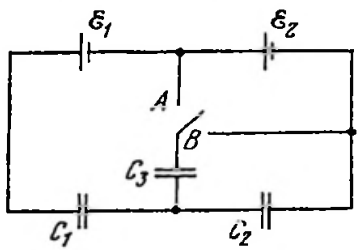


Fig. 12.1. Conmutación de la llave de la posición A a la B

△ La condición que buscamos se puede obtener igualando la tensión en el condensador para ambas posiciones de la llave. Cuando ésta se encuentra en la posición A el esquema coincide con el estudiado en el problema anterior y la tensión U_1 se da con la fórmula (9) obtenida en él. Pero si la llave se encuentra en la posición B, el cálculo de la tensión U_1 se efectúa de modo elemental, ya que ahora los condensadores C_2 y C_3, unidos en paralelo, se conectan en serie al condensador C_1.

Sin embargo, este problema se puede resolver sin efectuar cálculos detallados. En efecto, supongamos que la tensión U_1 en el condensador C_1 no varía al conmutar la llave de A a B. En este caso, para las dos posiciones de la llave, es cierta la igualdad

$$U_1 + U_2 = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2, \qquad (1)$$

de lo que se desprende que durante la conmutación tampoco varía la tensión U_2 en el segundo condensador y, por lo tanto, no cambian,

asimismo, las cargas en ambos condensadores. Pero, entonces, no debe tampoco variar la carga del tercer condensador, ya que la suma algebraica de las cargas en las tres armaduras, unidas entre sí, de los condensadores es igual a cero. Por consiguiente, no varía la tensión U_3 en el tercer condensador. Pero, después de la conmutación, $U_3 = U_2$, ya que, ahora, los condensadores C_2 y C_3 están conectados en paralelo. Esto significa que antes de la conmutación también $U_2 = U_3$, lo que sólo es posible si los potenciales de los puntos A y B son iguales, es decir, si $\mathscr{E}_2 = 0$. ▲

13. Capacidad de una batería de condensadores. Cualquier conjunto de condensadores, conectados en una batería, puede ser sustituido por un condensador equivalente. Si todos los condensadores están conectados en paralelo, la capacidad de la batería es igual a la suma de las capacidades de los condensadores por separado. Si los condensadores están conectados en serie, la capacidad de la batería C_0 se halla por la fórmula

$$\frac{1}{C_0} = \sum_i \frac{1}{C_i}, \qquad (1)$$

donde C_i es la capacidad de los condensadores individuales.

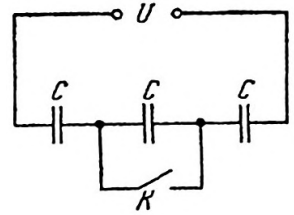


Fig. 13.1. Al abrir la llave K la batería de dos condensadores conectados en serie se convierte en una batería de tres condensadores

Consideremos el circuito de conexión de condensadores iguales de capacidad C en la batería mostrada en la fig. 13.1. Los extremos de la batería de condensadores están conectados a la fuente de tensión continua U. Supongamos que al principio la llave K está cerrada. En este caso, de hecho, tenemos dos condensadores en serie, ya que el condensador medio está cortocircuitado. En correspondencia con la fórmula (1), la capacidad de semejante batería es igual a $C/2$. Abramos la llave K. Ahora, tenemos una batería de tres condensadores conectados en serie, cuya capacidad, si hacemos uso de la fórmula (1), debe ser igual a $C/3$.

Por otro lado, la abertura de la llave en el caso electrostático (es decir, el corte del circuito con el equilibrio de las cargas) no puede conducir ni a las variaciones de los potenciales de los puntos del circuito, ni a la redistribución de las cargas eléctricas. Por esta razón, la carga q de los condensadores extremos (o sea, la carga de la batería) queda invariable. Tampoco cambia la tensión en la batería de condensadores U. Pero esto significa que no varía, asimismo, la capacidad de la batería $C_0 = C/2$, ya que ella está ligada con la carga de ésta q y la tensión U en ella con la relación $q = C_0 U$. Expliquen la contradicción surgida.

△ La contradicción se explica con que en el circuito aducido,

la abertura de la llave K no se puede considerar como la conexión de los condensadores en una nueva batería. Acerca de la capacidad de la batería de condensadores, como de una magnitud que sólo depende de qué condensadores hemos tomado y cómo están conectados entre sí, podemos hablar en aquel caso cuando ellos se unen en una batería sin estar cargados y, sólo después, la batería se conecta a la fuente de tensión. Para esta condición podemos calcular la capacidad de la batería mirando sólo el circuito eléctrico. Pero si al conectarlos

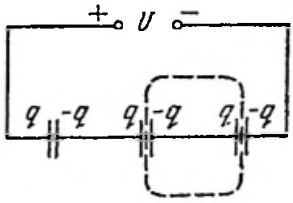


Fig. 13.2. La parte aislada del esquema limitada con una línea de trazos queda electroaislada al cargar la batería de condensadores

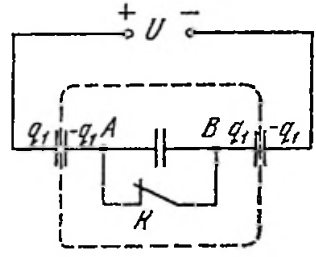


Fig. 13.3. Al cerrar la llave K el condensador medio se descarga. Con ello, la carga de la batería de condensadores q_1 crece

en la batería, algunos de los condensadores ya están cargados, hablando en general, la capacidad de la batería dependerá no sólo de la forma del circuito eléctrico definitivo, sino también de cómo éste fue formándose, es decir, de la consecutividad con la que los condensadores, previamente cargados, iban conectándose en la batería. En semejantes condiciones, es del todo inconveniente el empleo de la noción de capacidad en lo que atañe a toda la batería de condensadores.

Expliquemos lo dicho en el ejemplo del circuito aducido en el planteamiento del problema (fig. 13.1). Si conectamos tres condensadores en serie y, a continuación, tal batería se conecta a la fuente de alimentación, en las armaduras de todos los condensadores surgen cargas iguales en módulo y de signo contrario, de modo que cada parte del circuito, aislada de la fuente (p. ej., la rodeada por una línea de trazos en la fig. 13.2), en su total es electroneutra. En este caso, tomando en consideración que la tensión de la fuente es igual a la suma de las tensiones en los condensadores aislados, llegamos de inmediato a la fórmula (1) para la capacidad de la batería.

Ahora, si en semejante circuito unimos las armaduras del condensador medio, es decir, cerramos la llave K (fig. 13.3), este condensador se descargará y los potenciales de los puntos A y B serán iguales. Con ello, se conservará la electroneutralidad de la parte del circuito rodeada por la línea de trazos, aislada de la fuente de tensión.

Esto significa, que después de cerrar la llave K, en la batería de los condensadores conectados en serie que de resultas se obtiene, la distribución de las cargas será la misma que al conectar dos condensadores no cargados y su posterior conexión a la fuente. Por ello, en este caso, la fórmula (1) es aplicable para la capacidad de una batería de dos condensadores.

Es fácil ver que no sólo la conexión considerada aquí, sino también cualquier otra conexión dentro de una batería cargada de condensadores deja electroneutras todas las partes internas de la batería que, de por sí, son un conductor aislado. Por esta causa, en semejantes casos, siguen siendo ciertas las fórmulas para la capacidad de la batería. Claro está, después de la conexión la batería contiene un número menor de condensadores.

Pero el corte de tal conductor interno en dos partes, puede conducir a la aparición en el interior de la batería de condensadores partes aisladas con carga total distinta de cero. Esto está bien claro en el ejemplo aducido en el planteamiento del problema. Al abrir la llave K (fig. 13.1), ninguna carga puede aparecer en las placas del condensador medio, mientras que las cargas en las placas de los condensadores extremos siguen siendo las mismas. Por ello, la abertura de la llave K conduce a que el conductor único, en su total electroneutro, que contiene las placas interiores de los condensadores extremos, se convierte en dos conductores cargados con cargas iguales en módulo y de signos opuestos. En semejante sistema la fórmula (1) no es aplicable para la capacidad de la batería.

Ahora, analicemos los procesos que transcurren al cerrar la llave desde el punto de vista energético. Al cerrar la llave K en el circuito, representado en la fig. 13.3, además de la neutralización de las cargas en las armaduras del condensador medio, también se produce el aumento de la carga en las armaduras de los condensadores extremos, es decir, el crecimiento de la carga de la batería. Con ello, a pesar de que la energía electrostática del condensador medio se convierte en otras forma, la energía de toda la batería de condensadores aumenta a cuenta del trabajo de la fuente de tensión. Y el trabajo realizado por la fuente será dos veces mayor que el crecimiento de la energía electrostática de la batería de condensadores.

Razonamientos energéticos permiten llegar a la conclusión de que cualquier conexión en el interior de la batería de condensadores, similar al cortocircuito del condensador medio que acabamos de analizar conduce al aumento de la capacidad de la batería. Al demostrar esta afirmación, para simplificar, examinemos el caso cuando la batería de condensadores cargada está desconectada de las fuentes. Al unir dos puntos de diferente potencial con un conductor, se producirá la redistribución de las cargas, que siempre va acompañada de la transformación de la energía electrostática en otras formas. Ya que la carga de la batería queda invariable, como se desprende

de la fórmula $W = q^2/2C$, la disminución de la energía de la batería significa el aumento de su capacidad. P. ej., al cerrar en el circuito de la fig. 13.4 la llave K, como es fácil de comprobar mediante el cálculo directo, la capacidad de la batería aumenta si los potenciales de los puntos A y B en la batería de condensadores cargada eran distintos. La capacidad de la batería no variará sólo en el caso cuando la capacidad de los condensadores satisface la condición $C_1/C_2 = C_3/C_4$. ▲

14. Transformaciones energéticas en un condensador. Una placa de un dieléctrico con permeabilidad ε ocupa todo el espacio entre las armaduras de un condensador plano, entre las que la distancia es igual a d (fig. 14.1). El condensador está conectado a la fuente

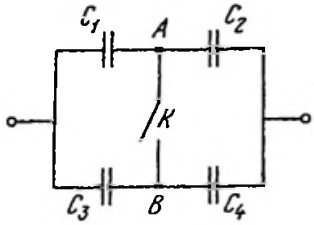


Fig. 13.4. Al cerrar la llave la capacidad de la batería de condensadores no puede disminuir

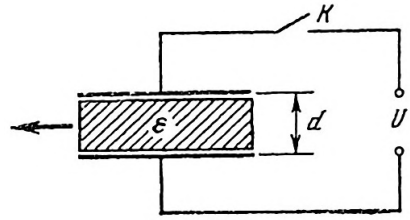


Fig. 14.1. La placa dieléctrica llena todo el espacio entre las armaduras del condensador

de tensión continua U. La placa dieléctrica se saca del condensador. ¿Cómo hay que variar la distancia entre las armaduras para que la energía del condensador adquiera su valor inicial? Analicen dos casos: 1) antes de sacar la placa el condensador se desonecta de la fuente de tensión; 2) la llave K siempre está cerrada.

△ Para empezar consideremos el primer caso, cuando antes de sacar la placa el condensador se desconecta de la fuente. Esto significa que, posteriormente, las cargas en las armaduras del condensador quedan invariables. Por eso, para la energía del condensador W es cómodo, en este caso, emplear la expresión

$$W = \frac{q^2}{2C}. \qquad (1)$$

Después de sacar la placa dieléctrica es evidente que la capacidad del condensador disminuirá ε veces. De la fórmula (1) se desprende que, con ello, la energía del condensador crece ε veces: $W' = \varepsilon W$. ¿Cómo explicar el aumento de la energía electrostática del condensador? Ya que la fuente de tensión está desconectada, la única causa del aumento de la energía puede ser el trabajo realizado por las fuerzas externas al sacar la placa dieléctrica. De esto se desprende de inmediato que sobre dicha placa, que se saca del condensador, por

parte del campo eléctrico, actúa una fuerza tendiente a arrastrar de nuevo la placa en el condensador. Precisamente con el vencimiento de esta fuerza de arrastre está ligada la realización del trabajo que conduce al aumento de la energía del condensador.

Para que la energía del condensador adquiera su valor anterior, quedando invariable la carga en sus armaduras, es necesario, como se deduce de la fórmula (1), que la capacidad del condensador alcance sin la presencia de la placa su valor inicial. Esto se puede conseguir disminuyendo la distancia entre las armaduras. Como la capacidad de un condensador plano es inversamente proporcional a la distancia entre sus armaduras, la nueva distancia d_1 debe ser ε veces menor que la antigua: $d_1 = d/\varepsilon$.

El que para disminuir la energía del condensador haya que acercar las armaduras se deduce, asimismo, de la ley de la conservación de la energía. Para disminuir su energía el sistema debe realizar trabajo positivo sobre cuerpos externos, es decir, las armaduras del condensador, cargadas con signos diferentes y que se atraen entre sí, deben aproximarse. Con ello, sobre los cuerpos externos se realiza trabajo, ya que para el movimiento uniforme de las armaduras las fuerzas de su atracción mutua deben ser compensadas por las fuerzas externas.

Pasemos al segundo caso. Con la llave K cerrada la tensión en el condensador todo el tiempo es invariable. Ahora, para la energía del condensador es más idónea la expresión

$$W = \frac{CU^2}{2}. \qquad (2)$$

Como al sacar la placa dieléctrica la capacidad del condensador disminuye ε veces, en esta misma magnitud decrece la energía del condensador. ¿Cómo se puede explicar la disminución de la energía del condensador? La cuestión es que al sacar la placa dieléctrica las fuerzas externas realizan trabajo positivo y, con ello, la energía del sistema debería crecer. Ella en realidad crece, pero, en este caso, el sistema, además del condensador, contiene también la fuente de tensión. ¿Qué sucede en la fuente al sacar la placa? Al disminuir la carga del condensador su carga disminuye asimismo. Por eso, al sacar la placa la fuente realiza trabajo negativo, ya que la disminución de la carga del condensador se acompaña del paso, en sentido inverso, de la carga por la fuente. Si la fuente de alimentación es un acumulador, al suceder esto, él se carga.

Empleando la ley de la conservación de la energía podemos hallar qué trabajo realizan las fuerzas externas al sacar la placa. Ante todo, mostremos que en el circuito, donde el condensador está conectado a la fuente de alimentación, el trabajo de ésta es igual a la variación doble de la energía del condensador para todo tipo de procesos que transcurran. Si la carga del condensador varió en Δq, como se des-

prende de la fórmula para la energía del condensador W escrita en la forma

$$W = \frac{qU}{2}, \tag{3}$$

la variación de la energía del condensador

$$\Delta W = \frac{\Delta qU}{2}. \tag{4}$$

Cuando por la fuente de alimentación pasa la carga Δq, ella realiza el trabajo $A_f = \Delta qU$. Por ello,

$$A_f = 2\Delta W. \tag{5}$$

Ahora, podemos componer la ecuación del balance de energía para el proceso que consideramos en el problema y hallar el trabajo de las fuerzas externas A:

$$A + A_f = \Delta W. \tag{6}$$

Empleando la relación (5), de aquí hallamos

$$A = -\Delta W. \tag{7}$$

Como la energía del condensador disminuye ($\Delta W < 0$), las fuerzas externas efectúan trabajo positivo ($A > 0$).

La respuesta a la pregunta planteada en el problema ya se desprende de la fórmula (2): para que la energía del condensador tome su valor anterior, es decir, aumente ε veces, es preciso aumentar, asimismo, la capacidad del condensador ε veces. Con este fin, lo mismo que en el caso anterior, la distancia entre las armaduras debe disminuirse ε veces. Pero, a diferencia del primer caso, donde con la aproximación de las armaduras la energía del condensador decrece, aquí ella crece. Este fenómeno se produce a pesar de que con la aproximación de las armaduras del condensador, como en el primer caso, se realiza trabajo positivo sobre los cuerpos externos. El cumplimiento de la ley de la conservación de la energía es posible gracias a que la fuente de tensión, al aproximarse las armaduras del condensador, realiza trabajo positivo, que asegura también el aumento de la energía del condensador y la realización de trabajo sobre los cuerpos externos.

El hecho de que sobre la placa dieléctrica que se saca del condensador, actúa una fuerza que tiende a meterla de nuevo en él, lo hemos visto partiendo de razonamientos energéticos. ¿Pero cómo explicar el mecanismo de aparición de esta fuerza? En su total, la placa dieléctrica es electroneutra. En el campo eléctrico cada elemento del volumen de la placa se parecerá a un dipolo orientado a lo largo del campo. En aquellos lugares donde el campo eléctrico es homogéneo, las fuerzas que actúan sobre tales dipolos son iguales

a cero. Sólo donde el campo eléctrico es no homogéneo, la fuerza es distinta de cero. Por ello, mientras la placa dieléctrica se encuentre en su total dentro del condensador, donde el campo eléctrico es homogéneo, la fuerza que sobre ella actúa es igual a cero. Pero, en cuanto una parte de la placa sale del condensador a la región donde el campo es no homogéneo, sobre los dipolos de esa parte actúan fuerzas dirigidas hacia la región donde la intensidad del campo es mayor, es decir, hacia el interior del condensador. Así pues, la causa física de la aparición de la fuerza de arrastre al interior está condicionada por la no homogeneidad del campo eléctrico junto a los bordes de las armaduras del condensador. ▲

VII. CORRIENTE ELÉCTRICA

El cálculo de los circuitos eléctricos de corriente continua se basa en el empleo de la ley de Ohm. Para un sector homogéneo del circuito la mencionada ley expresa la relación entre la intensidad de corriente I, la tensión U y la resistencia R:

$$I = \frac{U}{R}.$$

Parte de los problemas de este capítulo está dedicada al cálculo de los circuitos eléctricos que no se reducen a un conjunto de conductores unidos en serie y en paralelo. En semejantes problemas, con frecuencia, se facilita considerablemente su cálculo si se toma en consideración la simetría del esquema que se analiza.

Para un circuito cerrado, formado por la fuente de corriente con fem $\mathscr{E}$ y resistencia interna r, la ley de Ohm tiene la forma

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R + r}.$$

Si el sector del circuito, a cuyos extremos se aplica la tensión U, contiene la fuente de fem, la intensidad de corriente se determina con ayuda de la ley de Ohm para el sector no homogéneo del circuito:

$$I = \frac{U + \mathscr{E}}{R + r}.$$

Por tensión U en el sector que consideramos se entiende la diferencia $\varphi_1 - \varphi_2$, donde φ_1 es el potencial del punto del que fluye la corriente, mientras que φ_2, el potencial del punto hacia el que la corriente fluye. En esa fórmula la fem $\mathscr{E}$ se toma con signo más si la corriente está dirigida dentro de la fuente del polo negativo al positivo y con signo menos en el caso contrario. Con ello, la dirección de la corriente se toma al azar. Si como resultado del cálculo con la fórmula anterior, la corriente resulta ser negativa, esto significa que ella, en realidad, fluye en la dirección opuesta al sentido que elegimos.

Cuando la corriente I circula por el sector a cuyos extremos está aplicada la tensión U, durante el tiempo Δt, el campo eléctrico realiza en este sector el trabajo

$$\Delta A = IU\Delta t.$$

Como resultado de este trabajo, en el sector del circuito que estudiamos se desprende calor determinado por la ley de Joule — Lenz:

$$\Delta Q = I^2 R \Delta t,$$

donde R es la resistencia del sector.

Al variar el flujo magnético que pasa por una superficie limitada por un circuito, en éste surge una fem de inducción, cuyo valor según la ley de Faraday

es proporcional a la rapidez con que varía el flujo magnético:

$$\mathcal{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

El signo menos en esta fórmula corresponde a la regla de Lenz que determina el sentido de la corriente inducida.

El cálculo de los circuitos eléctricos de corriente alterna se basa en que, al conectarlos en la red de tensión sinusoidal, la resistencia R, la inductancia L y la capacidad eléctrica C la corriente en el circuito también es sinusoidal. Los valores de amplitud de la corriente I_0 están ligados con los valores de amplitud de la tensión U_0, alimentada a estos elementos, con las relaciones

$$I_0 = \frac{U_0}{R}, \quad I_0 = \frac{U_0}{\omega L}, \quad I_0 = U_0 \omega C.$$

En la resistencia óhmica la tensión coincide en fase con la corriente, en la inductancia la tensión adelanta a la corriente en fase en $\pi/2$, en la capacidad, se retarda de la corriente en $\pi/2$.

En un circuito en serie de corriente alterna, que contiene la resistencia R, la capacidad C y la inductancia L, entre la tensión y la corriente aplicadas existe desfasaje. Si la tensión aplicada se da con la expresión $U = U_0 \cos \omega t$, la corriente en el circuito es igual a $I = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$, donde el valor de la amplitud de la corriente I_0 y el desfasaje φ se determinan con las fórmulas

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}.$$

1. Cables y bornas. Tenemos n bornas, cada una de las cuales está unida con todas las demás mediante iguales cables de resistencia R. Hallen la resistencia entre cualesquiera dos bornas.

△ Ante todo, de la simetría del circuito es evidente que, entre cualquiera par de bornas, la resistencia es la misma.

Analicemos el circuito auxiliar (fig. 1.1). Dos bornas A y B están unidas entre sí con el cable de resistencia R, las restantes $n - 2$ bornas están conectadas con las bornas A y B mediante iguales cables de resistencia R, pero no están unidas entre sí.

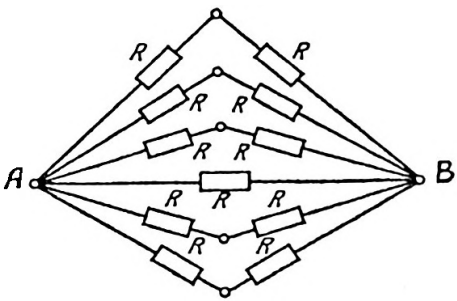


Fig. 1.1. Circuito equivalente para el cálculo de la resistencia entre cualquier par de bornas

En este circuito entre las bornas A y B se han conectado en paralelo la resistencia R y $n - 2$ resistencias $2R$. Por esta razón, la resistencia total R_{AB} entre las bornas A y B se calcula con la fórmula

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R} + \frac{n-2}{2R}, \text{ de donde } R_{AB} = \frac{2R}{n}.$$

De la simetría del esquema, representado en la figura, se desprende que si entre las bornas A y B creamos cierta diferencia de potencial, los potenciales de las restantes $n - 2$ bornas serán entre sí iguales.

Ahora, unamos con los cables de resistencia R cada una de las $n - 2$ bornas con todas las demás. En dichos cables no habrá corriente y, por lo tanto, en este caso, la resistencia R_{AB} entre las bornas A y B no variará. Pero el circuito obtenido como resultado de semejante conexión coincide con el que se indica en el planteamiento del problema, ya que en este circuito cada borna está unida con todas las restantes mediante los cables de resistencia R.

Así pues, la resistencia buscada entre cualesquiera dos bornas es igual a $2R/n$. Presten atención hasta qué punto es sencilla la solución de este problema al hacer uso de las consideraciones de simetría. Claro está, es fácil adivinar la forma de la solución si se consideran sucesivamente los sencillos casos particulares para n iguales a 2, 3 y 4. Pero es bastante difícil demostrar que la fórmula obtenida $R_{AB} = 2R/n$ es cierta para todo número de borna n. Al mismo tiempo, al captar la simetría de este circuito, no evidente a primera vista, vemos que el cálculo del caso general no presenta mayores complicaciones que con tres bornas unidas. ▲

2. Medición de las resistencias en un circuito. En la fig. 2.1 se muestra una parte de un circuito compuesto de resistencias desconocidas. ¿Teniendo un ohmímetro y cables de conexión, cómo medir la resistencia R_x sin cortar ningún contacto del circuito?

△ Según el planteamiento del problema no se puede cortar ninguna de las conexiones de este esquema, pero se permite unir con

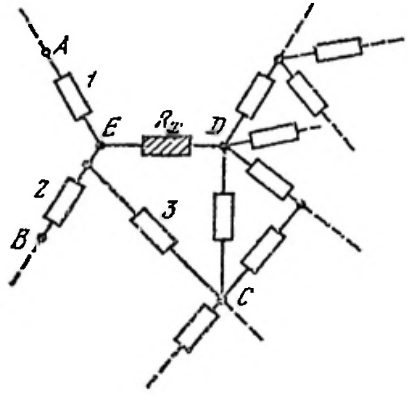


Fig. 2.1. Sector de un circuito ramificado que contiene la resistencia buscada R_x

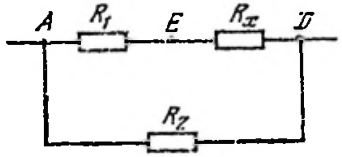


Fig. 2.2. A esta forma se puede reducir el circuito mostrado en la fig. 2.1, mediante cables adicionales

cables cualesquiera de los puntos, es decir, cortocircuitar ciertos sectores. Empleando los cables siempre podemos reducir el circuito inicial a la forma mostrada en la fig. 2.2.

El circuito que viene en la fig. 2.1 se reduce a dicha forma si cortocircuitamos los puntos A, B y C. Entonces, el papel de R_1 en la fig. 2.2 será desempeñado por las resistencias *1*, *2* y *3*, conectadas en paralelo (fig. 2.1), en tanto que el papel de R_2 lo interpretará la resistencia de todo el circuito ramificado entre los puntos C y D. Es fácil comprender que, en el caso general, el circuito en la fig. 2.2 se puede obtener de un circuito arbitrario que contenga R_x, uniendo

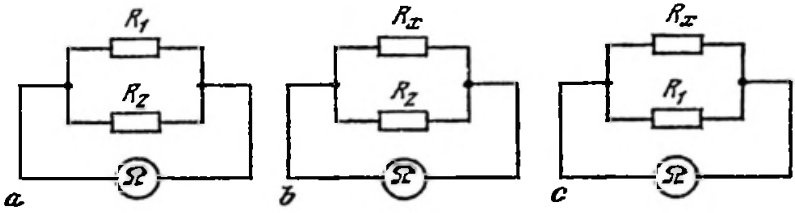


Fig. 2.3. Con el fin de determinar las tres resistencia desconocidas en el circuito de la fig. 2.2. es idóneo realizar mediciones cortocircuitando de antemano los puntos E y D (a), A y E (b), A y D (c)

entre sí en cortocircuito los extremos de todos los resistores conectados, por un mismo lado, al que buscamos. (Si en el circuito hay resistencias paralelas a R_x, es imposible determinar R_x sin realizar desconexiones: sólo se puede hallar la resistencia total de todos los resistores conectados en paralelo a R_x.)

Ahora, es fácil encontrar el valor de R_x. Realicemos las tres siguientes mediciones.

1. Cortocircuitamos los puntos E y D y conectamos el ohmímetro entre los puntos A y D. El circuito equivalente se aduce en la fig. 2.3a. La indicación r_1 del ohmímetro está ligada con R_1 y R_2 mediante la relación

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{r_1}. \qquad (1)$$

2. Cortocircuitamos los puntos A y E en la fig. 2.2. Como antes, el ohmímetro está conectado entre los puntos A y D. El circuito equivalente se representa en la fig. 2.3b. La indicación del ohmímetro r_2 está ligada con R_x y R_2 con la relación

$$\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{r_2}. \qquad (2)$$

3. Cortocircuitamos los puntos A y D. Conectamos el ohmímetro entre los puntos E y D (fig. 2.3c). En este caso, la indicación del ohmímetro r_3 se supedita a la relación

$$\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_1} = \frac{1}{r_3}. \qquad (3)$$

Sumando, término por término, las ecuaciones (2) y (3) y sustrayendo la ecuación (1), obtenemos

$$\frac{2}{R_x} = \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}. \blacktriangle$$

3. Resistencia de un circuito. Hallen la resistencia de un circuito compuesto por N eslabones (fig. 3.1). La resistencia de cada resistor es igual a R.

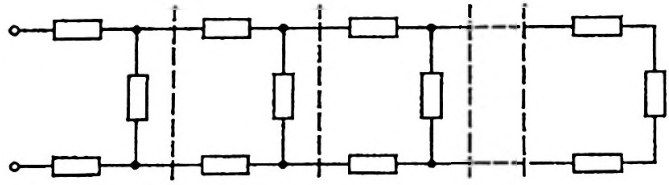


Fig. 3.1. Con líneas de trazos se muestran eslabones iguales aislados del circuito

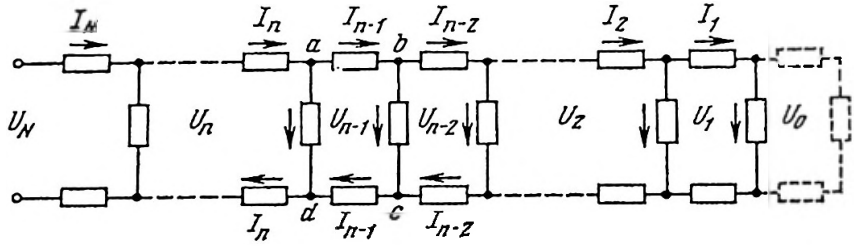


Fig. 3.2. Designación de las corrientes y tensiones de sectores aislados de un circuito de N eslabones

△ Las designaciones empleadas en la resolución se muestran en la fig. 3.2. Empleando varias veces la ley de Ohm para un sector del circuito es fácil obtener las relaciones

$$U_n = 2I_nR + U_{n-1}, \quad (1)$$

$$U_{n-1} = 2I_{n-1}R + U_{n-2}, \quad (2)$$

$$U_{n-1} = (I_n - I_{n-1})\,R. \quad (3)$$

Sustrayendo de (1) la ecuación (2) y haciendo uso de (3), obtenemos

$$U_n - 4U_{n-1} + U_{n-2} = 0. \quad (4)$$

Más adelante, igualando la tensión U_{n-1} en el sector ad a la suma de las tensiones en los sectores ab, bc y cd, tendremos

$$(I_n - I_{n-1})\,R = I_{n-1}R + (I_{n-1} - I_{n-2})\,R + I_{n-1}R,$$

de donde

$$I_n - 4I_{n-1} + I_{n-2} = 0. \tag{5}$$

La resistencia buscada R_N se determina por la relación $R_N = U_N/I_N$.

Las fórmulas obtenidas (4) y (5) llevan el nombre de relaciones recurrentes, ya que ellas dan la posibilidad de hallar la corriente y la tensión para el n-ésimo eslabón del circuito, si dichas magnitudes son conocidas para los dos eslabones anteriores. Tomemos como la unidad la corriente I_1 en el primer eslabón del circuito: $I_1 = 1$. Entonces, $U_1 = 3R$. Ahora, para el segundo eslabón, con ayuda del circuito en la fig. 3.2, es fácil hallar $I_2 = 4$, $U_2 = 11R$. A continuación, las corrientes y las tensiones en todos los siguientes eslabones se pueden hallar aplicando sucesivamente las relaciones recurrentes (4) y (5). ¿Podremos hallar una fórmula general que nos diera la posibilidad de escribir de inmediato la expresión para la tensión U_n y la corriente I_n en el eslabón n-ésimo? Resulta que sí. Para ello, hay que hallar tal función para el argumento n entero que satisfaga la ecuación (4) o bien (5).

Intentemos buscar la solución de la ecuación (4) en la forma $U_n = x^n$. Poniendo esta función en (4), obtenemos una ecuación cuadrática para x: $x^2 - 4x + 1 = 0$. Sus raíces $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$. Como la ecuación (4) es lineal, a ella satisface cualquier función del tipo

$$U_n = A_1 x_1^n + A_2 x_2^n = A_1 (2+\sqrt{3})^n + A_2 (2-\sqrt{3})^n, \tag{6}$$

donde A_1 y A_2 son constantes tomadas al azar. La solución (6) de la ecuación (4) contiene dos constantes, ya que dicha ecuación, como relación recurrente, determina el valor de U_n por los valores anteriores U_{n-1} y U_{n-2}.

Como la ecuación (5) tiene con exactitud la misma forma que (4), su solución es análoga a (6):

$$I_n = B_1 (2+\sqrt{3})^n + B_2 (2-\sqrt{3})^n. \tag{7}$$

¿De qué modo se puede hallar el valor de las constantes A y B en las expresiones (6) y (7)? Es evidente que las expresiones (6) y (7) deben proporcionar valores correctos para las tensiones y las corrientes, ya conocidas, en los eslabones primero y segundo. Para el primer eslabón ($n = 1$) $U_1 = 3R$, $I_1 = 1$, por ello

$$\begin{aligned} A_1 (2+\sqrt{3}) + A_2 (2-\sqrt{3}) &= 3R, \\ B_1 (2+\sqrt{3}) + B_2 (2-\sqrt{3}) &= 1 \end{aligned} \tag{8}$$

Por analogía, para el segundo eslabón ($n = 2$), donde $U_2 = 11R$, $I_2 = 4$, tenemos

$$\begin{aligned} A_1(2+\sqrt{3})^2 + A_2(2-\sqrt{3})^2 &= 11R, \\ B_1(2+\sqrt{3})^2 + B_2(2-\sqrt{3})^2 &= 4. \end{aligned} \tag{9}$$

De las expresiones (8) y (9) se determinan los valores de las constantes A_1, A_2, B_1, B_2:

$$\begin{aligned} A_1 &= R\,\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}, \quad A_2 = R\,\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}; \\ B_1 &= \frac{1}{2\sqrt{3}}, \qquad B_2 = -\frac{1}{2\sqrt{3}}. \end{aligned} \tag{10}$$

En lugar de emplear las ecuaciones (9) podemos introducir, formalmente, el eslabón «nulo» y con ayuda de las relaciones recurrentes (4) y (5) hallar $U_0 = R$, $I_0 = 0$.

Si examinamos el circuito en la fig. 3.2 nos cercioramos de que dichas magnitudes tienen sentido físico: U_0 y I_0 son en esencia la tensión y la corriente para el eslabón «nulo» que no existe. Entonces, para simplificar el álgebra al buscar las constantes A y B, en lugar de (9) podemos emplear las correspondientes relaciones para el eslabón nulo:

$$A_1 + A_2 = R, \qquad B_1 + B_2 = 0.$$

Así pues, para la resistencia de un circuito de N eslabones, teniendo en cuenta la fórmula (10), obtenemos

$$R_N = \frac{U_N}{I_N} = R\,\frac{(\sqrt{3}+1)(2+\sqrt{3})^N + (\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{3})^N}{(2+\sqrt{3})^N - (2-\sqrt{3})^N}. \tag{11}$$

Con ayuda de esta fórmula es fácil hallar la resistencia de un circuito con infinidad de eslabones. Con este fin, hay que realizar el paso al límite $N \to \infty$. Esto se realiza de la forma más sencilla dividiendo, término por término, el numerador y denominador entre $(2+\sqrt{3})^N$. Los segundos sumandos en el numerador y denominador contendrán, después de esto, el factor

$$\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^N,$$

que tiende a cero cuando $N \to \infty$. Como resultado, para la resistencia R_∞ de un circuito infinito, tenemos

$$R_\infty = R(\sqrt{3}+1). \tag{12}$$

La resistencia de un circuito infinito se puede calcular, asimismo, independientemente, con la particularidad de que esto es más fácil de hacer que hallar la resistencia de un circuito con número finito

de eslabones. La idea de semejante solución consiste en que la adición de un eslabón al principio de un circuito infinito no puede variar su resistencia. Pero en este caso, obtenemos de inmediato el circuito equivalente representado en la fig. 3.3, siendo con ello también igual a R_∞ la resistencia entre los puntos A y B. Por otro lado,

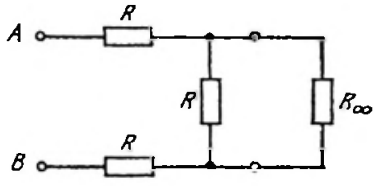


Fig. 3.3. Esquema equivalente para un circuito con número infinito de iguales eslabones

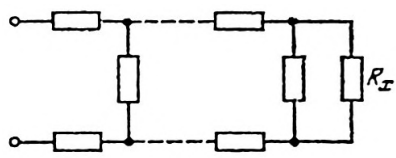


Fig. 3.4. ¿Qué resistencia R_x se debe conectar al fin del circuito para que su resistencia no dependa del número de eslabones?

la resistencia entre esos puntos se expresa fácilmente mediante los valores de las resistencias que entran en el circuito mostrado en la fig. 3.3. De resultas, obtenemos

$$R_\infty = 2R + \frac{RR_\infty}{R+R_\infty}. \qquad (12)$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática con relación a la resistencia R_∞ que buscamos, de nuevo hallamos el valor dado con la fórmula (12). La segunda raíz de la ecuación (13) es negativa y no tiene sentido físico.

Ahora, aclaremos una cuestión más. ¿Qué resistencia R_x hay que conectar al extremo de un circuito, con número finito de eslabones (fig. 3.4), para que la resistencia del circuito obtenido no dependa del número de eslabones? De hecho, la respuesta a esta pregunta es ya conocida: al extremo del circuito hay que conectar una resistencia R_x igual a R_∞. En efecto, en este caso todo el circuito obtenido será equivalente al circuito infinito, cuya resistencia, como ya hemos aclarado, es igual a $R_\infty = R\,(\sqrt{3}+1)$. Con otras palabras, la conexión de R_∞ al extremo del circuito es equivalente a la adición de un número finito de eslabones al principio del circuito infinito. ▲

4. ¿Por qué cambia la indicación del amperímetro? Todos sabemos a la perfección que si variamos la resistencia conectada al circuito (p.ej., si desplazamos el cursor del reóstato), varía la corriente en el circuito. Sin embargo, al variar R_1 en el circuito de la fig. 4.1, la indicación del amperímetro no cambia. ¿Qué significa esto? ¿A qué condiciones esto es posible?

△ Por el momento no vamos a escribir fórmula alguna. A la pregunta planteada se puede responder si examinamos con atención el

circuito. Si por la batería $\mathscr{E}_2$ no pasa corriente, la variación de la resistencia R_1 no puede influir sobre nada, incluso sobre las indicaciones del amperímetro. Al no haber corriente por R_1 y $\mathscr{E}_2$, la batería $\mathscr{E}_1$, el amperímetro y la resistencia R forman, de hecho, un circuito en serie no ramificado. Así pues, queda por aclarar a que condición no hay corriente en la ramificación que contiene $\mathscr{E}_2$ y R_1. Aplicando a este sector la ley de Ohm para un sector no homogéneo del circuito, con facilidad nos cercioramos de que la corriente es nula cuando la tensión en R es igual a la fem de la batería $\mathscr{E}_2$ ($U = \mathscr{E}_2$). Ya que, en este caso, tenemos

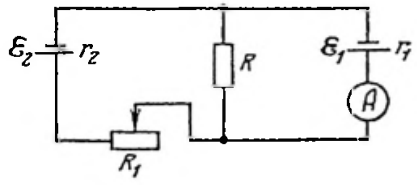


Fig. 4.1. Al cambiar la resistencia R_1 la indicación del amperímetro no varía

$$U = IR = \frac{\mathscr{E}_1}{R+r_1}R,$$

la condición buscada será

$$\mathscr{E}_2 = \mathscr{E}_1 \frac{R}{R+r_1}. \qquad (1)$$

Esta condición se cumple cuando $\mathscr{E}_2 < \mathscr{E}_1$. Señalemos que, entonces, R_1 puede variar dentro de los límites desde cero hasta el infinito. No obstante, (1) no es la única condición posible. P. ej., si $r_2 \gg R$ y $r_2 \gg r_1$, la corriente en la ramificación que contiene $\mathscr{E}_2$ y R_1 es pequeña en comparación con la corriente que pasa por el amperímetro con cualquier valor de R_1 y, por ello, no influye, prácticamente, sobre las indicaciones del amperímetro. Son también posibles otras condiciones. ¡Intenten encontrarlas por su cuenta! ▲

5. Un circuito más con reóstato. El circuito montado se muestra en la fig. 5.1. ¿A qué condiciones no influye sobre las indicaciones del amperímetro la variación de la resistencia R_1? R_1 varía dentro de cualesquiera márgenes.

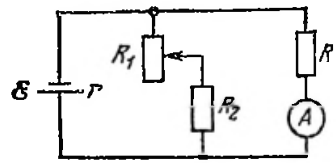


Fig. 5.1 ¿Puede no variar la indicación del amperímetro al cambiar la resistencia R_1?

△ A primera vista parece que esto es imposible, ya que R_1+R_2 y R están unidas en paralelo y el cambio de R_1 conduce, obligatoriamente, a la variación de la corriente que pasa por el amperímetro. Pero esto sólo parece a primera vista. Son posibles casos cuando esto no es así. Primero, si $R_2 \gg R$, con cualquier R_1 la ramificación de la corriente al sector que contiene R_1 y R_2 se puede despreciar en comparación con la corriente por el amperímetro. Si la resistencia R y la resistencia interior del amperímetro son iguales a cero, toda la corriente, sin ramificarse, pasa por el amperímetro y su valor no depende de R_1. Segundo, un caso aún más interesante: si la resistencia interna de la batería $r = 0$, los sectores del circuito que contienen

el reóstato R_1 y el amperímetro no pueden influenciar, de ningún modo, uno sobre otro. Este caso corresponde a la conexión en paralelo de cargas a la red con tensión continua. En la práctica, la igualdad a cero de la resistencia interna de la fuente quiere decir que ella debe ser pequeña en comparación con la resistencia de cada una de las ramificaciones paralelas. ▲

6. Fuente de corriente continua. Una fuente de corriente tiene fem $\mathscr{E}$ y resistencia interna r. Investiguen las condiciones de trabajo de semejante fuente: hallen la dependencia entre la tensión U en la carga, la potencia total P, la potencia útil $P_{út}$, el rendimiento η y la corriente I creada por la fuente.

△ El circuito eléctrico que contiene una fuente de corriente y una carga, cuya resistencia R podemos variar, se muestra en la fig. 6.1. La corriente I en el circuito se determina con la ley de Ohm

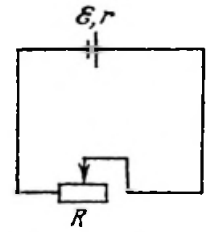


Fig. 6.1. Las condiciones de trabajo de la fuente de corriente se determinan con la resistencia de la carga R

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R+r}. \qquad (1)$$

Al variar la resistencia de la carga R desde la infinidad (circuito abierto) hasta cero (cortocircuito en la fuente), la intensidad de la corriente varía desde cero hasta el valor máximo I_0, igual a $\mathscr{E}/r$. La tensión en las bornas de la fuente U, igual a la fem $\mathscr{E}$ estando el circuito abierto, al haber corriente I en el circuito se determina con la expresión

$$U = \mathscr{E} - Ir. \qquad (2)$$

Si en el segundo miembro sacamos la fem $\mathscr{E}$ del paréntesis y, tomamos en consideración que la razón $\mathscr{E}/r$ es igual a la corriente de cortocircuito I_0, la fórmula (2) toma la forma

$$U = \mathscr{E}\,(1 - I/I_0). \qquad (3)$$

La dependencia entre la tensión en el circuito externo y la corriente se representa con una línea recta en la fig. 6.2.

La potencia total P, desarrollada por la fuente, es igual al producto de la fem $\mathscr{E}$ por la intensidad de la corriente I:

$$P = \mathscr{E}I. \qquad (4)$$

La potencia útil $P_{út}$ que se desprende en la carga es igual al producto de la tensión en el circuito externo U por la intensidad de la corriente I. Si para la tensión U hacemos uso de la fórmula (2), la potencia útil $P_{út}$ se obtiene como la diferencia entre la potencia total P y la potencia de las pérdidas térmicas debidas a la resistencia interna de

la fuente:

$$P_{út} = UI = \mathcal{E}I - I^2/r. \tag{5}$$

Pero si para U empleamos la fórmula (3), la expresión para la potencia útil $P_{út}$ se puede escribir en la forma:

$$P_{út} = \mathcal{E}I\,(1 - I/I_0). \tag{6}$$

Como se deduce de la fórmula (4), la potencia total P que desarrolla la fuente es proporcional a la corriente en el circuito I. Su gráfica se representa con una línea recta en la fig. 6.2. Como se deduce de la fórmula (5) ó (6), la gráfica de la potencia útil $P_{út}$ es una parábola, cuyas ramas están dirigidas hacia abajo (fig. 6.2). Esta parábola corta el eje de abscisas en los puntos $I = 0$ e $I = I_0$: la potencia útil se anula tanto al no haber corriente (circuito abierto), como, asimismo, al haber cortocircuito, cuando toda la potencia P que desarrolla la fuente se desprende en forma de calor en su resistencia interna. El vértice de la parábola, correspondiente a la potencia útil máxima, se encuentra en el centro entre los puntos $I = 0$ e $I = I_0$. El valor máximo de la potencia útil, alcanzado con $I = I_0/2$, como se desprende de la fórmula (6), es igual a $\mathcal{E}I/2$, es decir, a la mitad de la potencia total desarrollada por la fuente con la intensidad de corriente dada. Con esto, la segunda mitad de la potencia desarrollada se gasta inútilmente, para el calentamiento de la fuente. Es fácil advertir (p. ej., en la fórmula (1)), que la potencia útil es la máxima cuando la resistencia de la carga R es igual a la resistencia interna de la fuente.

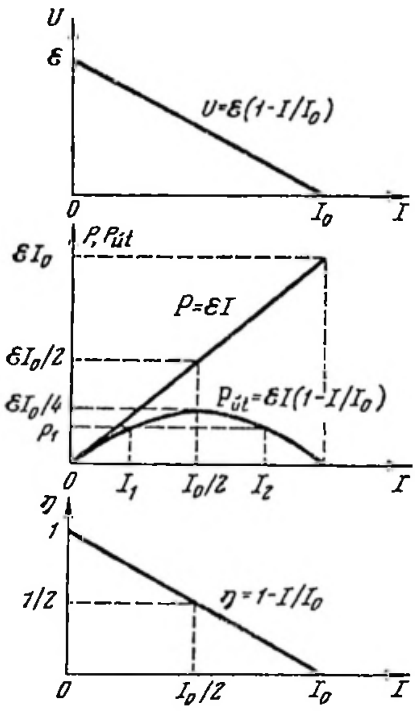


Fig. 6.2. Dependencia entre la tensión U, las potencias total P y útil $P_{út}$, el rendimiento η y la corriente en el circuito

El rendimiento de la fuente, igual a la razón entre la potencia útil $P_{út}$ y la total P, se puede calcular por medio de las fórmulas (4) y (6):

$$\eta = P_{út}/P = 1 - I/I_0. \tag{7}$$

La gráfica de la dependencia del rendimiento η respecto de la corriente en el circuito I se muestra en la fig. 6.2.

De las gráficas de la fig. 6.2 se deduce que las exigencias de obtención de la mayor potencia útil y el máximo rendimiento se contradicen entre sí: al lograr la mayor potencia útil, el rendimiento sólo constituye el 50%. Con el fin de que el rendimiento sea próximo a la unidad, la corriente en el circuito debe ser pequeña, pero, entonces, tiende a cero la potencia útil.

Cualquier potencia útil P_1, menor que la máxima, puede obtenerse con dos valores de la corriente en el circuito: I_1 e I_2. En la fig. 6.2 vemos que es preferible obtener dicha potencia con menor valor de la corriente en el circuito I, ya que, con ello, el rendimiento de la fuente es más alto. ▲

7. Conexión en serie de las fuentes de corriente. En el circuito montado, cuyo esquema se ofrece en la fig. 7.1, la fem $\mathscr{E}_1$ de la primera fuente es mayor que la fem $\mathscr{E}_2$ de la segunda. El voltímetro es

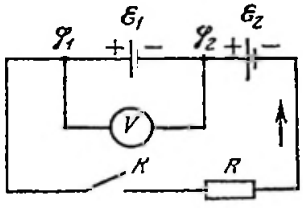


Fig. 7.1. Con la llave K cerrada la aguja del voltímetro puede desviarse tanto hacia uno como hacia otro lado, en función de los valores de la fem y las resistencias

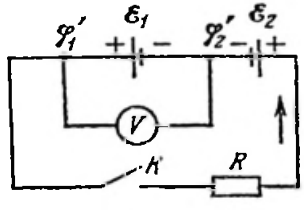


Fig. 7.2. En este circuito la fuente de fem $\mathscr{E}_2$ está conmutada a la polaridad inversa en comparación con la fig. 7.1

perfecto, además su cero se encuentra en el centro de la escala. Con la llave abierta la aguja del voltímetro se desvía a la izquierda. Para unos valores de los parámetros del circuito, después de cerrar la llave, la aguja se desvía a la izquierda, para otros, a la derecha. El valor absoluto de la tensión, que muestra el voltímetro, es conocido e igual en ambos casos. ¿Qué es lo que mostrará el voltímetro y hacia dónde se desviará su aguja en cada uno de estos casos, si la segunda fuente se conmuta como se muestra en la fig. 7.2?

△ El voltímetro perfecto, conectado al circuito eléctrico, muestra una tensión igual a la diferencia de potencial entre los puntos de conexión del instrumento. Designemos los potenciales de dichos puntos en el primer esquema φ_1 y φ_2, en el segundo, φ_1' y φ_2'. Para reducir la anotación introducimos $U = \varphi_2 - \varphi_1$ y $U' = \varphi_2' - \varphi_1'$. La corriente en el esquema de la fig. 7.1 se da con la fórmula

$$I = \frac{\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2}{r_1 + r_2 + R}. \qquad (1)$$

Por otro lado, empleando la ley de Ohm para un sector no homogéneo del circuito que contiene la fem $\mathscr{E}_1$, para esa misma corriente I se puede escribir la expresión

$$I = \frac{\varphi_2 - \varphi_1 + \mathscr{E}_1}{r_1} = \frac{U + \mathscr{E}_1}{r_1}. \tag{2}$$

Igualemos los segundos miembros de las expresiones (1) y (2):

$$\frac{\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2}{r_1 + r_2 + R} = \frac{U + \mathscr{E}_1}{r_1}. \tag{3}$$

De modo análogo en absoluto, para el esquema en la fig. 7.2, obtenemos

$$\frac{\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2}{r_1 + r_2 + R} = \frac{U' + \mathscr{E}_1}{r_1}. \tag{4}$$

Dividiendo, término por término, (3) entre (4), obtenemos

$$\frac{\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2}{\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2} = \frac{U + \mathscr{E}_1}{U' + \mathscr{E}_1}, \tag{5}$$

de donde

$$U' = \frac{(\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2)\, U - 2\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2}{\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2}. \tag{6}$$

De modo formal hemos obtenido la solución. Al obtenerla no hemos utilizado de ninguna manera la indicación acerca de hacia qué lado se desvía la aguja del voltímetro y, hasta el momento, no está claro cómo hacer uso de este resultado en cada caso concreto: no sabemos qué signo asignar a la tensión U en cada uno de los casos analizados.

Si la llave está abierta, cuando falta la corriente en el circuito de la fig. 7.1 el potencial φ_1 es mayor que φ_2, es decir, $U = \varphi_2 - \varphi_1 < 0$. Según el planteamiento del problema, en tal caso la aguja del voltímetro se desvía a la izquierda. De esta manera se establece la ligazón entre la dirección de la desviación de la aguja del voltímetro y el signo de la tensión U: al desviarse la aguja del instrumento a la izquierda $U < 0$ y al hacerlo a la derecha, $U > 0$. Por esta causa, en el primer caso, al inclinarse la aguja a la izquierda, en la fórmula (6), se pone el valor negativo de la tensión U, que muestra el voltímetro, mientras que en el segundo caso (la aguja se desvía a la derecha), el positivo. De esta misma forma se establece la dirección de la aguja del voltímetro en el circuito de la fig. 7.2: si el valor de U', calculado con la fórmula (6), es negativo la aguja del voltímetro se desviará a la izquierda, si es positivo, a la derecha.

Vemos con facilidad que en el esquema en la fig. 7.2 la aguja del voltímetro siempre se desviará en la misma dirección que al estar abierta la llave, independientemente de la dirección a la que se desviará en el circuito de la fig. 7.1. En efecto, como $\mathscr{E}_1 > \mathscr{E}_2$, la dirección de la corriente en el circuito en la fig. 7.1 viene definida por

la fuente $\mathscr{E}_1$ y $\varphi_1' > \varphi_2'$, es decir, $U' < 0$. Esto se desprende en directo de la fórmula (6). En el caso $U < 0$ este hecho es evidente, cuando $U > 0$ se requiere una investigación más detallada. Les proponemos que realicen esto independientemente, pero antes lean la solución del problema hasta el fin.

Ahora, reflexionemos qué significan, desde el punto de vista físico, diversas direcciones de desviación de la aguja del voltímetro en el esquema de la fig. 7.1. Estudiemos la fórmula (2). Como acabamos de aclarar, la tensión U que en ella entra es negativa si la desviación de la aguja del voltímetro se produce en el mismo sentido que cuando la llave está abierta y en el circuito no hay corriente. En este caso, como se desprende de (2), la corriente en el circuito es menor que la de cortocircuito para la fuente $\mathscr{E}_1$: $I < I_0 = \mathscr{E}_1/r_1$. Esto significa que la fuente funciona normalmente, desprendiendo potencia no sólo en su resistencia interna r_1, sino también en el circuito externo de la carga R.

Si, al cerrar la llave, la desviación de la aguja del voltímetro se realiza en sentido opuesto, $U > 0$ y de (2) se deduce que la corriente en el circuito es mayor que la de cortocircuito de la fuente I_0. Esto quiere decir que la fuente $\mathscr{E}_1$ funciona «no normalmente»: la potencia que se desprende en su resistencia interna supera sus posibilidades, es decir, la potencia máxima que la fuente puede desarrollar. Por esta razón, si retiramos esta fuente en el circuito la corriente aumentará.

¡Si reflexionamos no se deben conectar en serie las fuentes de corriente! En ocasiones, esto puede conducir al resultado opuesto al deseado. A pesar de que con la conexión en serie de las fuentes de corriente la fem de la batería siempre aumenta, la intensidad de corriente en el circuito puede disminuir si, con ello, crece demasiado la resistencia interna de la batería. Antes de añadir a una batería en serie una fuente más de corriente, hay que cerciorarse de que su corriente de cortocircuito supera la intensidad de corriente en el circuito antes de conectar la indicada fuente.

¿Pero cómo revelar en la práctica semejante fuente «parásita» en un circuito alimentado por una batería de elementos conectados en serie?

Y para acabar. Si realizan el análisis de la fórmula (6) es suficiente comprender que con el valor positivo de la tensión U ella no puede superar $\mathscr{E}_2$. De aquí sigue de inmediato que $U' < 0$, es decir, en este caso la aguja del voltímetro también se desviará a la izquierda. ▲

8. Conexión en paralelo de las fuentes de corriente. Dos fuentes de corriente con fem $\mathscr{E}_1$ y $\mathscr{E}_2$ y resistencia interna r_1 y r_2, acopladas en paralelo, están en conexión con una carga, cuya resistencia R se puede variar (fig. 8.1). La fem de la primera fuente $\mathscr{E}_1$ es mayor que la de la segunda: $\mathscr{E}_1 > \mathscr{E}_2$. Resulta que con cierto valor de la resistencia R en el amperímetro no hay corriente. ¿En qué dirección

circulará la corriente por la segunda fuente si la resistencia de la carga R: se aumenta; se disminuye?

△ El procedimiento más directo, pero no el más sencillo, para resolver este problema consiste en aplicar las reglas de Kirchhoff al circuito ramificado que consideramos. Designemos las corrientes en los sectores no ramificados del circuito por I_1, I_2 y prefijemos sus direcciones como se indica en la fig. 8.2.

De acuerdo con la primera regla de Kirchhoff, que expresa la ley de la conservación de la carga, la suma algebraica de las corrientes en el nodo es igual a cero:

$$I_1 + I_2 - I = 0. \tag{1}$$

En correspondencia con la segunda regla de Kirchhoff, que sigue de la ley de Ohm para un sector no homogéneo del circuito, en cualquier circuito cerrado la suma algebraica de los productos de las corrientes

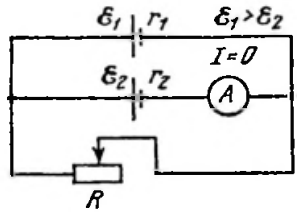


Fig. 8.1. La resistencia R está elegida de tal modo que la corriente que pasa por el amperímetro es nula

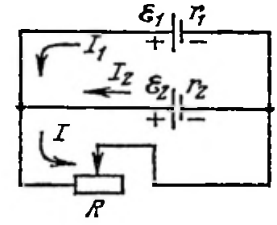


Fig. 8.2. Para el cálculo de las corrientes en el circuito según las reglas de Kirchhoff

por la resistencia de los respectivos sectores es igual a la suma algebraica de las fem con las que se tropieza al recorrer dicho circuito. Eligiendo los circuitos que contienen una de las fuentes de corriente y la resistencia de la carga, obtenemos

$$I_1 r_1 + IR = \mathcal{E}_1, \quad I_2 r_2 + IR = \mathcal{E}_2. \tag{2}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (1) y (2), podemos hallar las corrientes en todos los sectores. Para responder a las preguntas planteadas es suficiente tener la expresión para la corriente I_2 que pasa por la segunda fuente:

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_2 (r_1 + R) - \mathcal{E}_1 R}{R (r_1 + r_2) + r_1 r_2}. \tag{3}$$

La corriente dejará de pasar por el amperímetro cuando el numerador de la expresión (3) se anule. Partiendo de esta condición hallamos aquel valor de la resistencia de la carga R para el que la indicación del amperímetro es igual a cero:

$$R = r_1 \frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}. \tag{4}$$

La corriente I_2 que pasa por la segunda fuente irá, en realidad, en la dirección indicada en la fig. 8.2, si el numerador en la expresión (3) es positivo, es decir, al verificarse la condición

$$R < r_1 \frac{\mathscr{E}_2}{\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2}. \qquad (5)$$

Si la resistencia de la carga R satisface la desigualdad opuesta, el numerador de (3) es negativo y la corriente I_2, que pasa por la segunda fuente, se dirige, en realidad, en sentido inverso. Así pues, al disminuir la resistencia R con relación al valor de (4), la corriente que pasa por la segunda fuente irá como se muestra en la fig. 8.2, mientras que al aumentarla, en sentido contrario.

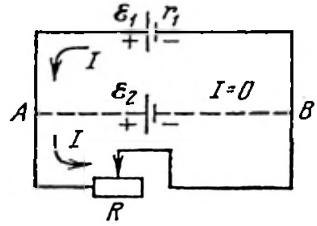


Fig. 8.3. Si la corriente por la segunda fuente es nula, al desconectarla la corriente por la parte restante del circuito no varía

Prestemos atención a que el procedimiento formal, aplicado para resolver el problema con ayuda de las reglas de Kirchhoff, permite obtener un resultado cierto sin adentrarse en el sentido físico del resultado hallado. En efecto, hasta el momento no podemos dar respuesta a la pregunta de por qué el aumento de la resistencia de la carga conduce al surgimiento de la corriente I_2 en la indicada dirección, precisamente. La tentativa de responder a esta pregunta nos conducirá a otro procedimiento menos formal para resolver el problema. Ante todo cabe advertir que cuando a través de la segunda fuente no circula corriente, ésta existe tan sólo en el circuito no ramificado que contiene la fem $\mathscr{E}_1$ y la resistencia de la carga R (fig. 8.3). Con ello, la segunda fuente se puede desconectar, y en el circuito restante nada variará. La intensidad de la corriente I se puede hallar partiendo de la ley de Ohm para un circuito no ramificado:

$$I = \frac{\mathscr{E}_1}{R + r_1}. \qquad (6)$$

Por otro lado, al no circular la corriente por la segunda fuente la tensión U en sus bornas es igual a la fem $\mathscr{E}_2$ de dicha fuente. Por ello, haciendo uso de la ley de Ohm para el sector homogéneo del circuito que contiene la carga R, tendremos

$$I = U/R = \mathscr{E}_2/R. \qquad (7)$$

Igualando los segundos miembros de las fórmulas (6) y (7), obtenemos para la resistencia de la carga R, con la que la corriente deja de pasar por la fuente con la fem $\mathscr{E}_2$, la expresión anterior (4). Ella sólo tiene sentido si $\mathscr{E}_1 > \mathscr{E}_2$, lo que es natural ya que la tensión U

en las bornas de la primera fuente en funcionamiento siempre es menor que su fem $\mathscr{E}_1$.

Ahora, consideremos cómo variará la tensión entre los puntos A y B al cambiar la resistencia R si la segunda fuente falta. Al disminuir R la corriente en el circuito crece y, por lo tanto, la tensión en las bornas de la fuente con fem $\mathscr{E}_1$ (es decir, entre los puntos A y B) disminuirá. Esta tensión se hace menor que la fem $\mathscr{E}_2$, por ello, al conectar la segunda fuente la corriente pasará por ella como se muestra en la fig. 8.2. En tal caso, la segunda fuente funcionará normalmente, es decir, dirigirá la energía al circuito externo y esta energía se desprenderá en la carga.

Con ayuda de razonamientos análogos podemos cerciorarnos de que, al aumentar la resistencia de la carga, la tensión entre los puntos A y B crece, o sea, se hace mayor que $\mathscr{E}_2$. Por ello, al conectar la segunda fuente la corriente pasará por ella en dirección opuesta a la mostrada en la fig. 8.2. En semejante caso, la segunda fuente no cede energía al circuito externo y ella consume la energía de la primera fuente.

Así pues, en caso de conexión en paralelo de las fuentes de corriente con diferentes fem existe un valor límite de la resistencia de la carga, el valor determinado por la fórmula (4). Si la mencionada resistencia es mayor que la límite, el empleo de la segunda fuente no es conveniente: su conexión conduce a la disminución de la corriente que pasa por la carga. ▲

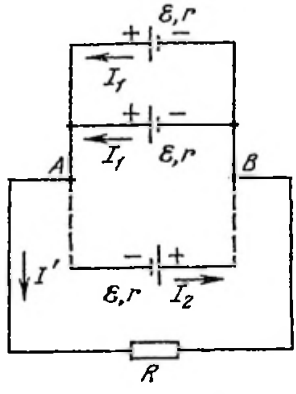


Fig. 9.1. Batería de iguales elementos

9. Batería de elementos iguales. Cierto número n de iguales fuentes de corriente, con fem $\mathscr{E}$ y resistencia interna r, están unidas en paralelo y conectadas a la carga externa. ¿Cuántas veces disminuirá la corriente en la carga si uno de los elementos que forman la batería se conecta por error con la polaridad inversa (fig. 9.1)?

△ Cuando todas las fuentes de corriente están conectadas correctamente la fem de la batería es igual a la fem de uno de los elementos $\mathscr{E}$, en tanto que la resistencia interna es igual a r/n. Por ello, la corriente que pasa por la carga con resistencia R se determina con la expresión

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R + r/n}. \qquad (1)$$

Este resultado se obtiene de inmediato si tomamos en consideración la simetría del esquema que examinamos: todas las fuentes de co-

rriente se hallan en las mismas condiciones, por lo tanto, las corrientes en ellas son iguales y n veces menores que la corriente en la carga. Pero si se conmuta la polaridad de una de las fuentes (fig. 9.1), la simetría desaparece y, hablando en general, surge la necesidad de aplicar las reglas de cálculo de los circuitos ramificados. Sin embargo, en el caso que examinamos es posible no operar según recetas estándar, sino que simplemente expresar la tensión U_{AB} entre los puntos A y B (fig. 9.1) como la diferencia entre la fem de la fuente de corriente y la tensión dentro de ella para los elementos conectados «correcta» e «incorrectamente»:

$$\mathscr{E} - I_1 r = -[\mathscr{E} - I_2 r]. \tag{2}$$

La corriente I' que se ramifica a la carga es igual a la suma de las corrientes en los elementos conectados «correctamente» $(n - 1) I_1$ descontando la corriente I_2 que pasa por el elemento conectado «incorrectamente»:

$$I' = (n - 1) I_1 - I_2. \tag{3}$$

Expresando de aquí I_2 y poniéndola en (2), llegamos a la igualdad

$$I_1 nr - I'r = 2\mathscr{E}. \tag{4}$$

Por otro lado, la tensión entre los puntos A y B es la de la carga R, por lo que

$$\mathscr{E} - I_1 r = I'R. \tag{5}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (4) y (5), obtenemos

$$I' = \frac{\mathscr{E}}{R + r/n}(1 - 2/n). \tag{6}$$

Comparando (6) y (1), hallamos

$$I'/I = 1 - 2/n. \tag{7}$$

En particular, para $n = 2$ la corriente $I' = 0$, lo que es evidente partiendo de consideraciones elementales; para $n = 4$ la corriente en la carga se reduce a la mitad.

Es notable que el resultado (7) obtenido no depende ni de la fem de elementos por separado y de sus resistencias internas, ni de la resistencia de la carga. Esto induce la idea de que debe existir otro procedimiento más sencillo de resolución del problema.

Ante todo señalemos que al conmutar la polaridad de uno de los elementos la resistencia interna de toda la batería sigue siendo la misma y que sólo puede variar su fem. Claro está, estas consideraciones cualitativas se certifican con la fórmula (6), de la que se desprende de inmediato el valor de la fem de la batería que se obtuvo: $\mathscr{E}' = \mathscr{E}(1 - 2/n)$. Ahora, el problema consiste en que, independientemente de la solución aducida, debemos hallar la fem de la batería con un elemento conectado incorrectamente.

Sustituyamos todos $n - 1$ elementos conectados «correctamente» por uno solo con fem $\mathscr{E}$ y resistencia interna $r/(n - 1)$. Entonces, el circuito equivalente de toda la batería toma la forma mostrada en la fig. 9.2. Como la fem de la batería es igual a la tensión en los polos A y B abiertos, sólo nos queda hallar la tensión entre los puntos A y B en el circuito de la fig. 9.2. Esta tensión se puede anotar en la forma

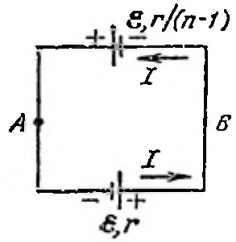


Fig. 9.2. Circuito equivalente de la batería de n elementos mostrada en la fig. 9.1

$$\mathscr{E}' = U_{AB} = \mathscr{E} - Ir/(n - 1), \quad (8)$$

donde la corriente I, circulante por el circuito representado en la fig. 9.2, es igual a

$$I = \frac{2\mathscr{E}}{r + r/(n-1)}. \quad (9)$$

Poniendo I de (9) en (8), obtenemos

$$\mathscr{E}' = \mathscr{E}(1 - 2/n). \quad (10)$$

Como al conmutar la polaridad de uno de los elementos, la resistencia total del circuito con la carga no varía, la corriente en ella variará tantas veces, como las que varió la fem. Es natural que, asimismo, el segundo procedimiento conduce al mismo resultado. ▲

10. Electromotor de corriente continua. Un electromotor, cuyo inducido tiene una resistencia R, está conectado a la red de corriente continua de tensión U. Con ello, una pesa de masa m asciende a la velocidad $v\uparrow$ mediante un hilo imponderable enrollado en el árbol del motor. ¿A qué velocidad $v\downarrow$ descenderá esa misma pesa si en el circuito externo se produce un cortocircuito de resultas del cual el arrollamiento del inducido se cortocircuita? El inducido del electromotor se encuentra en el campo magnético creado por un imán permanente. El rozamiento en los rodamientos se desprecia.

△ Ante todo, reflexionemos cuál es la causa de que se establezca cierta determinada velocidad de descenso. La cosa radica, en que si, simplemente, desconectamos el motor de la red, al no haber rozamiento en los rodamientos, la pesa pondrá en rotación el inducido y bajará en movimiento uniformemente variado. Claro está que la aceleración será menor que la de la caída libre si el inducido del motor tiene notorio momento de inercia. Como vemos, aquí el motor nada tiene que ver, su inducido es simplemente un volante que se pone en rotación por la pesa en descenso. No obstante, en el caso que consideramos en el problema, el circuito eléctrico está cerrado, pero de tal forma que al motor no se alimenta la tensión y, como resultado, al bajar la pesa, trabaja como un generador de corriente continua cortocircuitado. Durante la rotación del inducido en el campo magnético por su arrollamiento pasa la corriente. La velocidad de descenso de

la pesa aumentará ahora sólo hasta que el momento mecánico, que actúa sobre el inducido del motor por parte de la pesa, quede compensado por el momento de fuerza que actúa sobre el inducido con corriente por parte del campo magnético del inductor.

En vista de que el momento de las fuerzas mecánicas, que actúan sobre el inducido, es el mismo tanto con el ascenso uniforme, como también con el descenso uniforme (la pesa es la misma), mientras que el campo magnético del inductor se considera continuo (según el planteamiento él se crea con un imán permanente), resulta que la corriente en el circuito del inducido será igual para el ascenso y descenso estacionarios, ya que la fuerza que actúa sobre un conductor con corriente en el campo magnético es proporcional a la corriente. Para el movimiento estacionario designamos con I la corriente en el inducido. Ésta se puede hallar haciendo uso de la ley de la conservación de la energía durante el ascenso de la pesa: la potencia IU que se consume de la red va para calentar el arrollamiento del inducido y para elevar la pesa. Designando con P_m la potencia mecánica desarrollada por el motor, podemos escribir

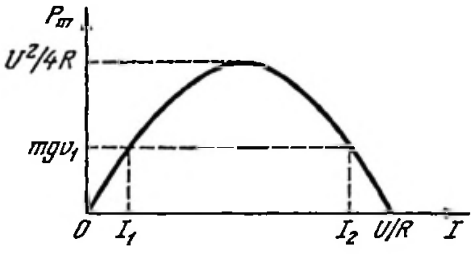


Fig. 10.1. Dependencia entre la potencia mecánica desarrollada por el electromotor y la magnitud de la corriente

$$IU = I^2R + P_m. \tag{1}$$

Al resolver esta ecuación, hallamos

$$I = \frac{U}{2R} \pm \sqrt{\frac{U^2}{4R^2} - \frac{P_m}{R}}. \tag{2}$$

¿Por qué se han obtenido dos valores de la corriente? En el planteamiento del problema se prefijaron la masa de la pesa y la velocidad de ascenso, es decir, de hecho se ha prefijado la potencia mecánica desarrollada por el motor:

$$P_m = mgv\uparrow. \tag{3}$$

Pero una misma potencia mecánica, menor que la máxima que puede desarrollar el motor con la tensión U prefijada, se puede obtener con dos valores de la corriente en el inducido. En efecto, con ayuda de la fórmula (1) construyamos la gráfica de la dependencia entre la potencia mecánica P_m y la intensidad de corriente en el inducido del motor (fig. 10.1). Esta gráfica es una parábola, cuyas ramas están dirigidas hacia abajo y cortan el eje de abscisas en los puntos $I = 0$ e $I = U/R$. El primer punto corresponde al régimen de la marcha en vacío, es decir, a la rotación del inducido del motor sin carga mecá-

nica externa. Con ello, la fem de inducción en el arrollamiento del inducido compensa la tensión U aplicada y, por ello, no hay corriente. El segundo punto ($I = U/R$) corresponde al inducido que no gira, frenado con un esfuerzo externo, cuando la fem de inducción falta en su arrollamiento. Con ello, evidentemente, la potencia mecánica del motor es igual a cero y toda la potencia de la red se consume para el calentamiento del arrollamiento del inducido. El vértice de la parábola corresponde a la potencia mecánica máxima del motor que, como es fácil cerciorarse, es igual a $U^2/4R$.

De la fig. 10.1 se desprende que cualquier valor de la potencia mecánica $P_m = mgv\uparrow$, menor que $U^2/4R$, se puede obtener con dos valores de la corriente I_1 e I_2. A cada uno de estos valores de la co-

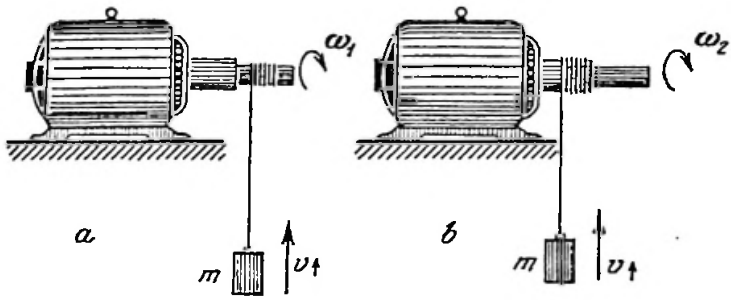


Fig. 10.2. Una misma potencia mecánica $P_m = mgv\uparrow$ puede ser obtenida con dos valores de la velocidad angular del inducido

rriente corresponde un determinado valor del momento de la fuerza externa que actúa sobre el inducido del motor. Como dicha fuerza es igual a la de la gravedad mg que actúa sobre la pesa que se eleva, a cada valor del momento mecánico corresponde un determinado radio del árbol sobre el que se enrolla el hilo (la fig. 10.2 *a* corresponde al valor menor del momento mecánico y, por lo tanto, a la corriente I_1, la fig. 10.2 *b*, a la corriente I_2). En el primer caso, la misma potencia mecánica del motor $mgv\uparrow$, se obtiene con menor radio y mayor velocidad angular de rotación del inducido que en el segundo caso. Es evidente que al primer caso corresponde un rendimiento más alto del motor. Hablando en rigor, a pesar de que los datos del problema son insuficientes para dar preferencia a uno u otro valor de la corriente, pero si suponemos que durante el ascenso de la pesa el motor funcionaba en el régimen «correcto», de las raíces I_1 o I_2 hay que elegir la menor.

Como hemos aclarado, esa misma corriente pasará, asimismo, por el arrollamiento del inducido en el transcurso del descenso estacionario de la pesa. Empleemos la ley de la conservación de la energía. Como ahora el motor es de por sí un generador de corriente conti-

nua cortocircuitado, el decrecimiento de la energía potencial de la pesa es igual a la cantidad de calor desprendida en el arrollamiento del inducido:

$$mgv\downarrow = I^2R. \tag{4}$$

El valor de la velocidad estacionaria de descenso $v\downarrow$ se obtiene de aquí después de poner el valor de la intensidad de corriente I de la fórmula (2), en la que la potencia mecánica P_m, desarrollada por el motor al ascender la pesa, se pone de la relación (3):

$$v\downarrow = \frac{I^2R}{mg} = \frac{U^2}{4mgR}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{4mgRv\uparrow}{U^2}}\right]^2. \tag{5}$$

Es curioso señalar que la suma de las velocidades de ascenso y descenso es igual a la velocidad de la marcha en vacío v_0, es decir, a la velocidad de ascenso del hilo sin la pesa.

Con el fin de cerciorarse de esto, recordemos que la fem de inducción $\mathcal{E}_1$, que surge en el arrollamiento del inducido, es proporcional a la velocidad de rotación del inducido, o sea, a la velocidad v de movimiento del hilo enrollado en el árbol:

$$\mathcal{E}_1 = kv. \tag{6}$$

Empleando la expresión (6) escribamos las ecuaciones de la ley de Ohm para tres regímenes de trabajo del motor: al ascender la pesa, al descender ésta con el inducido cortocircuitado y para la marcha en vacío:

$$U - kv\uparrow = IR,\ kv\downarrow = IR,\ U - kv_0 = 0. \tag{7}$$

Sustrayendo las ecuaciones segunda y tercera de la primera, obtenemos

$$v\uparrow + v\downarrow = v_0. \blacktriangle \tag{8}$$

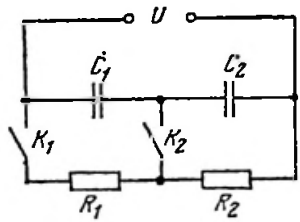


Fig. 11.1. Las tensiones en los condensadores C_1 y C_2 dependen de la posición de las llaves K_1 y K_2

11. Condensadores en un circuito con corriente. Examinemos el circuito representado en la fig. 11.1. A las bornas de entrada está aplicada la tensión continua U. Determinen las tensiones en los condensadores, considerando las cuatro posibles posiciones de las llaves K_1 y K_2: 1) las dos llaves están abiertas; 2) la llave K_1 está cerrada, la K_2, abierta; 3) las dos llaves están cerradas; 4) la llave K_1 está abierta, la K_2, cerrada.

△ Analicemos consecutivamente los cuatro casos.

1. Cuando ambas llaves están abiertas en ninguno de los sectores del circuito hay corriente. En este caso, el problema es puramente electrostático: dos condensadores unidos en serie están conectados a la fuente de tensión continua U. Por ello, las tensiones U_1 y U_2 en

los condensadores se determinan del sistema de ecuaciones

$$U_1 + U_2 = U, \quad C_1U_1 = C_2U_2. \tag{1}$$

La primera de estas ecuaciones es evidente, en tanto que la segunda refleja la igualdad de las cargas de los condensadores conectados en serie. Resolviendo el sistema (1), hallamos

$$U_1 = U\frac{C_2}{C_1+C_2}, \quad U_2 = U\frac{C_1}{C_1+C_2}. \tag{2}$$

2. En el segundo caso, cuando la llave K_1 está cerrada y la K_2, abierta, el circuito toma la forma mostrada en la fig. 11.2. En semejante circuito, por las resistencias R_1 y R_2 unidas en serie pasa la corriente, mientras que para los condensadores todo queda del mismo modo que en el primer caso, ya que la tensión U, según el planteamiento, es invariable. Con otras palabras, en semejante esquema los

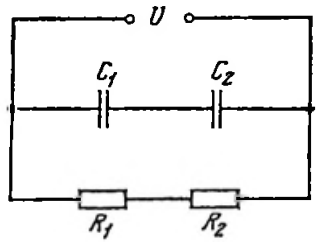


Fig. 11.2. Tal forma toma el circuito cuando la llave K_1 está cerrada y la K_2 abierta

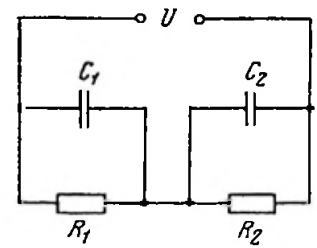


Fig. 11.3. Cuando ambas llaves están cerradas cada condensador está unido en paralelo con «su» resistencia

circuitos en serie de condensadores y resistencias están por separado conectados en paralelo entre sí a la red con tensión continua U.

Si la tensión U no se mantiene invariable y la fuente es, p.ej., un acumulador con fem $\mathscr{E}$ y resistencia interna r, la conexión del circuito de las resistencias R_1 y R_2 y la aparición de la corriente $I = \mathscr{E}/(R_1 + R_2 + r)$ conducen a la disminución de la tensión aplicada al circuito de los condensadores. En este caso, ella será igual no a la fem de la fuente, sino que a

$$U = I(R_1 + R_2) = \frac{\mathscr{E}(R_1+R_2)}{R_1+R_2+r}. \tag{3}$$

Las fórmulas (2) para las tensiones en los condensadores quedan iguales, sólo que por U se debe entender la magnitud obtenida de (3).

3. Cuando ambas llaves están cerradas no podemos considerar que los condensadores están conectados en serie. En efecto, en tal caso el circuito se puede representar como se muestra en la fig. 11.3. Cada uno de los condensadores está conectado en paralelo con «su» resistencia y, por ello, las cargas de los condensadores ya no son iguales en-

tre sí. La tensión en cada condensador es igual a la tensión en la correspondiente resistencia. Como las resistencias R_1 y R_2 están conectadas entre sí en serie, la corriente que pasa por ellas es la misma y las tensiones U_1 y U_2 satisfacen el sistema de ecuaciones:

$$U_1 + U_2 = U, \quad U_1/U_2 = R_1/R_2. \tag{4}$$

Resolviendo este sistema, obtenemos

$$U_1 = U\frac{R_1}{R_1+R_2}, \quad U_2 = U\frac{R_2}{R_1+R_2}. \tag{5}$$

Si tampoco en este caso se puede despreciar la resistencia interna de la fuente, en las fórmulas (5) por U hay que entender la tensión en el sector externo del circuito, obtenida de la relación (3).

4. Cuando la llave K_1 está abierta en el circuito no hay corriente. Si, además, está cerrada la llave K_2, la tensión en el condensador C_2 es nula. Por lo tanto, la tensión en el condensador C_1 es igual a la tensión U de la fuente de corriente.

Señalemos que los resultados obtenidos sólo son ciertos cuando han finalizado en el circuito todos los procesos transitorios. Inmediatamente después del cierre (o la abertura) de las llaves se produce la recarga de los condensadores, lo que ocupa cierto intervalo de tiempo. La duración de éste depende de los valores de las resistencias y capacidades.

Al resolver este problema, en cada uno de los casos examinados, se consideraba que todos los condensadores estaban no cargados hasta la conexión de la fuente. Esta condición puede resultar que no se cumpla cuando tiene lugar el paso consecutivo de uno a otro caso sin desconectar la fuente. P. ej., al pasar del caso 4 al 1, abriendo la llave K_2, el condensador C_2 queda descargado como lo estaba, a pesar de que con ello se obtiene un circuito con condensadores conectados en serie. La tensión en el primer condensador sigue siendo U, en tanto que en el segundo, igual a cero. Comparen este resultado con la solución del problema 13 del capítulo «Electrostática». ▲

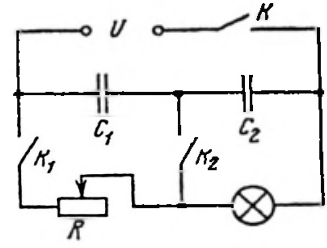


Fig. 12.1. Esquema eléctrico con «memoria»

12. Circuito con «memoria». A la entrada del circuito mostrado en la fig. 12.1 se mantiene la tensión constante U. Al principio todas las llaves están abiertas, los condensadores no están cargados. ¿Qué manipulaciones hay que hacer con las llaves y la corredera del reóstato R para que: 1) la tensión en el condensador C_1 sea igual a U y, con ello, esté encendida la bombilla; 2) la tensión en el condensador C_2 sea igual a U y la bombilla también esté encendida?

△ Primero cerremos la llave K. Para que la bombilla esté encendida la llave K_1 debe estar cerrada. Cerrémosla. En este caso las tensiones en los condensadores son distintas de cero y su suma es igual a la tensión aplicada U. Dichas tensiones sólo su pueden variar cerrando la llave K_2. Cerrémosla también. Si ahora, desplazando la corredera, hacemos la resistencia del reóstato igual a cero, toda la tensión U estará aplicada a la bombilla. La tensión en el condensador C_2 será, asimismo, igual a U, en tanto que la tensión en el condensador C_1 se anulará: así hemos realizado la situación 2). Ahora, podemos abrir la llave K_2 y retornar la corredera del reóstato a su anterior posición. Con ello, la tensión en el condensador C_2 quedará igual a U, en C_1 igual a cero y la bombilla seguirá encendida. Aunque ahora el estado de las llaves es el mismo que antes de cerrar K_2, las tensiones en los condensadores son otras. Con otras palabras, el sistema «recuerda» su prehistoria.

Prestemos atención a que con la sucesividad elegida de las manipulaciones con las llaves, es imposible hacer igual a U la tensión en el condensador C_1. Hay que buscar otra sucesión de las manipulaciones. Después de cerrar la llave K, intentemos cerrar la llave K_2 y no la llave K_1, como antes. En este caso la tensión en el condensador C_1 será igual a U, en C_2 igual a cero, y, claro está, la bombilla estará apagada. Ahora, abrimos la llave K_2, con lo que la tensión en los condensadores no variará. Si, a continuación, cerramos la llave K_1, la bombilla se encenderá, es decir, será realizada la situación 1).

Así pues, en ambos casos considerados las posiciones finales de todas las llaves y de la corredera son iguales, la bombilla estará encendida, pero las distribuciones de las tensiones por los condensadores son diametralmente opuestas. Dichas tensiones dependen de la sucesión de las conmutaciones precedentes. ▲

13. Procesos transitorios en un circuito con condensador. ¿Cuánto tiempo tardará en cargarse un condensador de capacidad C, si se conecta a través de la resistencia R a una fuente de tensión continua U_0 (fig. 13.1)?

△ Al cerrar la llave K (fig. 13.1) por el circuito pasa la corriente y el condensador comienza a cargarse. A medida que crece la tensión en el condensador la corriente en el circuito decrece. El proceso de carga del condensador transcurrirá hasta que la tensión en él se iguale a la de la fuente U_0. Después de acumular en las armaduras del condensador la carga $q_0 = CU_0$, que para ello es necesaria, en el circuito cesa la corriente, es decir, en éste finalizan los procesos transitorios.

Designemos con q la carga de la armadura superior del condensador. En el proceso de carga del condensador este parámetro varía. La velocidad de variación de la carga de la mencionada armadura

dq/dt determina la intensidad de corriente I en el circuito:

$$I = dq/dt. \tag{1}$$

La fórmula (1) corresponde a la elección de la dirección de la corriente que se muestra en la fig. 13.2: el valor positivo de la corriente en la fórmula (1) corresponde al crecimiento de la carga de la armadura superior del condensador, o sea, al valor positivo de la derivada dq/dt.

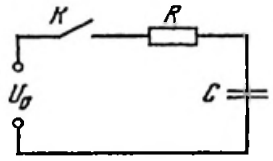


Fig. 13.1. El condensador C se carga a través de la resistencia R de la fuente de tensión continua U_0

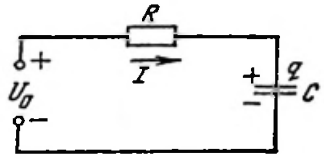


Fig. 13.2. Con semejante elección del sentido de la corriente su valor I está ligado con la carga de la placa superior q mediante la relación $I = dq/dt$

En el circuito en serie que consideramos la suma de las tensiones en la resistencia U_R y en el condensador U_C es igual a la tensión aplicada U_0. Como la tensión en la resistencia U_R es igual al producto de la corriente I por la resistencia R,

$$IR + U_C = U_0. \tag{2}$$

Poniendo aquí el valor de la corriente I mediante la velocidad de variación de carga del condensador de la ecuación (1) y teniendo en cuenta que la tensión U_C en el condensador es, en cualquier momento, igual a q/C, obtenemos

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = U_0. \tag{3}$$

Esta ecuación diferencial para la función $q(t)$ determina la dependencia entre la carga del condensador y el tiempo. Resulta cómodo anotar dicha ecuación en forma algo diferente, tomando en consideración que la tensión aplicada U_0 es igual a la razón entre la carga definitiva del condensador q_0 y su capacidad C : $U_0 = q_0/C$. Entonces, en lugar de (3), obtenemos

$$dq/dt = (q_0 - q)/RC. \tag{4}$$

Es fácil reducir esta ecuación a una forma bien conocida, si en lugar de la carga de la armadura q introducimos otra magnitud incógnita Q, que caracteriza en qué grado la carga q se diferencia, en el momento dado, de la carga definitiva q_0:

$$Q = q_0 - q. \tag{5}$$

De la definición (5) se desprende que $dq/dt = -dQ/dt$. Por ello, la ecuación (4), después de sustituir (5), toma la forma

$$dQ/dt = -Q/RC. \tag{6}$$

La ecuación (6) significa que la velocidad de variación de la carga que falta Q es proporcional al propio valor de Q. La solución de esta ecuación es la función exponencial

$$Q(t) = A \exp(-t/RC). \tag{7}$$

La constante A se puede hallar de las condiciones iniciales. Debido a que en el momento inicial de tiempo $t = 0$ el condensador no está cargado ($q = 0$), como se desprende de la fórmula (5), la carga

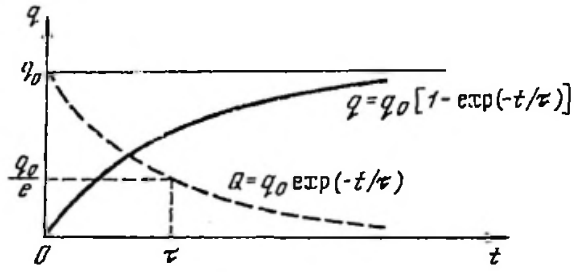


Fig. 13.3. Gráfica de la variación de la carga del condensador

Q que falta es, en este caso, igual a q_0. Así pues, la constante A en la ecuación (7) es igual a la carga definitiva del condensador q_0.

La gráfica de la dependencia $Q(t)$ se muestra con una línea de trazos en la fig. 13.3. De la fórmula (7) se desprende que el producto RC es igual a aquel intervalo de tiempo τ durante el que el valor de $Q(t)$ disminuye e veces:

$$Q(\tau) = q_0/e, \quad \tau = RC. \tag{8}$$

La dependencia entre la carga del condensador q y el tiempo para el proceso que examinamos se obtiene de la fórmula (5), después de poner en ella la expresión para $Q(t)$ de (7):

$$q(t) = q_0\{1 - \exp(-t/\tau)\}. \tag{9}$$

La gráfica de $q(t)$, mostrada en la fig. 13.3, se puede construir como la diferencia entre el valor constante de la carga definitiva q_0 y la gráfica de la función $Q(t)$. La dependencia hallada entre la carga del condensador y el tiempo (9), permite hallar con facilidad la corriente en el circuito durante la carga del condensador en cualquier momento de tiempo. Como, de acuerdo con la fórmula (1), la corriente es la derivada dq/dt, mediante (9) hallamos

$$I(t) = \frac{q_0}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = \frac{U_0}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \tag{10}$$

En el transcurso de la carga del condensador, la corriente es la máxima en el momento inicial (al cerrar la llave) y, a continuación, decrece con el tiempo exponencialmente. En la fig. 13.3 su gráfica tiene la misma forma que la de $Q(t)$.

De modo análogo es posible examinar los procesos que transcurren cuando el condensador se descarga por la resistencia. Supongamos que en el momento inicial el condensador de capacidad C está cargado hasta la tensión U_0, o sea, tiene una carga $q_0 = CU_0$. Al cerrar la llave en el circuito surge una corriente que decrece a medida que el condensador se descarga (fig. 13.4). Si como antes entendemos por q la carga de la armadura superior del condensador, a la dirección de la corriente elegida en la fig. 13.4 corresponde la expresión

$$I = -dq/dt, \qquad (11)$$

ya que con el valor positivo de la corriente I la carga de la armadura decrece, es decir, $dq/dt < 0$. Como en cualquier momento de tiempo la tensión en el condensador $U_C = q/C$ es igual a la tensión en la resistencia $U_R = IR$, mediante la expresión (11), tendremos

Fig. 13.4. Con semejante elección del sentido de la corriente su valor I está ligado con la carga de la placa superior q por la relación $I = -dq/dt$

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{RC}q. \qquad (12)$$

La solución de esta ecuación, correspondiente a nuestras condiciones iniciales, tiene la forma

$$q(t) = q_0 \exp(-t/\tau), \quad \tau = RC, \qquad (13)$$

ya que con $t = 0$ la carga del condensador es igual a q_0.

Igual carácter exponencial tiene, asimismo, la dependencia entre la corriente en el circuito al descargarse el condensador y el tiempo:

$$I(t) = -\frac{dq}{dt} = \frac{q_0}{\tau}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = \frac{U_0}{R}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \qquad (14)$$

Como se deduce de los resultados obtenidos tanto el proceso de carga del condensador, como el de su descarga, hablando en rigor, continúan un tiempo infinitamente largo. Pero, como todos los procesos semejantes, en los que la dependencia temporal se describe con un exponente de grado negativo, la variación fundamental de la magnitud que se considera (en el caso dado la carga del condensador o bien la corriente en el circuito) transcurre durante un intervalo finito de tiempo y sólo requiere un tiempo infinito la restante variación, relativamente pequeña, de dicha magnitud. El parámetro que caracteriza la duración de semejante proceso es la magnitud

$$\tau = RC.$$

En el intervalo de tiempo τ la magnitud que consideramos variará $e \approx 2{,}72$ veces.

Si nos interesamos por el tiempo en el transcurso del cual se produce la variación en cualquier número de veces (cuan se quiera grande pero finito), este tiempo se diferenciará de τ sólo por el factor numérico (con ello, comparativamente pequeño). P. ej., el tiempo que pasa hasta que en las armaduras del condensador que se descarga sólo quede una milésima de la carga inicial es igual a $\tau \cdot 3 \ln 10 \approx \approx 7\tau$.

En todo sistema real el proceso transitorio continúa en el transcurso de un intervalo finito de tiempo (y no infinitamente grande), ya que hablar de semejante proceso sólo tiene sentido hasta el instante en que la magnitud que se considera disminuye obteniendo el valor correspondiente a las fluctuaciones térmicas en el sistema.

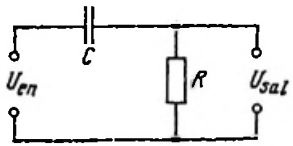


Fig. 13.5. Esquema del *RC*-circuito

En la solución aducida del problema, tácitamente, hemos supuesto que el valor instantáneo de la corriente es el mismo en cualquier lugar del circuito eléctrico que une las armaduras del condensador, mientras que el campo eléctrico del condensador es igual que en electrostática con esas mismas cargas en las armaduras. Así se puede considerar si la propagación de las interacciones eléctricas, prácticamente, se produce de modo instantáneo. Como, en realidad, la propagación del campo electromagnético se produce a velocidad finita (a la velocidad de la luz c), la suposición de la instantaneidad estará justificada si el tiempo de propagación del campo a lo largo del circuito es pequeño en comparación con τ. En tales casos suele decirse que en el circuito eléctrico los fenómenos tienen carácter casiestacionario. Si designamos con l la longitud del circuito, la condición que determina que el proceso es casiestacionario durante la carga o descarga de los condensadores, tiene la forma

$$l/c \ll \tau = RC.$$

Los procesos analizados en este problema permiten explicar cómo transcurre la transformación de la tensión alterna que se transmite a la entrada del *RC*-circuito en forma de secuencias de impulsos rectangulares (fig. 13.5). El comienzo de cada impulso rectangular (fig. 13.6) corresponde a la conexión a las bornas de entrada del circuito de la fuente de tensión continua U_0 para un tiempo igual a la duración del impulso T. Con ello, en el circuito, de acuerdo con la fórmula (10), a salto surge la corriente que disminuye de modo gradual a medida que el condensador se carga.

Si el tiempo de la carga del condensador $\tau = RC$ es mucho menor

que la duración del impulso rectangular T, transmitido a la entrada, la corriente de carga cesará antes de que se acabe el mencionado impulso. En el momento que llega el frente posterior del impulso rectangular, transmitido a la entrada del circuito, la tensión se anula a salto. De hecho, esto significa que se produce el cortocircuito en las bornas de entrada del esquema. El circuito que contiene R y C se convierte en cortocircuitado y el condensador se descarga por la resistencia R. Durante la descarga la dirección de la corriente es opuesta a la de la corriente en el transcurso de la carga. Por ello, la tensión de salida en la resistencia R tiene polaridad inversa al realizarse la carga y la descarga (fig. 13.6). Los impulsos de la tensión de salida con $\tau < T$ tienen la misma magnitud tanto para la polaridad positiva, como para la negativa, ya que el condensador tiene tiempo para cargarse hasta la tensión U_0 y la corriente por la resistencia R es igual en ambos casos, lo que se sigue de las fórmulas (10) y (14).

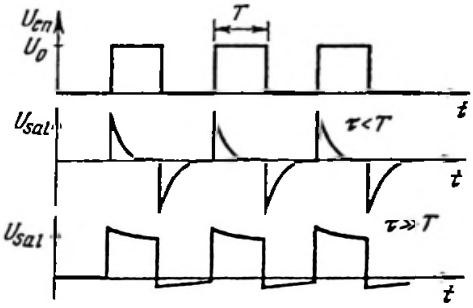


Fig. 13.6. Dependencia respecto del tiempo de la tensión de salida en el RC-circuito al alimentar a su entrada impulsos rectangulares

Si el tiempo de la carga el condensador τ es mayor que la duración del impulso rectangular T, hacia el momento de la llegada del frente posterior, al condensador le falta tiempo para cargarse hasta la tensión U_0. La gráfica de la tensión de salida en la resistencia R asimismo se muestra, para este caso, en la fig. 13.6. Los impulsos de salida de polaridad negativa son ahora menores, ya que, durante la descarga, la corriente del condensador es menor que al realizarse la carga. De aquí se desprende que si $T \ll \tau$ la forma de la tensión de salida en el RC-circuito difiere de manera insignificante de la tensión de entrada mientras $t \ll \tau$. Al aproximarse t a τ los impulsos de polaridad negativa crecen de manera gradual, mientras que los impulsos de polaridad positiva, decrecen. A fin de cuentas, para $t > \tau$ los impulsos positivos y negativos se igualan en magnitud y la componente continua de la tensión de salida se anula.

En el RC-circuito la forma de la tensión de salida, en general, no se distingue de la forma de la tensión de entrada en aquel caso cuando esta última tensión depende sinusoidalmente del tiempo. Claro está, la amplitud y la fase de la tensión de salida serán distintas de las de la tensión de entrada, pero la dependencia del tiempo será como antes sinusoidal. La conservación de la forma de la tensión, a diferencia del caso de los impulsos rectangulares considerado más arriba, para la tensión sinusoidal se realizará con cualesquiera relaciones entre $\tau = RC$ y el período de la tensión que se alimenta. ▲

14. Resonancia de un circuito en serie de corriente alterna. Al resistor R, condensador C e inductancia L, conectados en serie (fig. 14.1), se alimenta la tensión alterna sinusoidal $U(t) = U_0 \cos \omega t$, con la particularidad de que la frecuencia ω se puede variar sin cambiar la amplitud de la tensión U_0. Resultó que con las frecuencias ω_1 y ω_2 la intensidad de la corriente en el circuito es la misma e igual a la mitad de valor máximo posible. ¿Con qué frecuencia ω_0 se alcanza el valor máximo de la corriente?

△ En el circuito que consideramos la amplitud de la corriente alterna se determina por la relación

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}. \qquad (1)$$

Para los parámeros fijados del circuito R, L y C y para la amplitud prefijada de la tensión externa U_0, esta fórmula proporciona la

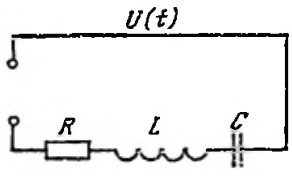


Fig. 14.1. Circuito en serie de corriente alterna

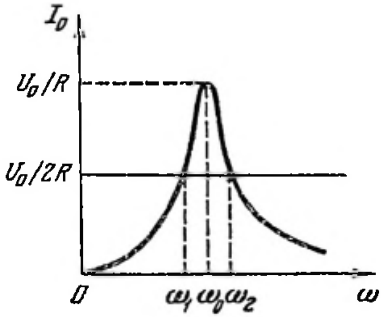


Fig. 14.2. Dependiencia entre la amplitud de la corriente y la frecuencia ω

dependencia entre la amplitud de la corriente en el circuito y la frecuencia ω de la tensión aplicada. Esta dependencia tiene la bien conocida forma de la curva de resonancia (fig. 14.2). En caso de bajas frecuencias ($\omega \approx 0$) la presencia del condensador es, prácticamente, equivalente a la ruptura del circuito y, por ello, no hay corriente. En caso de altas frecuencias ($\omega \to \infty$) la resistencia del condensador tiende a cero, pero, por lo contrario, crece ilimitadamente la resistencia de la inductancia y, de nuevo, la corriente tiende a cero. El valor máximo de la amplitud de la corriente, como se desprende de la fórmula, se alcanza en la frecuencia ω_0 con la que la expresión entre paréntesis se anula:

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}. \qquad (2)$$

En este caso, la reactancia inductiva y la capacitancia son iguales entre sí y en el circuito tiene lugar la resonancia de tensiones. Si $\omega = \omega_0$ la corriente en el circuito sólo depende de la resistencia óh-

mica R, su amplitud es igual a U_0/R, en tanto que no existe desfasaje entre la corriente y la tensión aplicada.

La fórmula (2) daría respuesta a la pregunta del problema si fuesen conocidas la inductancia L y la capacidad C. Pero, según el planteamiento del problema, es preciso expresar ω_0 por medio de las frecuencias ω_1 y ω_2, con las que la amplitud de la corriente es dos veces menor que la máxima. De la fig. 14.2 se desprende que la frecuen-

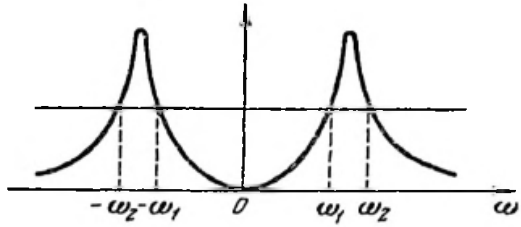


Fig. 14.3. La ecuación (3) tiene además dos raíces negativas

cia ω_0 yace entre ω_1 y ω_2, mientras que las propias frecuencias ω_1 y ω_2 están tanto más cerca, la una de la otra, cuanto más aguda sea la curva de resonancia.

Con el fin de hallar la frecuencia de resonancia ω_0 operamos del modo siguiente. Como vemos en la fig. 14.2, las frecuencias ω_1 y ω_2 son las raíces de la ecuación

$$\frac{U_0}{2R} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}, \qquad (3)$$

ya que ellas se determinan por los puntos de intersección de la recta $I_0 = U_0/2R$ con la curva de resonancia (1). Señalemos que además de las raíces positivas ω_1 y ω_2, que tienen sentido físico, la ecuación (3) tiene raíces negativas $-\omega_1$ y $-\omega_2$ de forma que el segundo miembro de (3) es una función par de la variable ω (fig. 14.3). Elevando (3) al cuadrado, obtenemos

$$(\omega L - 1/\omega C)^2 - 3R^2 = 0. \qquad (4)$$

Multiplicando (4) por $\omega^2 C^2$ y, de acuerdo con (2), sustituyendo el producto LC por $1/\omega_0^2$, hallamos

$$\omega^4 - \omega_0^2 (2 + 3R^2C^2\omega_0^2)\,\omega^2 + \omega_0^4 = 0. \qquad (5)$$

La ecuación (5) es bicuadrada y, por consiguiente, tiene cuatro raíces. Igual cantidad de raíces tenía la ecuación inicial (3). Como al elevar al cuadrado la ecuación (3) no pudimos perder raíces, las raíces de la ecuación (5) coinciden con las de (3). Según el teorema de Viète, el término independiente de la ecuación (5) es igual al producto de sus raíces: $\omega_1^2\omega_2^2 = \omega_0^4$, de donde $\omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2}$.

Prestemos atención a que para que el resultado obtenido sea válido sólo es necesario que con las frecuencias $\omega = \omega_1$ y $\omega = \omega_2$ los valores de la corriente en el circuito sean iguales. No es obligatorio que ellos constituyan, precisamente, la mitad del valor máximo. En efecto, si con las frecuencias ω_1 y ω_2 los valores de la corriente son n veces menores que su máximo valor, en el primer miembro de la ecuación (3) $U_0/2R$ debe sustituirse por U_0/nR. Es fácil cerciorarse de que el término independiente ω_0^4 en la ecuación (5) no varía y, por ello, de acuerdo con el teorema de Viète es como antes $\omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2}$. ▲

15. Inversor de fase. A los puntos A y B del circuito mostrado en la fig. 15.1 se alimenta la tensión $U_{AB} = U_0 \cos \omega t$. ¿Qué tensión

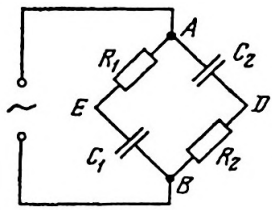


Fig. 15.1. A los puntos A y B se alimenta tensión sinusoidal

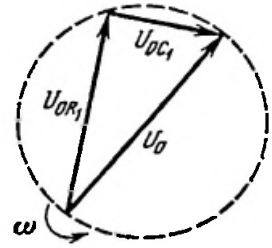


Fig. 15.2. El diagrama vectorial de las tensiones para el sector del circuito AEB

habrá entre los puntos E y D? ¿Bajo qué condición el valor de amplitud de dicha tensión coincide con U_0? En este caso, ¿cuál será el desfasaje entre las tensiones U_{AB} y U_{ED}?

△ Con el fin de resolver este problema es cómodo emplear el método de los diagramas vectoriales. Con ello, las magnitudes que nos interesan pueden ser halladas partiendo de evidentes consideraciones geométricas.

Construyamos el diagrama vectorial de las tensiones en todos los elementos del sistema. Examinemos el sector AEB. Como la resistencia R_1 y la capacidad C_1 están unidas en serie, los vectores que representan las tensiones U_{R_1} y U_{C_1} son perpendiculares entre sí, en tanto que su suma representa la tensión aplicada U_{AB}. Para el sentido antihorario elegido de rotación de los vectores, el diagrama vectorial de dichas tensiones se muestra en la fig. 15.2. Describamos una circunferencia alrededor del triángulo rectángulo formado por los vectores U_{0R_1}, U_{0C_1} y U_0. La hipotenusa U_0 es el diámetro de dicha circunferencia. Ahora, construyamos los vectores que representan las tensiones U_{R_2} y U_{C_2}. Ellos son también perpendiculares entre sí y su suma es igual al vector U_0 que representa la tensión aplicada U_{AB}. Para que más adelante nos sea cómodo hallar la tensión entre

los puntos E y D, que es la que nos interesa, al construir el diagrama vectorial tomemos en consideración la consecutividad de unión de los elementos C y R en cada brazo del esquema. El diagrama vectorial completo de las tensiones se muestra en la fig. 15.3. Ahora, es fácil comprender que la tensión entre los puntos E y D, es decir, la diferencia entre las tensiones U_{R_1} y U_{C_2}, se representará con el vector U_0' que se dispone por otra diagonal del cuadrilátero de tensiones. Su

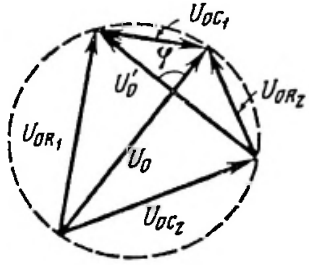


Fig. 15.3. La tensión $U_{R_1} - U_{C_2}$ entre los puntos E y D se representa con el vector U_0'

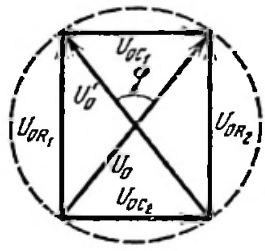


Fig. 15.4. Para que la amplitud de la tensión de salida entre los puntos E y D sea igual a la amplitud de la tensión aplicada, el vector U_0' debe pasar por el centro de la circunferencia

sentido se determinará con lo que llamaremos tensión entre los puntos E y D: la diferencia $U_{R_1} - U_{C_2}$ o bien $U_{C_2} - U_{R_1}$. El sentido de dicho vector indicado en la fig. 15.3 corresponde a la primera posibilidad. Entonces, el valor instantáneo de la tensión U_{ED} se describirá con la expresión

$$U_{ED} = U_0' \cos(\omega t + \varphi), \tag{1}$$

donde el ángulo φ (fig. 15.3) puede variar desde 0 hasta π.

De las consideraciones geométricas está claro que el valor de amplitud de esa tensión no puede ser mayor que U_0. Este valor sólo es igual a U_0 cuando el vector U_0' pasa por el diámetro de la circunferencia. En tal caso, el cuadrilátero de tensiones se convierte en un rectángulo y el desfasaje φ entre U_{ED} y U_{AB}, que nos interesa, es dos veces mayor que el desfasaje entre la tensión aplicada U_{AB} y las tensiones en las resistencias R_1 y R_2 (fig. 15.4). El ángulo $\varphi/2$ se halla con facilidad partiendo de consideraciones geométricas:

$$\operatorname{tg}(\varphi/2) = U_{0C_1}/U_{0R_1} = U_{0C_2}/U_{0R_2}. \tag{2}$$

Como en los sectores del circuito unidos en serie las corrientes son iguales, las relaciones (2) se escriben en la forma

$$\operatorname{tg}(\varphi/2) = 1/(\omega C_1 R_1) = 1/(\omega C_2 R_2). \tag{3}$$

De la relación (3) se deduce que U_0' es igual a U_0 cuando se verifica la condición $C_1R_1 = C_2R_2$, mientras que el desfasaje φ, que en-

tra en la fórmula (1), se determina, en este caso, con la expresión para la tangente del ángulo doble:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\operatorname{tg}(\varphi/2)}{1-\operatorname{tg}^2(\varphi/2)} = \frac{2\omega C_1 R_1}{(\omega C_1 R_1)^2 - 1}.$$

En caso de igualdad de las resistencias capacitativas y óhmicas, es decir, para $1/\omega C = R$, el desfasaje entre las tensiones U_{AB} y U_{ED} constituye $\pi/2$.

El esquema estudiado es de por sí un ejemplo de sencillo inversor de fase si se utilizan capacidades y resistencias variables. ▲

16. **Transformador con núcleo.** Al conectar el arrollamiento primario del transformador con núcleo cerrado a la red con la tensión $U_1 = 100$ V, en el arrollamiento secundario abierto, con un número de espiras dos veces mayor ($n = 2$), la tensión $U_2 = 197$ V. ¿Qué tensión habrá en el arrollamiento secundario abierto si se emplea un núcleo del mismo tamaño, pero de un material con permeabilidad magnética $k = 10$ veces menor que en el primer caso? La dispersión del flujo magnético y las pérdidas en el núcleo no se toman en consideración.

△ Lo mismo que en el planteamiento del problema, a continuación, designaremos con las letras U_1 y U_2 los valores de amplitud (o reales) de las respectivas tensiones.

La solución que se aduce seguidamente es cierta para el régimen de «marcha en vacío», cuando el arrollamiento secundario del transformador está abierto. En el primer caso, la tensión U_2 en el arrollamiento secundario abierto es menor que $nU_1 = 200$ V. Como, según el planteamiento del problema, no hay dispersión del flujo magnético y pérdidas en el núcleo, esta diferencia está provocada por la caída de la tensión en la resistencia óhmica del arrollamiento primario. La tensión en la resistencia inductiva R_L del arrollamiento primario adelanta en fase en $\pi/2$ a la corriente y, por la tanto, a la tensión en la resistencia óhmica. Por ello, para la tensión total U_1 en el arrollamiento primario, como está claro en el diagrama vectorial, es posible escribir

$$U_1 = \sqrt{U_R^2 + U_L^2}. \qquad (1)$$

Claro está, es imposible medir por separado, directamente, U_R y U_L, ya que el arrollamiento primario no es la unión en serie de la inductancia L y la resistencia óhmica R: cada elemento del arrollamiento, simultáneamente, posee inductancia y resistencia. Este es un circuito de los llamados con parámetros repartidos. Pero durante el cálculo se puede sustituir el arrollamiento real por un circuito con parámetros concentrados, es decir, la inductancia y la resistencia, unidas en serie, ya que por cada elemento del circuito inicial pasa una misma corriente.

La tensión en la resistencia inductiva del arrollamiento primario es en módulo igual a la fem de autoinducción $\mathscr{E}_1$ que surge en dicho arrollamiento, pero opuesta a ella en fase. La tensión U_2 en el arrollamiento secundario abierto es igual a la fem de inducción $\mathscr{E}_2$ que en él surge. Como $\mathscr{E}_1$ y $\mathscr{E}_2$ están ligadas entre sí con la relación $\mathscr{E}_2/\mathscr{E}_1 = n$, entonces

$$U_2 = nU_L. \tag{2}$$

Así pues, la tensión en el arrollamiento secundario abierto se determina no con la tensión total en el arrollamiento primario, sino que sólo con su componente inductiva. Como de la relación (1) se desprende que

$$\frac{U_L}{U_1} = \frac{R_L}{\sqrt{R_L^2 + R^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (R/R_L)^2}}, \tag{3}$$

resulta que

$$U_2 = \frac{nU_1}{\sqrt{1 + (R/R_L)^2}}. \tag{4}$$

La sustitución del núcleo conduce a la variación de la resistencia inductiva del arrollamiento primario. La mencionada resistencia R_L es proporcional a la permeabilidad magnética del material del núcleo, por ello

$$R_L/R'_L = k, \tag{5}$$

donde R'_L es la resistencia inductiva del arrollamiento primario después de sustituir el núcleo.

Teniendo en cuenta la fórmula (5), con ayuda de (4), después de sustituir el núcleo, la tensión U'_2 en el arrollamiento secundario se puede escribir en la forma

$$U'_2 = \frac{nU_1}{\sqrt{1 + (R/R'_L)^2}} = \frac{nU_1}{\sqrt{1 + (kR/R_L)^2}}. \tag{6}$$

De las relaciones (2) y (3) se desprende que

$$(R/R_L)^2 = (U_1/U_L)^2 - 1 = (nU_1/U_2)^2 - 1. \tag{7}$$

Poniendo (7) en la expresión (6), hallamos

$$U'_2 = \frac{nU_1}{\sqrt{1 + k^2\,[n^2\,(U_1/U_2)^2 - 1]}}. \tag{8}$$

Empleando los valores de las magnitudes que entran en la fórmula (8), prefijados en el planteamiento del problema, obtenemos $U'_2 = 100$ V.

Así pues, la tensión en el arrollamiento secundario abierto resultó ser igual a la que se alimentó al arrollamiento primario, a pesar de que el número de espiras en el arrollamiento secundario es dos veces mayor. El ejemplo considerado muestra la importancia del nú-

cleo con gran permeabilidad magnética: para el funcionamiento normal del transformador es necesario que la resistencia óhmica R del arrollamiento primario sea pequeña en comparación con su resistencia inductiva R_L ($R \ll R_L$).

Al verificarse esta condición la componente inductiva de la tensión será próxima a la tensión U_1 alimentada al arrollamiento primario. En la «marcha en vacío» en tal transformador $U_2 \approx nU_1$. Estas tensiones están casi en antifase. Gracias a la gran resistencia inductiva del arrollamiento primario del transformador con núcleo, en él, cuando el circuito secundario está abierto, la corriente es pequeña a pesar de ser pequeña la resistencia óhmica del arrollamiento primario. Si semejante transformador se conecta a la red de corriente continua, donde sólo la resistencia óhmica R desempeña su papel, la corriente en el arrollamiento primario alcanzará un enorme valor y el transformador se fundirá. ▲

17. Transformador con núcleo complejo. El núcleo del transformador tiene la forma simétrica mostrada en la fig. 17.1. El arrollamiento izquierdo tiene n_1 espiras, el derecho, n_2 espiras. Cuando al arrollamiento izquierdo está aplicada la tensión U_1, en el derecho abierto la tensión es igual a U_2. ¿Cuál será la tensión en el arrollamiento izquierto si esa misma tensión U_1 se alimenta al arrollamiento derecho? Se considera que el flujo magnético creado por la corriente en cualquiera de los arrollamientos no sale del núcleo.

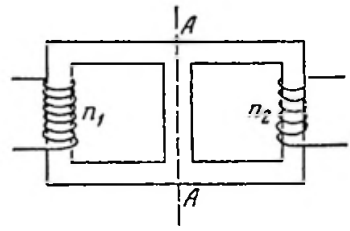


Fig. 17.1. Transformador con núcleo complejo

△ Si el núcleo del transformador no tuviese ramificaciones el flujo magnético, que atraviesa cada uno de los arrollamientos, sería el mismo. Si, además, las resistencias óhmicas de los arrollamientos fuesen pequeñas en comparación con las inductivas, para semejante transformador la razón entre las tensiones en los arrollamientos sería igual, en la marcha en vacío, a la razón entre los números de espiras:

$$U_2/U_1 \approx n_2/n_1. \tag{1}$$

Claro está, en semejante caso no se necesitaría prefijar la tensión U_2 en el arrollamiento derecho, mientras que la tensión U en el arrollamiento izquierdo, al alimentar al derecho la tensión U_1, se determinaría con la fórmula

$$U = U_1 n_1/n_2. \tag{2}$$

¿En qué se diferencia el funcionamiento del transformador cuando en el núcleo se produce la ramificación del flujo magnético?

Está claro en absoluto, que la relación (1) ya no será cierta, ya que la fem inducida en una espira será diferente en los arrollamientos derecho e izquierdo. Supongamos que el flujo magnético Φ_1, creado por la corriente en el arrollamiento izquierdo, se ramifica de modo que por el arrollamiento derecho pasa el flujo $\Phi_2 = k\Phi_1$. El coeficiente $k < 1$ depende de la estructura del núcleo. Con el mismo coeficiente k están también ligadas la fem de inducción en espiras aisladas de los arrollamientos izquierdo y derecho: $\mathscr{E}_2 = k\mathscr{E}_1$. Por esto, las tensiones U_2 y U_1, que son proporcionales a la fem en una espira aislada y al número de espiras en el arrollamiento, están ligadas con la relación

$$U_2 = kU_1 n_2/n_1. \tag{3}$$

Prestemos atención a que esta relación permite hallar el coeficiente k de división del flujo magnético según los valores prefijados de n_1, n_2 y U_1, U_2. Es de interés señalar que la tensión de salida U_2 puede ser menor que la tensión U_1 que se alimenta, incluso con $n_2 > n_1$, ya que $k < 1$.

Ahora, supongamos que la tensión U_1 se alimenta al arrollamiento derecho del transformador con número de espiras n_2. Como el núcleo es simétrico con relación a la línea media AA (fig. 17.1), la ramificación del flujo magnético, creado por la corriente en el arrollamiento derecho, también se determinará por ese mismo coeficiente k. Por esta razón, en el caso que consideramos, la tensión U en el arrollamiento izquierdo abierto está ligada con la tensión U_1, alimentada al arrollamiento derecho, con una relación análoga a (3):

$$U = kU_1 n_1/n_2. \tag{4}$$

El coeficiente incógnito k que entra en esta relación se puede excluir haciendo uso de la fórmula (3). Con ello, la tensión buscada resultará expresada no por la tensión alimentada U_1, sino por la tensión U_2, existente en el arrollamiento derecho abierto, cuando U_1 se alimenta al arrollamiento izquierdo:

$$U = U_2 (n_1/n_2)^2. \tag{5}$$

Claro está, a la fórmula (2), cierta para un transformador con núcleo no ramificado, se le puede adjudicar esa misma forma si, con ayuda de la fórmula (1), se expresa U_1 por medio de U_2. No obstante, allí no tiene sentido realizar tal caso, ya que U_2 no es una magnitud independiente que sólo se expresa por U_1 y la razón de los números de espiras en los arrollamientos. En un transformador con núcleo ramificado U_2 depende, además, del coeficiente k de división del flujo magnético. Se consiguió eliminar dicho coeficiente de la fórmula definitiva (5) a cuenta de que la tensión está expresada no por medio de la tensión alimentada U_1, sino mediante la tensión U_2. Ya que la

tensión U_1 no entra en el resultado (5), ella podía no prefijarse en el planteamiento del problema y sólo señalar que ella es igual en ambos casos. ▲

18. Un extraño voltímetro. Sobre el núcleo de hierro del transformador (fig. 18.1), en lugar del arrollamiento secundario, se ha asentado un anillo conductor con resistencia R. A los puntos A y B de este anillo, separados a una distancia igual a 1/3 de la largura del anillo, está conectado un voltímetro perfecto. La fem de inducción, inducida en el anillo conductor, es igual a $\mathscr{E}$. ¿Qué mostrará el voltímetro?

△ El flujo magnético en el núcleo, que varía con el tiempo, genera un campo eléctrico rotacional, cuyas líneas de intensidad son circunferencias que rodean simétricamente el núcleo. Para la disposición

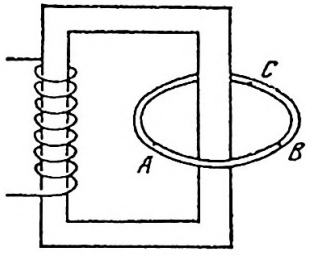


Fig. 18.1. Anillo conductor en el núcleo de un transformador

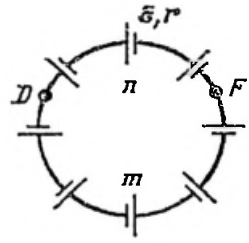


Fig. 18.2. Circuito cerrado de iguales fuentes de corriente

simétrica del anillo las fuerzas ajenas son iguales en todos sus sectores y la fem de inducción es proporcional a la longitud del sector en cualquiera de los sectores del anillo. En particular, en el sector AB la fem de inducción $\mathscr{E}_{AB} = {}^1/_3\mathscr{E}$, mientras que en el sector BCA $\mathscr{E}_{BCA} = {}^2/_3\mathscr{E}$. Por esto, puede parecer que el problema dado es equivalente al bien conocido problema acerca del circuito constituido por iguales fuentes de corriente unidas en serie (fig. 18.2). Es fácil demostrar que entre cualesquiera dos puntos de semejante circuito la tensión es igual a cero. En efecto, aplicando la ley de Ohm para el sector FD de un circuito no homogéneo que contiene n elementos, tendremos

$$I = \frac{U_{FD} + n\mathscr{E}}{nr}. \qquad (1)$$

Por otro lado, aplicando la ley de Ohm a todo el circuito cerrado de $n + m$ elementos, obtenemos

$$I = \frac{(n+m)\mathscr{E}}{(n+m)r} = \frac{\mathscr{E}}{r}. \qquad (2)$$

Comparando (1) y (2) vemos que $U_{FD} = 0$. Si a los puntos F y D se conecta un voltímetro su indicación será igual a cero. Incluso si los puntos F y D se unen en cortocircuito, en el circuito nada variará y la corriente no pasará por el puente.

Parecía que también en el problema que estudiamos acerca de la conexión del voltímetro a los puntos A y B del anillo conductor, que abraza el núcleo del transformador, obtendremos una indicación

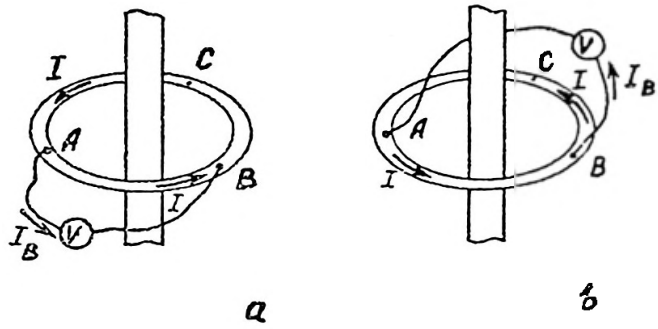


Fig. 18.3. Dos procedimientos de conexión del voltímetro a los puntos A y B

nula del voltímetro, ya que aquí la tensión entre cualesquiera dos puntos del anillo también es igual a cero. Sin embargo, si realizamos semejante medición, el resultado del experimento será asombroso: aparte de que el voltímetro indicará no el cero, además, sus indicaciones no dependerán de cómo se disponen los conductores que unen el voltímetro con los puntos A y B con relación al núcleo del transformador (fig. 18.3).

La cuestión radica en que en el esquema con la fuente de corriente (fig. 18.2) el circuito del propio voltímetro no desempeña papel alguno, mientras que en el caso que consideramos (fig. 18.3) el voltímetro con los conductores de alimentación forman un circuito en el que también se observa el fenómeno de la inducción electromagnética.

Como sabemos, la indicación del voltímetro es proporcional a la corriente que por él pasa: cuando la corriente por el voltímetro es igual a I_v, la tensión que él muestra U_v es igual a $I_v R_v$, donde R_v es la resistencia interna del voltímetro. Con el fin de aclarar cuál será la indicación del voltímetro al conectarlo según el primer procedimiento (fig. 18. 3*a*), aplicamos al circuito cerrado, que contiene el sector AB del anillo, a los conductores de unión y al voltímetro, la segunda regla de Kirchhoff. Como el circuito que examinamos no abraza el núcleo, la fem de inducción será en él igual a cero. Como resultado la ecuación, obtenida al recorrer dicho circuito, tiene la forma

$$IR_{AB} - I_v R_v = 0, \qquad (3)$$

donde I es la corriente en el anillo. La corriente I se considerará igual en todos los sectores del anillo, ya que según el planteamiento el voltímetro es perfecto y, por consiguiente, es posible despreciar la corriente que se ramifica en el voltímetro en comparación con la corriente en el anillo. En el caso dado, esto significa que su resistencia R_v es mucho mayor que la R en el anillo. Como para todo el anillo es cierto

$$IR = \mathscr{E}, \tag{4}$$

mientras que la resistencia R_{AB} del sector AB constituye un tercio de la R del anillo, de (3) obtenemos

$$U_v = I_v R_v = {}^1/_3 \ \mathscr{E}. \tag{5}$$

Así pues, la indicación del voltímetro es, en realidad, distinta de cero, aunque él está conectado a los puntos del anillo entre los que la tensión es igual a cero. Esto sucede en virtud de que, en el caso dado, en los conductores de alimentación también actúan las fuerzas ajenas. Claro está, ese mismo resultado (5) se puede obtener considerando otro circuito cerrado, que contiene el voltímetro con los conductores de alimentación y el sector BCA del anillo (fig. 18.3*a*). Semejante circuito abraza el núcleo y la fem de inducción que en él actúa es igual a $\mathscr{E}$. La ecuación que se obtiene al recorrer este circuito, tiene la forma

$$IR_{BCA} + I_v R_v = \mathscr{E}. \tag{6}$$

Como $IR_{BCA} = I \cdot {}^2/_3 R = {}^2/_3 \mathscr{E}$, de (6) de nuevo obtenemos

$$U_v = I_v R_v = {}^1/_3 \mathscr{E}. \tag{7}$$

De forma análoga en absoluto podemos hallar la tensión que muestra el voltímetro al conectarlo a los puntos A y B según el segundo procedimiento (fig. 18.3*b*). La fem de inducción en el circuito que contiene el voltímetro con los conductores y el sector AB del anillo es igual a $\mathscr{E}$. Por ello, durante el recorrido de este circuito la ecuación tiene la forma

$$IR_{AB} + I_v R_v = \mathscr{E}. \tag{8}$$

Como $IR_{AB} = I \cdot {}^1/_3 R = {}^1/_3 \mathscr{E}$, para las indicaciones del voltímetro, otenemos $U_v = I_v R_v = {}^2/_3 \mathscr{E}$. Este mismo resultado se obtiene si hacemos uso del circuito que contiene el sector BCA, en el que la fem de inducción es igual a cero.

Así pues, las indicaciones del voltímetro, en realidad, resultan ser diferentes en los casos *a* y *b* en la fig. 18.3, a pesar de que él se conecta a los mismos puntos. De este problema se desprende que en física, con respecto a las analogías, hay que guardar cierto grado de precaución. El empleo de las analogías proporciona gran ventaja, pero, con ello, evitar los escollos sólo es posible comprendiendo con suficiente profundidad el fenómeno físico que se considera. La analo-

gía nunca significa identidad, ya que incluso en fenómenos muy parecidos de distanta naturaleza física siempre se observan sus peculiaridades. ▲

19. Transformaciones energéticas en el generador. La fuerza de Lorentz es la causa que provoca el movimiento de las cargas en los arrollamientos del generador eléctrico. No obstante, la fuerza de Lorentz está dirigida perpendicularmente a la velocidad de las cargas y por ello no realiza trabajo. ¿De qué manera se produce en el generador la transformación de la energía mecánica en la eléctrica?

△ Para simplificar, examinemos el modelo lineal del generador considerando que el conductor de longitud l se pone en movimiento a velocidad constante v en sentido perpendicular a las líneas de inducción B de un campo magnético homogéneo (fig. 19.1). Vamos a considerar que el vector B está dirigido hacia el lector. Con el movimiento uniforme del conductor, la fuerza externa F que sobre él actúa se compensa con la fuerza de Ampère

$$F_A = IBl, \qquad (1)$$

que surge al aparecer la corriente I en el circuito, es decir, al conectar la carga al generador.

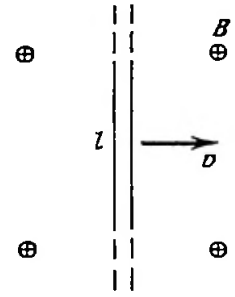


Fig. 19.1. El conductor de longitud l está en movimiento a velocidad constante v en sentido perpendicular a las líneas de inducción B

La existencia de la corriente en el circuito se condiciona por el movimiento dirigido de las cargas que entran en la composición de los conductores. Para que los razonamientos sean cómodos, consideraremos que dichas cargas q son positivas, además mediante N designaremos el número total de éstas en el conductor que examinamos. Las mecionadas cargas se mueven a lo largo del conductor a cierta velocidad constante u (velocidad de deriva). Como el propio conductor se desplaza a velocidad v, la velocidad V de movimiento de las cargas, respecto al sistema de referencia del laboratorio, es igual a la suma vectorial de las velocidades v y u (fig. 19.2) y está dirigida bajo el ángulo α con relación a la velocidad v del conductor, con ello sen $\alpha = u/V$. De aquí queda claro que la fuerza de Lorentz F_L, que actúa sobre las cargas perpendicularmente a su velocidad V, está dirigida no a lo largo del conductor, sino bajo el ángulo α respecto de él (fig. 19.3), y su módulo se calcula con la fórmula

$$F_L = qVB. \qquad (2)$$

La componente de la fuerza de Lorentz, perpendicular al conductor, que actúa sobre todas las N cargas, es precisamente la fuerza de Ampè-

re F_A que actúa sobre el conductor con corriente en el campo magnético:

$$F_A = NF_L \operatorname{sen} \alpha = NqVB \operatorname{sen} \alpha. \quad (3)$$

Poniendo aquí $\operatorname{sen} \alpha = u/V$, obtenemos

$$F_A = NquB. \quad (4)$$

Es fácil ver que esta expresión coincide con la fórmula (1). En efecto, sea que la carga Nq pasa por toda la longitud l del conductor

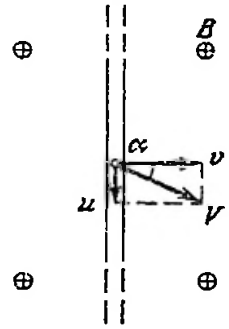


Fig. 19.2. La velocidad V de movimiento de las cargas con relación al sistema de referencia del laboratorio

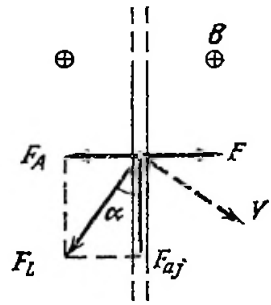


Fig. 19.3. La fuerza de Lorentz F_L es igual a la suma de las fuerzas de Ampère F_A y la fuerza ajena F_{aj}

en el tiempo t. Entonces, $u = l/t$ y Nq/t será la corriente I, o sea, el segundo miembro en (4) es igual a IlB.

El trabajo de la fuerza extrema F en el tiempo t que examinamos se da con la expresión

$$A_F = Fvt = NquBvt. \quad (5)$$

Como $ut = l$, tendremos

$$A_F = NqvBl. \quad (6)$$

Ahora, calculemos el trabajo de las fuerzas ajenas realizado en el tiempo t al desplazarse la carga Nq a lo largo del conductor. En el generador ideal (en ausencia de pérdidas) precisamente semejante trabajo se realiza en el circuito externo, es decir, en la carga del generador. Ella es igual al trabajo efectuado por la componente de la fuerza de Lorentz, dirigida a lo largo del conductor (fig. 19.3):

$$A_{aj} = NqVB \cos \alpha \cdot l = NqvBl. \quad (7)$$

Comparando los segundos miembros en las fórmulas (6) y (7) vemos que el trabajo de las fuerzas externas A_F, que aseguran el desplazamiento del conductor, es igual al trabajo de las fuerzas ajenas A_{aj} que ponen en movimiento las cargas en el conductor.

Al resultado obtenido se puede llegar de inmediato sin realizar cálculos tan detallados. En efecto, la fuerza de Lorentz F_L, que actúa por parte del campo magnético sobre las cargas en movimiento por el conductor, se puede descomponer en dos componentes: la fuerza de Ampère F_A, perpendicular al conductor, y la fuerza ajena F_{aj}, dirigida a lo largo del conductor (fig. 19.3). Precisamente esta última fuerza provoca la separación de las cargas en el interior del generador y es la causa del surgimiento de la fem. El trabajo de la fuerza de Lorentz es igual a cero, ya que ésta es perpendicular a la velocidad. Por ello, el trabajo sumario de las fuerzas de Ampère y de las ajenas es igual a cero:

$$A_A + A_{aj} = 0, \text{ es decir, } A_{aj} = -A_A.$$

La fuerza de Ampère es igual en módulo y opuesta en dirección a la fuerza externa aplicada al conductor. Por eso, el trabajo de la fuerza externa $A_{ext} = -A_A$. De aquí se deduce que el trabajo de las fuerzas ajenas, realizado en la carga, es igual al trabajo de las fuerzas externas que ponen en movimiento el rotor del generador.

Resumiendo, podemos decir que el papel de la fuerza de Lorentz en el generador eléctrico consiste en la transformación de la energía mecánica en la eléctrica.▲

20. Un cuadro que cae en el campo magnético. Un cuadro metálico rectangular se encuentra entre los polos de un electroimán que crea un campo magnético continuo homogéneo de inducción B, dirigido horizontalmente (fig. 20.1). En cierto momento el cuadro se suelta y él comienza a caer. Describan el posterior movimiento del cuadro. Consideren que el campo magnético sólo existe entre los polos del electroimán.

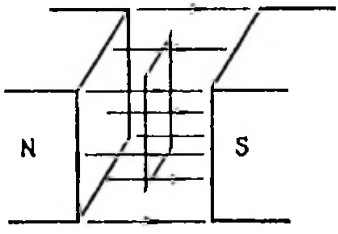


Fig. 20.1. El cuadro metálico cae por el campo magnético

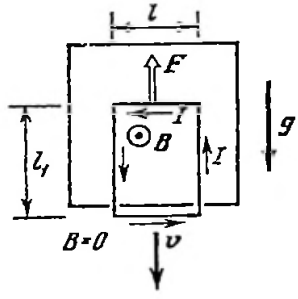


Fig. 20.2. Al surgir la corriente de inducción I aparece la fuerza de Ampère F

△ Ante todo señalemos que un cuadro abierto, por el que la corriente no puede pasar, caería del mismo modo que en ausencia del campo magnético, es decir, con la aceleración constante de la caí-

da libre g. Lo mismo pasará con un cuadro cerrado hasta el momento en que se encuentre por completo entre los polos del imán, es decir, en la región del campo magnético homogéneo. En efecto, en este caso el flujo magnético que pasa por el cuadro no varía con su movimiento de avance, en él no surge la corriente de inducción y ninguna fuerza, salvo la de la gravedad, actúa sobre el cuadro.

Pero todo cambiará en cuanto el lado inferior del cuadro salga de los límites de los polos de imán, es decir, de la región donde existe el campo magnético (fig. 20.2). Ahora, cuando el cuadro se mueve, el flujo magnético que lo atraviesa decrece y en el cuadro fluirá la corriente de inducción. Como resultado, en el lado superior horizontal del cuadro, situado en el campo magnético, actúa la fuerza de Ampère F. Ella, de acuerdo con la regla de Lenz para la corriente de inducción, está dirigida hacia arriba, es decir, tiende a reducir el influjo externo que conduce a la aparición de la corriente de inducción. La aceleración del cuadro ya no será igual a g. Las fuerzas de Ampère que actúan sobre los lados laterales (verticales) del cuadro, están dirigidas en sentidos inversos y no ejercen influencia sobre su movimiento.

Como la fuerza de Ampère F, que actúa sobre el lado superior del cuadro, es igual a IBl (l es la longitud de dicho lado), la ecuación de la segunda ley de Newton para el cuadro en caída será:

$$mdv/dt = mg - IBl. \tag{1}$$

Aquí, m es la masa del cuadro. La corriente de inducción I depende de la resistencia del cuadro R y de la fem de inducción $\mathcal{E}_i$. La fem de inducción es igual a la velocidad de variación del flujo magnético que pasa por el cuadro

$$\mathcal{E}_i = Blv, \tag{2}$$

por ello

$$I = Blv/R. \tag{3}$$

Poniendo la corriente de inducción (3) en la ecuación de la segunda ley de Newton (1), obtenemos

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{B^2l^2}{mR} v. \tag{4}$$

Si hacia el momento en que el lado inferior del cuadro sale del campo magnético la velocidad del cuadro es pequeña, de manera que el primer sumando en el segundo miembro de (4) es mayor que el segundo, el cuadro continuará acelerándose, aunque a menor aceleración. Pero si el cuadro se aceleró hasta tal punto que el segundo sumando resultó mayor que el primero, aquél comenzará a frenarse.

La ecuación (4) tiene la misma forma que la que describe la aceleración de un buque bajo la acción de la tracción constante de las hélices, tomando en consideración la fuerza de resistencia proporcio-

nal a la velocidad del buque (vean, p. ej., el problema 9 del capítulo «Mecánica de los fluidos»). Una ecuación exactamente igual describe, asimismo, la caída de una bola pesada por un líquido viscoso. En todos los casos, la velocidad del campo variará hasta el momento en que la fuerza de resistencia se iguale en módulo con la fuerza externa permanente.

Dicho valor de la velocidad v_1, correspondiente al movimiento estacionario, es fácil hallar con ayuda de (4), incluso sin resolver la ecuación diferencial aducida. En caso de movimiento estacionario $dv/dt = 0$, y para la velocidad v_1, igualando a cero el segundo miembro de (4), obtenemos

$$v_1 = mgR/B^2l^2. \tag{5}$$

La velocidad v_1 de la caída estacionaria también se puede hallar partiendo de razonamientos energéticos, sin emplear las ecuaciones de movimiento. Cuando el cuadro cae a velocidad constante su energía cinética queda invariable, la energía potencial disminuye y, por ello, el calor de Joule que se desprende en el cuadro es igual al decrecimiento de su energía potencial en el campo de la gravedad:

$$I^2R = mgv_1. \tag{6}$$

Poniendo aquí el valor de la corriente de inducción I de la fórmula (3), llegamos al valor anterior de v_1 expresado con la fórmula (5).

¿Cuánto tiempo transcurre el proceso en que se establece la velocidad? ¿Tendrá el cuadro tiempo de adquirir el valor v_1 de la velocidad mientras su lado superior sigue encontrándose en el campo magnético? Con el fin de dar respuesta a estas preguntas hay que resolver la ecuación (4). En el problema 13, donde se trató el rpoceso de carga de un condensador, ya tropezamos con la resolución de ecuaciones de semejante forma. Ante todo, teniendo en cuenta la relación (5), anotamos la ecuación (4) en forma más idónea:

$$dv/dt = -(v - v_1)/\tau, \tag{7}$$

donde se ha empleado la designación

$$\tau = mR/B^2l^2. \tag{8}$$

Como las derivadas respecto del tiempo de v y $(v - v_1)$ coinciden, la ecuación (7) nos indica que la velocidad de variación de la magnitud $v - v_1$ es proporcional a ella misma. Por ello, la solución de la ecuación (7) tiene la forma

$$v - v_1 = C \exp(-t/\tau). \tag{9}$$

De la fórmula (9) se desprende que el valor de la constante C es igual a la diferencia entre la velocidad inicial $v = v_0$ en $t = 0$ y la velocidad del movimiento estacionario del cuadro v_1: $C = v_0 - v_1$. También se deduce que la diferencia entre la velocidad instantánea

y la estacionaria $v - v_1$ se atenúa exponencialmente con el tiempo característico τ, determinado con la relación (8).

Así pues, la dependencia entre la velocidad y el tiempo a partir del momento cuando sobre el cuadro empieza a actuar la fuerza de Ampère, de acuerdo con la expresión (9), tiene la forma

$$v(t) = (v_0 - v_1) \exp(-t/\tau) + v_1. \qquad (10)$$

Claro está, que para la velocidad esta expresión es cierta sólo hasta el momento en que el lado superior del cuadro se encuentre dentro de los márgenes del campo magnético (fig. 20.2).

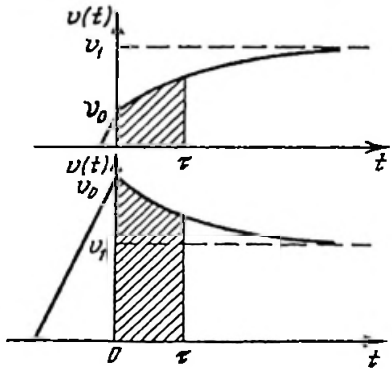


Fig. 20.3. La velocidad del cuadro tiende a un valor determinado v_1 independientemente del valor de la velocidad inicial v_0

Las gráficas de la velocidad del cuadro se ofrecen en la fig. 20.3. La gráfica superior corresponde al caso cuando hacia el momento de la aparición de la fuerza de Ampère ($t = 0$) la velocidad del cuadro v_0 es menor que el valor límite v_1. La gráfica inferior, al caso cuando $v_0 > v_1$. Los sectores rectilíneos oblicuos de las gráficas para $t < 0$ corresponden a la caída libre del cuadro antes de que aparezca la fuerza de Ampère. La distancia que cubre el cuadro en el transcurso del tiempo característico de establecimiento τ es igual al área sombreada de estas gráficas. Con el fin de efectuar la estimación, podemos considerar que, según el orden de la magnitud, dicha área es igual a $v_1\tau$. Si la longitud del lado vertical del cuadro l_1 es mucho menor que dicha distancia $v_1\tau$, no podremos hablar de ningún establecimiento de la velocidad del cuadro. Para que se produzca el establecimiento de la velocidad es preciso que se verifique la desigualdad

$$l_1 \gtrsim v_1\tau = g\left(\frac{mR}{B^2l^2}\right)^2. \qquad (11)$$

Sólo al cumplirse esta condición el campo magnético influirá de modo notorio en el movimiento del cuadro. Es de interés señalar que a semejante condición podemos llegar partiendo de otras consideraciones más evidentes. En efecto, el campo magnético puede influir considerablemente sobre el movimiento del cuadro sólo cuando durante la caída libre, en el tiempo τ, el cuadro recorre una distancia menor que su dimensión vertical l_1: $l_1 \gtrsim g\tau^2$. Poniendo aquí el valor de τ de la fórmula (8), llegamos de nuevo a la condición (11).

Al resolver el problema considerábamos que la región donde existe el campo magnético tiene una brusca frontera (figs. 20.1, 20.2).

Precisamente, la consecuencia de semejante suposición es la existencia de inflexiones en las gráficas de la velocidad con $t = 0$ (fig. 20.3). Como en todo imán real la caída del campo magnético transcurre gradualmente, en realidad al movimiento del cuadro corresponden las gráficas con inflexiones suavizadas.

Al resolver el problema no tomamos en consideración la autoinducción del cuadro en caída, gracias a la cual la corriente de inducción, hablando en rigor, no es igual al valor dado con la fórmula (3). En realidad, se puede despreciar este efecto cuando el campo magnético externo B es mucho mayor que el campo magnético creado por la propia corriente de inducción.▲

21. Procesos transitorios en un electromotor. ¿Cómo transcurre el establecimiento de la velocidad constante de rotación del núcleo del electromotor después de conectarlo a la red con tensión continua?

△ El electromotor de corriente continua es un dispositivo bastante complicado, aunque su principio de funcionamiento es muy

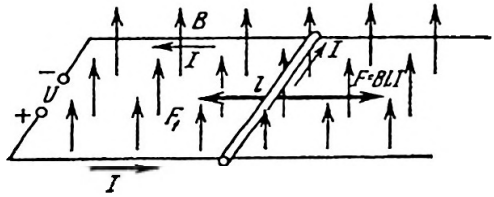


Fig. 21.1. Modelo lineal de un electromotor de corriente continua con excitación independiente

sencillo. Se basa en que sobre un conductor con corriente, situado en un campo magnético externo, actúa la fuerza de Ampère. Por esta razón, es posible comprender los procesos que se producen en el electromotor, considerando su modelo más sencillo que tiene la siguiente forma (fig. 21.1). Por barras de contacto lisas horizontales y paralelas puede desplazarse sin rozamiento un vástago metálico, cuya resistencia eléctrica es igual a R. Todo el sistema está ubicado en un campo magnético homogéneo, cuya inducción B está dirigida en sentido perpendicular al plano formado por las barras. A los extremos de éstas se aplica la tensión continua U. Al pasar la corriente, sobre el vástago actúa la fuerza de Ampère F que puede provocar su desplazamiento por las barras. En semejante dispositivo el vástago móvil es el análogo del núcleo del electromotor, ya que durante su desplazamiento puede realizarse trabajo sobre cuerpos externos.

Este mismo artefacto puede también servir de modelo de un generador de corriente continua si a las barras no se alimenta la tensión, sino que, con ayuda de una fuerza externa, se pone en movi-

miento el vástago. Semejante modelo muestra con evidencia la causa de que los motores de corriente continua sean reversibles.

Para semejante electromotor, en funcionamiento en el régimen generador, el proceso de establecimiento de la velocidad constante de movimiento del inducido ya fue estudiado en el problema anterior. En el ejemplo que en él analizamos (el cuadro en caída por el campo magnético) el papel de fuerza externa constante, que imprimía el movimiento del inducido, era desempeñado por la fuerza de la gravedad, mientras que los papeles de carga externa y resistencia interna del generador, los desempeñaba la resistencia del cuadro. Como la carga externa del generador y el arrollamiento de su inducido forman un circuito eléctrico en serie, los procesos de establecimiento en el generador cargado y en el cortocircuitado, en principio, en nada se diferencian. Sólo será distinto el tiempo característico de establecimiento τ, ya que él depende de la impedancia del circuito.

La analogía advertida con el problema anterior permite de inmediato marcar la vía para analizar el modelo que estudiamos en el régimen de electromotor. Con este fin, hay que escribir la ecuación que determina la intensidad de corriente en el circuito y la ecuación de movimiento del vástago. Como la fem de inducción es proporcional a la velocidad del vástago: $\mathscr{E}_i = Blv$ (fig. 21.1), entonces

$$IR = U - Blv. \tag{1}$$

Designemos la fuerza externa que actúa sobre el vástago por F_1 (fig. 21.1). Como la fuerza de Ampère $F = IBl$, la ecuación de la segunda ley de Newton para el vástago de masa m se escribe en la forma

$$mdv/dt = IBl - F_1. \tag{2}$$

Después de poner en esta ecuación el valor de la corriente de la ecuación (1), ella toma la forma

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{m}\left(\frac{UBl}{R} - F_1\right) - \frac{B^2l^2}{mR}v. \tag{3}$$

La expresión entre paréntesis en el segundo miembro de esta ecuación es positiva si el dispositivo que examinamos funciona en el régimen de electromotor. En efecto, la razón U/R proporciona el máximo valor de la corriente en el circuito cuando el vástago está inmóvil; por ello, $(U/R)Bl$ es igual al valor máximo posible de la fuerza de Ampère. La fuerza externa F no debe superar este valor, ya que, en caso contrario, el artefacto funcionará como generador.

El valor de la velocidad del vástago v_1 en el régimen estacionario, cuando $dv/dt = 0$, se puede hallar igualando a cero el segundo miembro de la ecuación (3):

$$v_1 = \frac{1}{Bl}\left(U - \frac{RF_1}{Bl}\right). \tag{4}$$

Claro está, este valor de v_1 se puede hallar, asimismo, partiendo de consideraciones energéticas, análogamente a como lo hicimos en el problema anterior o en el problema 10, donde se consideraba el régimen estacionario de funcionamiento del motor.

Con el fin de investigar el proceso transitorio en el sistema que consideramos hay que resolver la ecuación (3). Con ayuda de la expresión (4) anotamos para v_1 dicha ecuación en forma más compacta

$$dv/dt = -(v - v_1)/\tau, \quad (5)$$

donde se ha utilizado la designación

$$\tau = \frac{mR}{B^2l^2}. \quad (6)$$

Vamos a considerar que en el momento de conexión a la red el inducido del motor estaba inmóvil: $v(0) = 0$. La solución de la ecuación (5), que satisface a semejante condición inicial, se escribe en la forma

$$v(t) = v_1\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]. \quad (7)$$

La gráfica de la velocidad del vástago se muestra en la fig. 21.2.

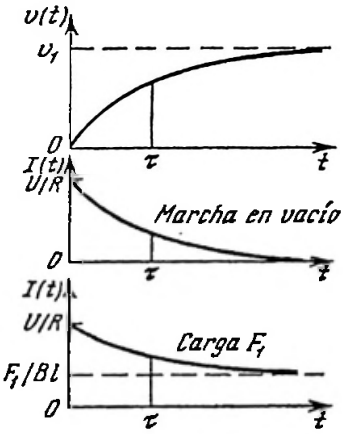


Fig. 21.2. El establecimiento de la velocidad del inducido y la corriente en éste en los regímenes de marcha en vacío y con carga mecánica F_1

La duración del proceso (7) de establecimiento de la velocidad v_1 se caracteriza por el tiempo τ expresado en la fórmula (6).

Los resultados obtenidos, que describen el proceso de establecimiento, son ciertos para todo tipo de carga mecánica tolerable del motor, incluida la marcha en vacío, a la que corresponde $F_1 = 0$. En este caso, el valor estacionario de la velocidad $v_1 = U/Bl$ y la dependencia entre la velocidad y el tiempo se da con la fórmula

$$v(t) = \frac{U}{Bl}\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]. \quad (8)$$

Si ponemos la velocidad $v(t)$ en la ecuación (1), es posible obtener la dependencia entre el tiempo y la corriente consumida por el motor. En el régimen de marcha en vacío esta dependencia tiene la forma

$$I(t) = \frac{U}{R}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \quad (9)$$

La gráfica de la corriente se muestra en la fig. 21.2. En el momento inicial, cuando el inducido está inmóvil, la corriente es la máxima e igual a U/R. A continuación, a medida de la aceleración del indu-

cido la corriente disminuye exponencialmente hasta cero. De este mismo modo depende del tiempo la potencia consumida $P = UI\,(t)$.

Durante la conexión a la red del motor con carga mecánica (que puede ser incluso el rozamiento en los rodamientos), el valor máximo de la corriente en el momento inicial será el mismo que para la marcha en vacío e igual a U/R. A continuación, a medida que el inducido se acelera la corriente decrece, pero no tiende a cero sino a un determinado valor I_1, que es fácil de hallar de la condición de que en el régimen estacionario la fuerza de Ampère I_1Bl compensa la fuerza externa F_1:

$$I_1 = F_1/Bl. \tag{10}$$

Para este caso la gráfica de la corriente se ofrece en la fig. 21.2.

Señalemos que el surgimiento a salto de la corriente al conectar el motor está condicionado con que hemos despreciado por completo la autoinducción del inducido. Cuando se tiene en cuenta la autoinducción, la corriente crecerá gradualmente durante la conexión, pero la duración del crecimiento es, por regla, pequeña en comparación con el proceso de establecimiento de la rotación del núcleo que consideramos. La influencia de la autoinducción sobre este proceso de establecimiento es, por regla, insignificante, ya que en el electromotor con excitación independiente el campo magnético externo es mucho mayor que el que la corriente crea en el inducido. ▲

22. Un diodo en un circuito eléctrico. En un circuito destinado a la carga de un condensador (fig. 22.1), está conectado el diodo D. La característica intensidad-tensión o bien tensión-corriente del dio-

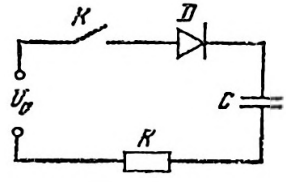


Fig. 22.1. Circuito para cargar un condensador que contiene un diodo

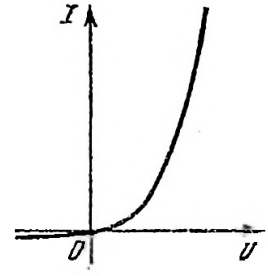


Fig. 22.2. Característica corriente-tensión del diodo

do se muestra en la fig. 22.2. ¿Qué cantidad de calor se desprenderá en la resistencia R y en el diodo después de cerrar la llave K durante el proceso de la carga del condensador?

△ ¿Para qué hay que conectar el diodo en el circuito de carga del condensador? Algunos tipos de condensadores, en particular los elec-

trolíticos, requieren una polaridad determinada de la tensión que se les alimenta. En caso contrario, ellos pueden, simplemente, deteriorarse. El rasgo característico de un diodo es su conductividad unilateral. Por ello, la conexión del diodo al circuito mostrado en la fig. 22.1, protege el condensador contra los deterioros, incluso en el caso cuando a la entrada del circuito sea transmitida una tensión de polaridad opuesta. Con ello, la corriente no pasará por el circuito y, claro está, en la resistencia R no se desprenderá calor.

Si la tensión U_0, alimentada a la entrada, tiene la polaridad requerida, al cerrar la llave K la corriente en el circuito será la máxima en el momento inicial y, a continuación, a medida que el condensador se carga, decrece gradualmente hasta cero. Con el fin de calcular el calor que se desprende en la resistencia directamente por la ley de Joule — Lenz, hay que hallar la dependencia entre la corriente de carga y el tiempo. No obstante, esto se puede evitar si se emplea la ley de la conservación de la energía.

Supongamos que en el proceso de la carga del condensador por el circuito pasó cierta carga q. Con ello, el trabajo realizado por la fuente externa de tensión

$$A = U_0 q. \tag{1}$$

Como la carga del condensador es ahora igual a q, la energía acumulada en el condensador

$$W = \frac{q^2}{2C}. \tag{2}$$

Basándonos en la ley de la conservación de la energía, podemos afirmar que el calor Q, desprendido en la resistencia R y el diodo D, es igual a la diferencia entre el trabajo A, realizado por la fuente externa, y la energía W acumulada en el condensador:

$$Q = A - W. \tag{3}$$

Para obtener la respuesta a la pregunta planteada, nos queda aclarar qué carga q pasó, precisamente, por el circuito y cómo se distribuye el calor Q desprendido entre la resistencia R y el diodo D.

La carga total q, que pasó por el circuito, es fácil de hallar, ya que, a fin de cuentas, la tensión en el condensador U_C se hará igual a la tensión aplicada U_0:

$$q = CU_0. \tag{4}$$

Poniendo el valor de q de la fórmula (4) en las relaciones (1) y (2), obtenemos la cantidad total de calor Q desprendido en la resistencia y el diodo

$$Q = \frac{CU_0^2}{2}. \tag{5}$$

La cuestión es más complicada al aclarar qué parte del calor Q_R se desprendió en la resistencia y qué parte Q_D en el diodo. La causa

de esto reside en la complicada forma de la característica corriente-tensión del diodo, de la que se desprende que la resistencia del diodo depende en alto grado del valor de la tensión aplicada a él. Para entender este problema, sustituyamos, primero, la característica real corriente-tensión del diodo, mostrada en la fig. 22.2, por la idealizada, representada en la fig. 22.3.

A diferencia de la característica real del diodo, vamos a considerar que la resistencia del diodo en la dirección del cierre tiende al infinito (es decir, la corriente inversa es igual a cero). También va-

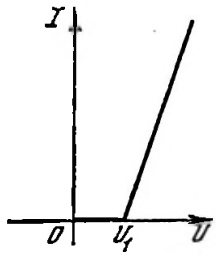


Fig. 22.3. Característica corriente-tensión idealizada del diodo

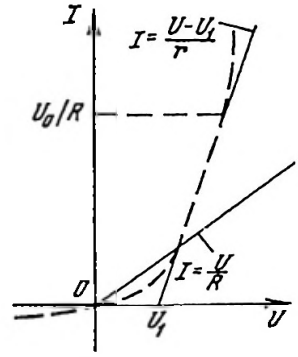


Fig. 22.4. Para la elección de los parámetros U_1 y r de la característica idealizada del diodo. Con el fin de comparar se muestra la característica corriente-tensión de la resistencia R ($I = U/R$)

mos a considerar que la resistencia del diodo en la dirección de paso es infinita hasta que la tensión aplicada alcance cierto valor U_1, después de lo cual la resistencia, a salto, disminuirá hasta cierto valor r. En realidad, esto significa la sustitución del sector de la característica corriente-tensión real, que asciende abruptamente, por la recta en la fig. 22.3. ¿Cómo elegir el valor de U_1 a partir del cual la resistencia del diodo se puede considerar constante y a qué es igual este valor constante de r? Al cerrar la llave, la corriente en el circuito no puede sobrepasar el valor U_0/R. Por ello, el sector de la característica corriente-tensión del diodo, situado más arriba del punto $I = U_0/R$ en la fig. 22.2, no tiene, en general, relación con el presente problema. Consideramos que la resistencia R y la tensión aplicada U_0 son tales que dicho punto se encuentra en el sector abrupto, casi rectilíneo, de la característica corriente-tensión, como se muestra en la fig. 22.4. Sustituyamos ese sector por una recta y continuémosla hasta su intersección con el eje de abscisas. Vamos a considerar que esta recta es la característica corriente-tensión idealizada del diodo. Entonces la tensión U_1 corresponde al punto de intersección de la rec-

ta construida con el eje de abscisas, mientras que su inclinación caracteriza la resistencia del diodo r para las tensiones que superan U_1. La ecuación de esta recta

$$I = \frac{U - U_1}{r}. \tag{6}$$

Para esta característica corriente-tensión idealizada del diodo, la corriente de carga ya se anula cuando la tensión en el condensador alcanza el valor $U_0 - U_1$. Por esta razón, hacia el momento cuando cesa la corriente en el circuito, la carga del condensador será igual a $C(U_0 - U_1)$ y su energía, a $C(U_0 - U_1)^2/2$.

Como en el circuito la corriente sólo existe cuando las tensiones en el diodo son mayores que U_1, sólo «trabaja» el sector oblicuo de la

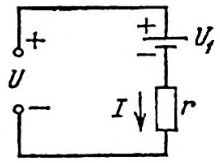


Fig. 22.5. Circuito equivalente de un diodo «idealizado» con la tensión $U > U_1$

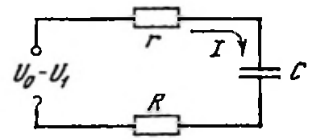


Fig. 22.6. Circuito equivalente a la fig. 22.1 si el diodo tiene una característica corriente-tensión idealizada

característica corriente-tensión idealizada. Pero la ecuación de dicha recta (6) corresponde a la ley de Ohm para un sector no homogéneo del circuito mostrado en la fig. 22.5 con fem de la fuente $U_1 < U$. Por ello, podemos considerar que en el circuito para la carga del condensador se ha conectado, en lugar del diodo, la resistencia óhmica r en serie con R y que la tensión aplicada es igual $U_0 - U_1$ (fig. 22.6). Cuando por semejante circuito pasa la carga $C(U_0 - U_1)$, la fuente equivalente con fem $U_0 - U_1$ realiza el trabajo $C(U_0 - U_1)^2$. Sustrayendo de este trabajo la energía acumulada por el condensador $C(U_0 - U_1)^2/2$, obtenemos el calor Q' que se desprende en ambas resistencias R y r:

$$Q' = \frac{C(U_0 - U_1)^2}{2}. \tag{7}$$

Como las resistencias R y r están unidas en serie, el calor que se desprende en cada una de ellas es proporcional a la resistencia. Por ello, para el calor Q_R, desprendido en la resistencia R, con ayuda de (7), obtenemos

$$Q_R = Q' \frac{R}{R+r} = \frac{C(U_0 - U_1)^2}{2} \frac{R}{R+r}. \tag{8}$$

Si $r \ll R$, casi todo el calor Q' se desprende en la resistencia R.

En efecto, como ya vimos más arriba, la corriente en el circuito se anula sólo cuando la tensión en el condensador se iguala a U_0. Con esto, el paso de una carga adicional corresponde al sector inicial suave de la característica corriente-tensión real del diodo. Como en el mencionado sector la resistencia del diodo es muy grande, la mayor parte del calor, ligada con el paso de la carga adicional, se desprende en el diodo y no en la resistencia R.

Así pues, el calor Q_R desprendido en la resistencia R se da con la expresión (8) (o bien (7) si $r \ll R$). El calor Q_D, que se desprende en el diodo durante todo el proceso de carga del condensador, se puede hallar como la diferencia entre el calor Q, dado con la fórmula (5), y el calor Q_R. ▲

VIII. OSCILACIONES Y ONDAS

Los fenómenos oscilatorios pueden tener la más diferente naturaleza física, sin embargo, a pesar de esto, ellos poseen rasgos comunes e incluso se supeditan a unas mismas regularidades. El enfoque general al estudio de las oscilaciones en distintos sistemas físicos, en virtud de la universalidad de las leyes de los procesos oscilatorios, permite desde un punto de vista único considerar las oscilaciones (vibraciones) mecánicas, electromagnéticas y otras.

Además de la clasificación de las oscilaciones según la naturaleza física de los procesos, ellas se pueden también clasificar de acuerdo con otros rasgos, p. ej., por el procedimiento de su excitación o bien por su cinemática, es decir, por el carácter de la dependencia entre la magnitud en variación y el tiempo. Al clasificar las oscilaciones según el procedimiento de su excitación se distinguen las oscilaciones propias, forzadas, paramétricas y las autooscilaciones. Las oscilaciones propias (naturales) surgen en el caso cuando el sistema físico se saca del estado de equilibrio estable y, a continuación, dicho sistema se abandona a su propia suerte. Las oscilaciones forzadas surgen en el sistema en presencia de un influjo externo periódico. Las autooscilaciones pueden producirse en sistemas no lineales con retroacción en los que hay fuente de energía. Las oscilaciones paramétricas surgen cuando en el sistema alguno de los parámetros que lo caracterizan varía periódicamente con el tiempo. Un ejemplo de excitación paramétrica de las oscilaciones es el columpio: para ponerlo en movimiento la persona se sienta y estira las piernas, cambiando periódicamente la posición del centro de masas del columpio con relación al eje de la suspensión.

Al clasificar las oscilaciones desde el punto de vista cinemático se distinguen las periódicas y no periódicas. Entre las periódicas desempeñan notorio papel las oscilaciones armónicas o bien sinusoidales, con las que la magnitud que describe el sistema varía con el tiempo según la ley

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi). \tag{1}$$

La magnitud A lleva el nombre de amplitud de las oscilaciones, mientras que $\omega t + \varphi$, su fase. El valor de la fase de las oscilaciones en $t = 0$, es decir φ, recibe el nombre de fase inicial. La frecuencia circular o cíclica ω está ligada con el período de las oscilaciones T por la relación

$$T = 2\pi/\omega. \tag{2}$$

Las oscilaciones propias en los sistemas conservativos serán armónicas cuando ellas se describen con la ecuación diferencial

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{3}$$

La solución de semejante ecuación es la función $x(t)$ dada con la expresión (1) para $\omega = \omega_0$. Así pues, el coeficiente de x en la ecuación (3) determina el cuadrado de la frecuencia de las oscilaciones propias ω_0^2. El valor de ω_0 no depende de las condiciones iniciales y sólo se determina por las propiedades del propio sistema oscilatorio. De las condiciones iniciales dependen la amplitud A y la fase inicial φ.

Las oscilaciones forzadas estacionarias siempre tienen el mismo período que el influjo externo que las provoca. Si este influjo es sinusoidal, las oscilaciones forzadas serán también armónicas, es decir, se describirán la fórmula (1) en la que ω será ahora igual a la frecuencia del influjo externo. La amplitud A y el desfasaje φ para las oscilaciones forzadas estacionarias no depende de las condiciones iniciales, sino que se determinan por la amplitud del efecto externo y por la relación entre su frecuencia ω y la frecuencia ω_0 de las oscilaciones propias que pueden tener lugar en el sistema que consideramos. El aumento brusco de la amplitud de las oscilaciones forzadas al aproximarse ω a ω_0 lleva el nombre de resonancia.

Las ondas son el proceso de propagación de las oscilaciones. A pesar de su distinta naturaleza física, las ondas de cualquier tipo: mecánicas, electromagnéticas u otras, tienen mucho de común y se supeditan a regularidades análogas. La onda excitada por una fuente que realiza oscilaciones armónicas recibe el nombre de monocromática.

Sea que las oscilaciones transcurren en cierto punto siguiento la ley

$$x(t) = A \cos \omega t. \tag{4}$$

Entonces, al propagarse la onda desde este punto a lo largo de cierta dirección, las oscilaciones en el punto alejado a la distancia z se produce con cierto retraso que se determina por el tiempo que tarda en pasar la onda dicha distancia:

$$x(t, z) = A \cos \omega (t - z/u). \tag{5}$$

Aquí u es la velocidad de propagación de la onda. La amplitud de las oscilaciones A en la onda plana es por doquier la misma, mientras que en la esférica decrece inversamente proporcional a la distancia desde el centro de la onda.

Durante la propagación simultánea de varias ondas ellas, simplemente, se superponen una sobre otra sin distorsionarse entre sí. La independencia de la propagación de varias ondas lleva el nombre de principio de superposición. Si dichas ondas se crean por fuentes coherentes, durante su superposición surge una figura estable de interferencia, en la que en algunos puntos al sumarse las oscilaciones éstas se refuerzan entre sí y, en otros, a la inversa, se debilitan.

1. Una moneda en un soporte en vibración. Un plano horizontal puede realizar oscilaciones armónicas con una frecuencia ω ya sea en sentido horizontal, o bien en vertical. ¿Al alcanzar qué amplitud de las oscilaciones la moneda se desplazará con relación al soporte?

△ Primero examinemos las oscilaciones verticales del soporte. ¿Bajo qué condición la moneda se moverá junto con el soporte? Sobre la moneda actúan la fuerza de la gravedad y la fuerza de la reacción del soporte que sólo puede estar dirigida hacia arriba. Hasta que la fuerza de la reacción no se anule la moneda se desplazará junto con el soporte. La condición para que la moneda se separe del soporte es la anulación de la fuerza de la reacción. Así pues, la moneda se separará del soporte sólo cuando la aceleración del soporte esté dirigida hacia abajo y supere en módulo la aceleración de la caída libre g.

Supongamos que en el momento de tiempo $t = 0$ el soporte comienza a moverse hacia arriba y su coordenada vertical varía según la ley

$$y(t) = B \operatorname{sen} \omega t. \tag{1}$$

Con ello, la proyección vertical de la aceleración

$$a_y(t) = -\omega^2 B \operatorname{sen} \omega t. \tag{2}$$

Con el fin de hallar el momento de tiempo t_1 cuando se produce la separación de la moneda, hay que hacer $a_y(t) = -g$:

$$\omega^2 B \operatorname{sen} \omega t_1 = g. \tag{3}$$

La solución gráfica de esta ecuación se muestra en la fig. 1.1. Para que la ecuación tenga solución, o sea, se produzca en realidad la separación de la moneda del soporte, se debe cumplir la condición

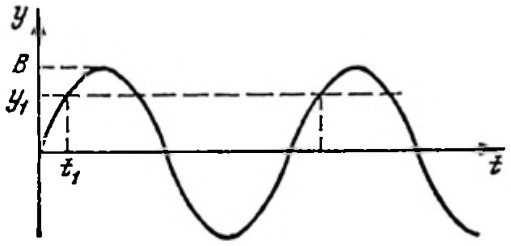


Fig. 1.1. Momento de separación de la moneda con las oscilaciones verticales del soporte

$\omega^2 B > g$. Por ello, la amplitud mínima de las oscilaciones verticales con la que la moneda se separa del soporte, se da con la fórmula

$$B_{\min} = g/\omega^2. \tag{4}$$

Cuanto más alta sea la frecuencia de las oscilaciones, menor será esta amplitud. Como se desprende de la fig. 1.1, la separación de la moneda se produce con el movimiento del soporte hacia arriba desde la posición media, cuando su velocidad disminuye. Es de interés señalar que la posición y_1 del punto de separación, para la frecuencia ω prefijada, no depende de la amplitud de las oscilaciones del soporte. En efecto, poniendo de (3) $\operatorname{sen} \omega t_1 = g/\omega^2 B$ en (1), hallamos $y_1 = g/\omega^2$.

Hasta el momento de tiempo t_1 el soporte y la moneda se mueven conjuntamente. A partir del momento t_1 la gráfica del movimiento de la moneda es una parábola que, en el punto t_1, tiene una tangente común con la sinusoide.

En caso de oscilaciones horizontales del soporte el movimiento de la moneda queda definido por la fuerza de rozamiento que sobre ella actúa. En tanto que la aceleración del soporte no supera en módulo la aceleración máxima μg, que la fuerza de rozamiento puede comunicar a la moneda, ésta se moverá junto con el soporte. Si en cierto momento de tiempo la aceleración del soporte supera dicho valor máximo, la moneda se deslizará por el soporte. Las ecuaciones de este

caso son análogas a (1) y (2):

$$x(t) = A \operatorname{sen} \omega t, \quad a_x(t) = -\omega^2 A \operatorname{sen} \omega t. \tag{5}$$

La amplitud mínima con la que la moneda se deslizará por el soporte se halla de la condición

$$\omega^2 A_{\text{mín}} = \mu g, \text{ de donde } A_{\text{mín}} = \mu g/\omega^2. \tag{6}$$

Es natural que esta amplitud será tanto menor, cuanto menor sea el coeficiente de rozamiento.

Señalemos que en los problemas de semejante género no sólo es de interés la aclaración de las condiciones con las que la moneda se separa del soporte o bien se desplaza con relación a él, sino también la investigación del carácter del movimiento ulterior de la moneda tanto con oscilaciones verticales, como con horizontales del soporte. Semejante problema es de mayor interés, pero, al mismo tiempo, más complicado. ▲

2. Movimiento de una moneda por un soporte en vibración. ¿Qué forma tiene la gráfica de la velocidad de una moneda, yaciente en un soporte que realiza oscilaciones horizontales armónicas con frecuencia ω y amplitud A?

△ Como aclaramos en el problema anterior al verificarse la condición $\omega^2 A \leqslant \mu g$ la moneda se desplazará junto con el soporte. Con

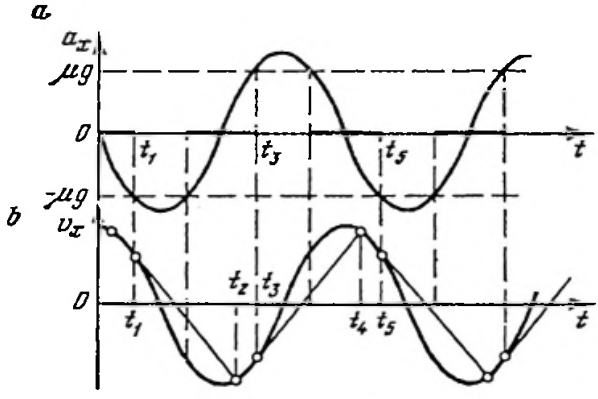


Fig. 2.1. En los intervalos t_2, t_3 y t_4 la moneda se mueve junto con el soporte

ello, la gráfica de la velocidad de la moneda coincide con la de la velocidad del soporte y es, en sí, la cosinusoide $v_x(t) = \omega A \cos \omega t$ mostrada en la fig. 2.1*b*. Por ello, sólo es de interés el caso contrario $\omega^2 A > \mu g$, cuando la moneda se desplaza con relación al soporte.

En la fig. 2.1*a* se aduce la gráfica de la aceleración del soporte $a_x(t) = -\omega^2 A \operatorname{sen} \omega t$ en la que se indican las regiones donde el

módulo de dicha aceleración no supera el valor μg, es decir, la aceleración máxima que la fuerza de rozamiento puede comunicar a la moneda. Precisamente en estos intervalos de tiempo (intervalos de «captura») la moneda podría moverse junto con el soporte.

Supongamos que hasta el momento t_1 (fig. 2.1) la moneda se mueve junto con el soporte. En el momento t_1 se produce la «separación» de la moneda y el rozamiento en reposo se sustituye por el rozamiento de deslizamiento. Como la fuerza de rozamiento de deslizamiento es constante, el movimiento posterior de la moneda en el sistema inercial de referencia (es decir, en el sistema de referencia del laboratorio y no respecto del soporte) transcurre con aceleración constante. Por ello, a partir del momento t_1, la gráfica de la velocidad de la moneda es una línea recta, cuya inclinación viene determinada por la fuerza de rozamiento de deslizamiento. Si consideramos que esta fuerza es igual a la fuerza máxima de rozamiento en reposo, la mencionada recta será tangente a la sinusoide en el momento de la «separación» t_1.

El carácter del movimiento ulterior de la moneda depende de en qué momento de tiempo su velocidad será de nuevo igual a la del soporte. Si esto sucede dentro de los límites del intervalo de «captura», p. ej., en el momento t_2 (fig. 2.1), en el transcurso del intervalo desde t_2 hasta el límite del intervalo de «captura» t_3, la moneda se moverá junto con el soporte. En el momento t_3 de nuevo se produce la «separación» y el movimiento posterior otra vez transcurre con la misma aceleración en módulo, pero dirigida en sentido opuesto. En el momento t_4 la velocidad de la moneda y del soporte se iguala de nuevo y ellos se mueven en conjunto hasta la siguiente «separación» que se produce en el momento t_5. A continuación, todo se repite otra vez. Así pues, la gráfica de la velocidad de la moneda es, de por sí, una «sierra» compuesta de segmentos de sinusoides y de rectas (fig. 2.1*b*).

Ahora, analicemos el caso cuando la velocidad de la moneda y del soporte se iguala fuera de los límites del siguiente intervalo de «captura» (fig. 2.2). Aquí, la gráfica de la velocidad de la moneda estará constituida por segmentos rectilíneos, cuya inclinación, igual a la aceleración de la moneda $\pm\mu g$, queda definida por la fuerza de rozamiento de deslizamiento. En esta gráfica las inflexiones corresponden a los momentos de la variación del sentido de la fuerza de rozamiento. Esto se produce al variar el sentido de la velocidad relativa, es decir, en las intersecciones de las rectas con la sinusoide del gráfico de la velocidad del soporte. La altura de los dientes de semejante «sierra», es decir, el valor máximo de la velocidad de la moneda $v_{máx}$, es igual al producto de la inclinación μg por un cuarto de período de las oscilaciones del soporte:

$$v_{máx} = \mu g T/4 = \pi\mu g/2\omega.$$

Así pues, son posibles tres regímenes de movimiento de la moneda sobre el soporte en vibración en función del valor del parámetro adimensional $\omega^2 A/\mu g$. Como hemos visto, cuando $\omega^2 A/\mu g < 1$ la moneda se moverá junto con el soporte. Para valores de este parámetro mayores que la unidad, sólo parte del período la moneda se moverá conjuntamente con el soporte. Semejante régimen de movimiento se realiza hasta que el parámetro $\omega^2 A/\mu g$ alcance el valor $\sqrt{1 + \pi^2/4}$.

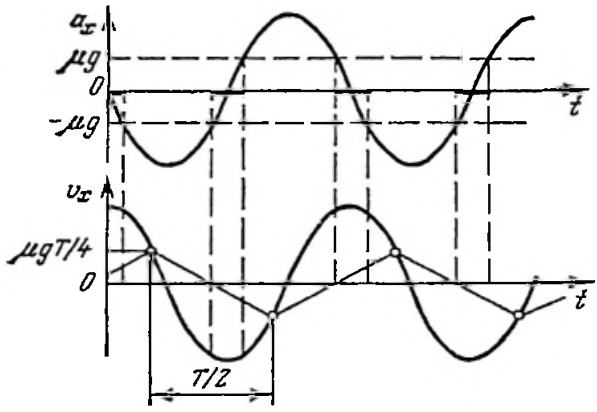


Fig. 2.2. La moneda se desliza continuamente respecto del soporte

Con el fin de cerciorarse de esto, es suficiente comprender que el paso al tercer régimen, durante el cual la moneda se desliza continuamente con relación al soporte, se produce cuando el producto de la inclinación de la recta μg por la mitad del período $T/2$ es igual al valor doble de la velocidad del soporte en el momento de la separación:

$$\mu g \pi/\omega = 2\omega A \cos \omega t_1.$$

Poniendo aquí $\cos \omega t_1 = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \omega t_1} = \sqrt{1 - (\mu g/\omega^2 A)^2}$, hallamos el valor límite del parámetro que nos interesa:

$$\omega^2 A/\mu g = \sqrt{1 + \pi^2/4}.$$

Vemos que el paso de un régimen de movimiento a otro es posible al aumentar bien la frecuencia, o bien la amplitud de las oscilaciones A, o al disminuir el coeficiente de rozamiento μ. ▲

3. **Péndulo combinado.** Consideremos el péndulo ofrecido en la fig. 3.1. Una ligera barra de largura l está suspendida de un eje en el punto A de forma que ella puede moverse en el plano de la figura. Al peso de masa m, en el extremo de la barra, están fijados iguales resortes de rigidez k, dispuestos en el mencionado plano horizontalmente. Los otros extremos de los resortes están fijados. Hallen la frecuencia

de las pequeñas oscilaciones propias de semejante péndulo en ausencia del rozamiento. Las masas de la barra y los resortes se desprecian.

△ Si no hubiera resortes, el sistema que examinamos sería un péndulo simple ordinario, realizando oscilaciones en el campo de la gravedad. La frecuencia de las oscilaciones propias de semejante péndulo ω_1 depende de la aceleración de la caída libre y de la largura de la barra l:

$$\omega_1^2 = g/l. \qquad (1)$$

Y a la inversa, en ausencia de la fuerza de la gravedad el sistema dado se convierte en un péndulo de resorte, en el que la masa m oscila en el plano horizontal, alrededor de su posición de equilibrio, bajo

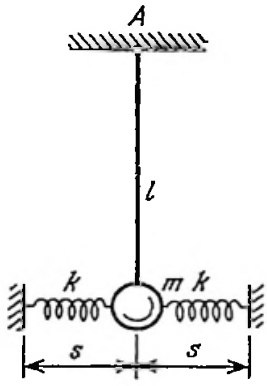


Fig. 3.1. Las oscilaciones de semejante péndulo están condicionadas tanto por la fuerza de gravedad, como por las fuerzas elásticas

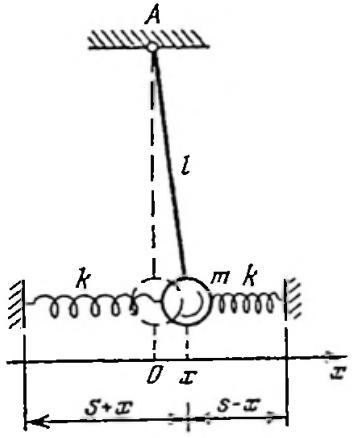


Fig. 3.2. Para calcular las fuerzas que actúan sobre el peso desviado de la posición de equilibrio

el efecto de las fuerzas elásticas. Como sobre el cuerpo actúan dos resortes, la expresión para la frecuencia de las oscilaciones propias de semejante péndulo tiene la forma

$$\omega_2^2 = 2k/m. \qquad (2)$$

Es fácil obtener la expresión para la frecuencia de las oscilaciones propias del péndulo combinado que consideramos, cuando sobre su movimiento influyen tanto la fuerza de la gravedad, como las fuerzas elásticas de los restortes deformados. Con este fin, como por regla, hay que considerar las fuerzas que actúan sobre el péndulo, sacado de la posición de equilibrio, y escribir la ecuación de la segunda ley de Newton.

Sea que el peso está desplazado a la derecha de la posición de equilibrio a una distancia x (fig. 3.2). En esta posición sobre el peso actúan

en dirección horizontal dos fuerzas F_1 y F_2 dirigidas hacia la posición de equilibrio. La fuerza F_1 está condicionada por el efecto del campo de la gravedad. Si la desviación x es pequeña en comparación con la longitud del péndulo l ($|x| \ll l$), para la proyección de esta fuerza sobre el eje x será cierta la expresión aproximada

$$F_1 = -mgx/l. \tag{3}$$

La fuerza F_2 es la resultante de las fuerzas que actúan sobre el peso por parte de los resortes. Para la dirección elegida del eje x, indicada en la fig. 3.2, la proyección de la fuerza que actúa sobre el peso en la posición de equilibrio por parte del resorte derecho, es igual a $k(s - s_0)$, donde s_0 es la longitud del resorte no deformado y s, la distancia entre los extremos del resorte para la posición de equilibrio del peso. Si $s > s_0$, o sea, el resorte está extendido, dicha fuerza estará dirigida a la derecha, si el resorte está comprimido ($s < s_0$), a la izquierda. La proyección de la fuerza que actúa sobre el peso en la posición de equilibrio, desde el resorte izquierdo, es igual a $k(s - s_0)$. Cuando el peso se encuentra desplazado del equilibrio en x (fig. 3.2), por parte del resorte derecho actúa una fuerza cuya proyección es igual a $k(s - x - s_0)$, en tanto que desde el izquierdo, $-k(s + x - s_0)$. Por esto, la proyección de la resultante de la fuerza F_2 será igual a la suma

$$F_2 = k(s - x - s_0) - k(s + x - s_0) = -2kx. \tag{4}$$

Indiquemos que F_2 siempre está dirigida hacia la posición de equilibrio y no depende de que los resortes, en la posición de equilibrio del peso, estén extendidos o bien comprimidos.

Teniendo en cuenta las expresiones (3) y (4), la ecuación de la segunda ley de Newton se escribe en la forma

$$ma = -mgx/l - 2kx. \tag{5}$$

Como, por regla, se suele adoptar, designemos con $\ddot{x}$ la aceleración a, igual a la segunda derivada del desplazamiento x. Entonces, la ecuación (5) se puede anotar en la siguiente forma:

$$\ddot{x} + (g/l + 2k/m)\, x = 0. \tag{6}$$

Así pues, para el sistema que estudiamos la segunda ley de Newton conduce a la ecuación diferencial de las oscilaciones armónicas, para las que el cuadrado de la frecuencia ω_0^2 es igual al coeficiente de x:

$$\omega_0^2 = g/l + 2k/m. \tag{7}$$

Comparando esta fórmula con las expresiones (1) y (2), nos cercioramos de que el cuadrado de la frecuencia de las oscilaciones propias del péndulo combinado es igual a la suma de los cuadrados de las frecuencias ω_1 y ω_2 que son las frecuencias de las oscilaciones propias del péndulo al someterlas al influjo, por separado, de cada una

de las causas que provocan las oscilaciones:

$$\omega_0^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2. \tag{8}$$

La propiedad que hemos revelado está bastante extendida para procesos oscilatorios de diversa naturaleza: si cierta magnitud física puede efectuar oscilaciones propias bajo el efecto de varias causas, al actuar ellas simultáneamente la frecuencia de las oscilaciones satisface la regla (8).

Claro está, el resultado (7) u (8) obtenido satisface los casos límites, es decir, cuando bien la rigidez de los resortes, o bien la fuerza de la gravedad tienden a cero. Es de interés el caso límite para el que la largura de la barra l crece infinitamente. Si $l \to \infty$ llegamos al mismo resultado que si $g \to 0$. En tal caso, el papel de la barra sólo se reduce a sostener el peso que oscila bajo el efecto de los muelles. ▲

4. Péndulo asimétrico. Un péndulo, como el del problema anterior, en lugar de resortes tiene fijada al peso por un lado una goma elástica que sólo manifiesta propiedades elásticas al extenderse (fig. 4.1). Cuando el péndulo se encuentra en posición vertical la goma no

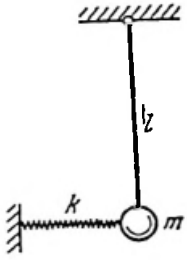


Fig. 4.1. Con la posición vertical del péndulo la goma no está extendida

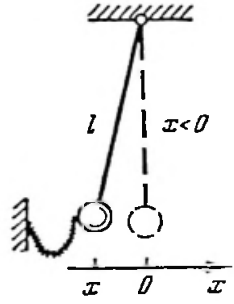


Fig. 4.2. Al desviar el péndulo a la izquierda la goma no influye sobre su movimiento

está extendida. El desplazamiento del peso a la derecha conduce a la extensión de la goma que satisface la ley de Hook: $F = -kx$. Durante el desplazamiento del peso a la izquierda la goma simplemente queda suspendida. Hallen el período de las oscilaciones propias de semejante péndulo asimétrico.

△ Cuando el péndulo se desplaza a la derecha la goma se extiende y el movimiento del peso transcurre según la misma ley que el movimiento del péndulo combinado del problema 1. La única diferencia consiste en que en lugar de dos resortes ahora tenemos sólo uno. Por ello, para $x > 0$

$$ma = -mgx/l - kx \quad (x > 0). \tag{1}$$

Introduciendo para la aceleración a la designación $\ddot{x}$, anotamos (1) en la forma

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (x > 0) \tag{2}$$

donde la frecuencia de las oscilaciones propias ω_0 se determina por la relación

$$\omega_0^2 = g/l + k/m. \tag{3}$$

De la ecuación (2) se desprende que el movimiento del peso transcurre según la misma ley que en caso de las oscilaciones armónicas con frecuencia ω_0 mientras $x > 0$, ya que la fuerza elástica $-kx$ actúa sobre el peso sólo mientras el péndulo está desviado a la derecha. En cuanto el péndulo pasa por la posición de equilibrio y comienza a desplazarse a la izquierda, cesa el efecto de la goma y el péndulo se mueve del mismo modo que con la oscilación libre en el campo de gravedad (fig. 2.2). La ecuación diferencial de semejante movimiento tiene la forma

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = 0 \quad (x < 0), \text{ donde } \omega_1^2 = g/l. \tag{4}$$

Así pues, el cuadro completo del movimiento del péndulo con la goma no se describe con una ecuación diferencial. Cada vez, en el momento del paso del péndulo por la posición de equilibrio, para la descripción del movimiento ulterior hay que pasar de una ecuación a otra: de la (2) a la (4), si el peso pasa por la posición de equilibrio de derecha a izquierda y de la ecuación (4) a la (2), si esto sucede de izquierda a derecha.

El período T, durante el cual se realiza el ciclo completo del movimiento del péndulo asimétrico que examinamos, se compone de dos semiperíodos, correspondientes a las oscilaciones armónicas con frecuencias ω_0 y ω_1

$$T = \pi\,(1/\omega_0 + 1/\omega_1). \tag{5}$$

Es interesante comparar entre sí la desviación máxima del péndulo durante sus desplazamientos a derecha e izquierda de la posición de equilibrio. P. ej., esto se puede hacer construyendo la gráfica de la dependencia entre el desplazamiento del peso y el tiempo. Supongamos que en el momento inicial de tiempo $t = 0$ el peso se desplaza a la derecha a una distancia A_0 de la posición de equilibrio y que se suelta sin velocidad inicial. Hasta que el peso alcance la posición de equilibrio, la gráfica de su movimiento será parte de la cosinusoide correspondiente a la solución de la ecuación (2) (fig. 4.3):

$$x\,(t) = A_0 \cos \omega_0 t \quad (0 < t < \pi/2\omega_0). \tag{6}$$

Después de pasar la posición de equilibrio, o sea, cuando $x < 0$, la gráfica de movimiento será parte de otra cosinusoide correspondiente a la ecuación (4). Como hemos aclarado, dicha cosinusoide tiene otro

período y, claro está, otra amplitud A_1. Pero en los puntos donde las mencionadas cosinusoides sustituyen la una a la otra, ellas tienen una tangente común (fig. 4.3). En efecto, la inclinación de la tangente en la gráfica de la dependencia $x\ (t)$ determina la velocidad del cuerpo, que en el momento de paso por la posición de equilibrio

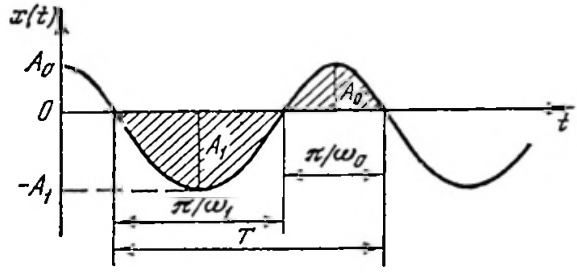


Fig. 4.3. Las figuras somebreadas, limitadas por la gráfica de la dependencia $x\ (t)$, son semejantes geométricamente

no varía. Tales cosinusoides son geométricamente semejantes (véanse los sectores sombreados en la fig. 4.3), por ello la razón de sus amplitudes es igual a la razón de los respectivos semiperíodos:

$$A_1/A_0 = \omega_0/\omega_1. \tag{7}$$

Después de poner los valores de las frecuencias ω_0 y ω_1, de aquí obtenemos

$$A_1 = A_0\sqrt{1 + kl/mg}. \tag{8}$$

A la relación (7) podemos llegar, asimismo, partiendo de consideraciones energéticas. La energía mecánica total del sistema que investigamos se conserva, y en los puntos de parada, donde las desviaciones del péndulo son las máximas, ella coincide con la energía potencial. Por ello, son iguales los valores de ésta en los puntos extremos. Como la fuerza que actúa es proporcional al desplazamiento, la energía potencial es proporcional al cuadrado del desplazamiento. El coeficiente de proporcionalidad determina el cuadrado de la frecuencia de las oscilaciones. Por esto, la expresión para la energía potencial E_p se puede escribir en la forma

$$E_p = \frac{m\omega^2 x^2}{2}. \tag{9}$$

Remarquemos que la expresión dada es cierta tanto en caso de desviación del péndulo a la izquierda, cuando la energía potencial es la energía del peso en el campo de la gravedad, como en caso de desviación a la derecha, cuando la energía potencial del sistema se compone de la energía del peso en el campo de la gravedad y la energía poten-

cial de la goma extendida. Claro está, en la fórmula (9) hay que poner en cada caso los correspondientes valores de las frecuencias ω_0 o ω_1. Ahora, si igualamos los valores de la energía potencial en los puntos extremos a la izquierda y la derecha:

$$\frac{m\omega_1^2 A_1^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A_0^2}{2},$$

de inmediato llegamos a la misma relación (8). ▲

5. **Circuito oscilante con fuente de corriente y su analogía mecánica.** La fuente con fem $\mathscr{E}$ y resistencia interna nula está conectada en serie con una inductancia y un condensador (fig. 5.1). En el momento inicial de tiempo el condensador no está cargado. Hallen la dependencia entre el tiempo y la tensión en el condensador después de cerrar la llave K. ¿En qué sistema mecánico el proceso de las vibraciones será análogo a las oscilaciones en el circuito que consideramos?

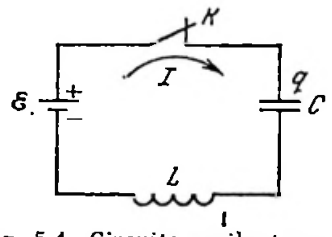


Fig. 5.1. Circuito oscilante que contiene la fuente de alimentación

△ Es natural que el estudio de los procesos que transcurren en el circuito que investigamos comience por la composición de la ecuación para la corriente en él. Todos los elementos del circuito están conectados en serie y, por esta razón, la intensidad de corriente en todos sus sectores será igual en el momento dado de tiempo, en tanto que la suma de las tensiones en todos los elementos es igual a la fem. Como según el planteamiento la resistencia interna de la fuente de corriente es nula, entonces

$$U_L + U_C = \mathscr{E}, \tag{1}$$

donde U_C es la tensión en el condensador; U_L, la tensión en la inductancia.

La tensión en el condensador U_C está ligada con la carga q de su armadura superior y con su capacidad C por la relación $U_C = q/C$. En cualquier momento de tiempo la tensión en la inductancia es igual en módulo y de signo contrario a la fem de autoinducción y, por ello, $U_L = L\,dI/dt$. La corriente en el circuito I, como se desprende de la fig. 5.1, es igual a la velocidad de variación de la carga en la armadura superior del condensador: $I = dq/dt$. Poniendo la corriente en la expresión para la tensión en la inductancia y designando con $\ddot{q}$ la segunda derivada respecto del tiempo de la carga del condensador q, anotemos así la ecuación (1):

$$L\ddot{q} + q/C = \mathscr{E}. \tag{2}$$

Introduciendo la designación $\omega_0^2 = 1/LC$, escribimos (2) en la forma

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = \mathscr{E}/L. \tag{3}$$

Esta ecuación sólo se diferencia de la ecuación diferencial de las oscilaciones armónicas libres con frecuencia ω_0, porque en su segundo miembro, en lugar de cero, está la magnitud constante $\mathscr{E}/L$. Dicha ecuación se puede reducir a la de las oscilaciones armónicas si hacemos una simple sustitución

$$q = Q + \mathscr{E}/L\ \omega_0^2. \tag{4}$$

Ya que $\ddot{q} = \ddot{Q}$, como resultado de semejante sustitución el segundo miembro en (3) desaparece y ella toma la forma

$$\ddot{Q} + \omega_0^2 Q = 0. \tag{5}$$

Vemos que, en efecto, ésta es la ecuación de oscilaciones armónicas libres con frecuencia ω_0, sólo que ahora la magnitud que realiza las oscilaciones sinusoidales no es la carga de la armadura q, sino la magnitud Q introducida en la relación (4):

$$Q\ (t) = Q_0 \cos\ (\omega_0 t + \alpha). \tag{6}$$

Las constantes Q_0 y α deben ser determinadas de las condiciones iniciales.

Ahora, es fácil escribir la expresión para la magnitud $q(t)$ que nos interesa. Teniendo en cuenta que el segundo sumando en el segundo miembro de la relación (4) es igual a $C\mathscr{E}$, para la carga del condensador $q(t)$, con ayuda de (6), obtenemos

$$q(t) = Q_0 \cos\ (\omega_0 t + \alpha) + C\mathscr{E}. \tag{7}$$

Según el planteamiento del problema, en el momento inicial de tiempo $t = 0$ el condensador no está cargado y la llave abierta, es decir, en el circuito no hay corriente. Por esta razón, las condiciones iniciales, correspondientes al problema que estudiamos, tienen la forma

$$q(0) = 0, \quad I(0) = 0. \tag{8}$$

Con el fin de elegir las constantes Q_0 y α que satisfagan las condiciones iniciales (8), primero, por medio de (7), hay que hallar la expresión para la corriente I en el circuito:

$$I(t) = dq/dt = -Q_0\omega_0 \operatorname{sen}\ (\omega_0 t + \alpha). \tag{9}$$

Haciendo en las fórmulas (9) y (7) $t = 0$ y tomando en consideración las condiciones iniciales (8), obtenemos las ecuaciones para hallar Q_0 y α:

$$Q_0 \cos \alpha + C\mathscr{E} = 0, \quad -Q_0\omega_0 \operatorname{sen} \alpha = 0. \tag{10}$$

De la primera relación (10) se desprende que $Q_0 \neq 0$. Entonces, de la segunda relación se deduce que $\operatorname{sen} \alpha = 0$, es decir, la fase inicial

de las oscilaciones α se puede hacer igual a cero. Poniendo $\alpha = 0$ en la primera relación (10), hallamos $Q_0 = -C\mathcal{E}$. Así pues, la solución de la ecuación (3) que satisface las condiciones iniciales (8), tiene la forma

$$q(t) = C\mathcal{E}\,(1 - \cos \omega_0 t). \qquad (11)$$

Es evidente que esta misma forma la tiene también la dependencia entre el tiempo y la tensión en el condensador $U(t) = q/C$.

Las gráficas de la dependencia de la carga del condensador y la corriente respecto del tiempo se muestran en la fig. 5.2. De esta gráfica se deduce que la carga del condensador realiza una oscilación armónica junto al valor $q = C\mathcal{E}$, correspondiente a la carga que tendría el condensador en el circuito que investigamos (fig. 5.1) en estado de equilibrio. Las oscilaciones de la carga se producen entre los valores $q = 0$ y $q = 2C\mathcal{E}$, de modo que el signo de la carga en cada una de las armaduras no varía. Las oscilaciones de la corriente, a diferencia de las de la carga, se producen junto al valor $I = 0$. La tensión máxima en el condensador es igual a la fem doble de la fuente: $U_{C\text{máx}} = 2\mathcal{E}$.

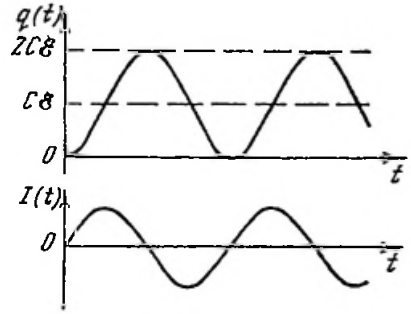


Fig. 5.2. Dependencia entre la carga del condensador, la corriente en el circuito y el tiempo

Puede surgir la pregunta, cómo puede la fuente con fem $\mathcal{E}$ cargar el condensador hasta una tensión igual a $2\mathcal{E}$. Esto se explica por la presencia de la inductancia en el circuito de carga: el efecto de la fem de autoinducción conduce a que la corriente en el circuito no puede anularse en el momento cuando la tensión en el condensador alcanza un valor igual a la fem de la fuente y, por ello, el condensador continúa cargándose.

Pasando al examen del sistema mecánico, análogo al circuito eléctrico investigado, recordemos que al circuito oscilante, que contiene inductancia y capacidad, se puede poner en correspondencia el péndulo de resorte. Con ello, la carga del condensador es análoga al desplazamiento del peso, y la corriente en el circuito, a la velocidad de movimiento del peso. El resorte elástico es el análogo del condensador, mientras que la masa en movimiento, el análogo de la inductancia.

Pero en el circuito considerado, además del condensador y la inductancia, hay un elemento más: la fuente de alimentación. Gracias a la fuente en tal circuito es posible la aparición de oscilaciones incluso en el caso, cuando en el momento inicial tanto la carga del condensador, como la corriente en el circuito son iguales a cero.

Como en el instante inicial en el circuito eléctrico la carga del condensador y la corriente son iguales a cero, en el análogo mecánico de dicho esquema en dicho instante el resorte debe estar no deformado y el peso, en reposo. Sólo nos queda inventar qué puede desempeñar en el sistema mecánico el papel de la fuente de corriente: el análogo mecánico de ésta debe poner el sistema en movimiento sin golpe inicial y ha de seguir funcionando en el proceso de las oscilaciones.

Es fácil comprender que este papel lo desempeñará en el sistema mecánico el campo de gravedad, si el péndulo de resorte se dispone por la vertical, apoyando el peso con un soporte de modo que el muelle no esté deformado (fig. 5.3) y, a continuación, se retira bruscamente el soporte. Confeccionemos la ecuación de movimiento para semejante péndulo. Dirijamos el eje x en sentido vertical hacia abajo y registremos el desplazamiento del peso x a partir de la posición inicial, en la que el resorte no está deformado. Entonces, la proyección de la fuerza que actúa sobre el peso por parte del muelle será igual a $-kx$. Como sobre el peso ejerce, asimismo, su efecto la fuerza de la gravedad, la ecuación de la segunda ley de Newton tiene la forma

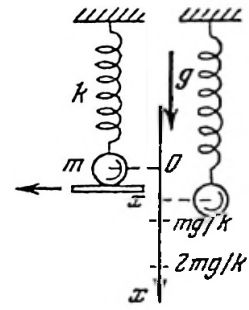


Fig. 5.3. En el momento inicial el muelle no está deformado y el peso está inmóvil. A continuación el soporte se quita

$$ma = mg - kx. \tag{12}$$

Designando la aceleración del resorte, es decir, la segunda derivada del desplazamiento respecto del tiempo, con $\ddot{x}$ e introduciendo la designación $\omega_0^2 = k/m$, anotamos la ecuación (12) así:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = g. \tag{13}$$

Vemos que los procesos en el sistema mecánico y en el circuito eléctrico, examinado más arriba, se describen con iguales ecuaciones (13) y (3). También serán las mismas las condiciones iniciales: en el circuito eléctrico, la ausencia de la carga del condensador y de la corriente en el momento inicial (relaciones (8)) corresponden a la igualdad a cero del desplazamiento del peso y de su velocidad en el momento cuando se quita el soporte:

$$x(0) = 0, \quad v(0) = 0. \tag{14}$$

Así pues, el sistema mecánico que consideramos es, en efecto, el análogo del circuito eléctrico y todas las magnitudes que se com-

paran varían con el tiempo según la misma ley. Por ello, el desplazamiento del peso x (t) se da con la fórmula (11) en la que, en lugar de la magnitud $C\mathscr{E}$, hay que poner su análogo en el sistema mecánico. De la comparación de las ecuaciones (3) y (13) está claro que la magnitug $\mathscr{E}/L$ se debe sustituir por g, en tanto que la magnitud $\mathscr{E}\,C = \mathscr{E}/L\omega_0^2$, por $g/\omega_0^2 = mg/k$:

$$x\,(t) = \frac{mg}{k}\,(1 - \cos\omega_0 t). \qquad (15)$$

La gráfica de la dependencia x (t) se representa por la misma fig. 5.2. Vemos que las oscilaciones del peso transcurren junto al valor $x = mg/k$, correspondiente a la deformación estática del resorte bajo la gravedad del peso, es decir, junto a la posición de equilibrio del sistema en el campo de gravedad.

Es de interés examinar las transformaciones energéticas que se producen durante las oscilaciones en el circuito eléctrico dado y en el sistema mecánico correspondiente a él. Antes de cerrar la llave, mientras la carga del condensador y la corriente en la inductancia son iguales a cero, el campo eléctrico en el condensador y el magnético en la inductancia no existen, es decir, son iguales a cero las energías que a ellos corresponden. De modo absolutamente igual, en el sistema mecánico, antes de quitar el soporte, la energía potencial elástica del resorte y la cinética del peso, son iguales a cero. Después de quitar el soporte, el peso, bajo el efecto de la fuerza de la gravedad, desciende y, con ello, adquiere velocidad y energía cinética. Simultáneamente, crece la deformación del resorte y la energía potencial elástica relacionada con ella. Después de pasar por la posición de equilibrio $x = mg/k$, la velocidad y la energía cinética del peso comienzan a decrecer y en el punto extremo inferior $x = 2\,mg/k$, la energía cinética se anula. La energía potencial elástica del resorte $E_p = kx^2/2$, en ese momento, alcanza su máximo valor $E_p = 2m^2g^2/k$. Toda esta reserva de energía elástica fue adquirida por el muelle a cuenta del trabajo de la fuerza de la gravedad. En efecto, al descender el peso, su energía potencial en el campo de gravedad disminuyó, precisamente, en esa misma magnitud $mg \cdot 2mg/k$. En el transcurso de la segunda mitad del período se produce la transformación inversa de la energía potencial de la deformación elástica en la energía potencial del peso en el campo de gravedad.

Transformaciones de la energía iguales en absoluto transcurren en el circuito eléctrico. Durante la primera mitad del período, a cuenta del trabajo que realiza la fuente de corriente, surge la energía del campo magnético de la inductancia y del campo eléctrico del condensador, con la particularidad de que al final de este intervalo de tiempo toda esta energía se acumula en el condensador. En el transcurso de la segunda mitad del período se producen las transformaciones inversas de la energía y toda ella retorna a la fuente de corriente. Por

lo visto, esto es posible sólo en virtud de que la resistencia interna de la fuente es igual a cero. Con otras palabras, todos los procesos en la fuente son reversibles y el paso por ella de la carga no está ligado con el desprendimiento de calor.

No obstante, toda fuente de corriente real (lo mismo que la inductancia con los conductores de conexión) tiene resistencia. Por ello, en el transcurso de los procesos que se producen, inevitablemente se desprende calor y las transformaciones energéticas son irreversibles. En realidad, las oscilaciones serán amortiguadas (fig. 5.4), de forma que, a fin de cuentas, la tensión en el condensador se hace igual a la fem de la fuente.

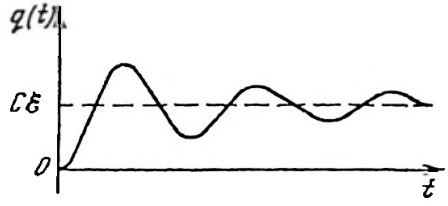


Fig. 5.4. En el circuito con resistencia las oscilaciones de la carga del condensador se amortiguan

En un sistema mecánico real siempre hay rozamiento. Por ello, en él también es inevitable el desprendimiento de calor, es decir, las transformaciones de la energía mecánica son, asimismo, irreversibles. Las oscilaciones serán amortiguadas y, al fin y al cabo, el peso se establece en la posición de equilibrio $x = mg/k$. ▲

6. **Péndulo doble.** El punto A de suspensión del péndulo doble realiza oscilaciones armónicas con pequeña amplitud en dirección horizontal (fig. 6.1). La largura del hilo inferior es l, la masa de la bola inferior es igual a m y la de la superior M. ¿Cuál debe ser el período de las oscilaciones del punto de suspensión A para que el hilo superior siempre permanezca en posición vertical?

△ Consideremos el sistema de las bolas m y M unidas con un hilo de longitud l. Supongamos que hemos elegido tal período de las oscilaciones T del punto de suspensión A que durante las oscilaciones de nuestro péndulo doble el hilo superior permanece siempre en posición vertical. Esto significa que todas las fuerzas externas, que actúan sobre el sistema a investigar, a saber: las fuerzas de la gravedad y la fuerza de tensión del hilo superior, están dirigidas verticalmente. De aquí se desprende que el centro de masas del sistema no se desplaza en sentido horizontal. Con otras palabras, en cualquier momento de tiempo, las bolas se mueven en direcciones opuestas y la razón de su aceleración es inversamente poporcional a la razón de sus masas:

$$a_1/a_2 = M/m. \tag{1}$$

Por otro lado, de la fig. 6.2 se desprende directamente que

$$a_1/a_2 = s/(l - s). \tag{2}$$

Comparando (1) y (2), hallamos

$$s = \frac{l}{1 + m/M}. \tag{3}$$

Ahora, intentemos imaginarnos qué tipo de oscilaciones son éstas. A ambas bolas la aceleración es comunicada por la componente horizontal de la fuerza de tensión del hilo inferior. Como el punto B (centro de masas de las bolas) no se desplaza en sentido horizontal, el movimiento de la bola inferior se puede representar, aproxima-

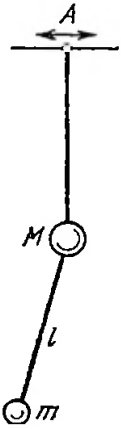


Fig. 6.1. El punto de suspensión A realiza oscilaciones armónicas con tal frecuencia que el hilo superior está todo el tiempo en posición vertical

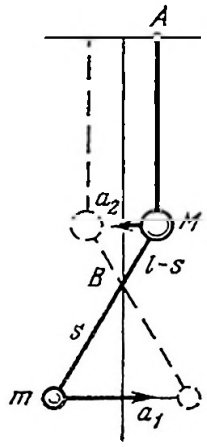


Fig. 6.2. Si el hilo superior queda en posición vertical durante las oscilaciones, el centro de masas de las bolas B no se desplaza en sentido horizontal

damente, como las oscilaciones libres de un péndulo simple de largura s. Hablando en rigor, el punto B realiza desplazamientos por la vertical, pero siendo pequeña la amplitud de las oscilaciones del péndulo dichos desplazamientos son tan pequeños que no influyen sobre el período de las oscilaciones.

El período de las oscilaciones del péndulo simple de longitud s es igual a $T = 2\pi\sqrt{s/g}$. Poniendo aquí s de la fórmula (3), obtenemos

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g(1 + m/M)}}.$$

Señalemos que oscilaciones de las bolas, idénticas a las descritas, se pueden obtener si la bola superior no se suspende de un hilo, sino que se asienta en una varilla lisa horizontal, por la que la bola puebe desplazarse sin rozamiento, La fuerza de la reacción de semejante varilla siempre esta dirigida verticalmente hacia arriba y desem-

peña el mismo papel que la fuerza de tensión del hilo vertical superior: sostiene la bola superior a un mismo nivel sin comunicarle ninguna aceleración horizontal. De aquí es evidente que el resultado no depende de la largura del hilo superior.

Es de interés señalar que las oscilaciones que consideramos de este sistema de bolas no son forzadas: en ausencia del rozamiento ellas son oscilaciones libres entretenidas. La fuerza de tensión del hilo superior no se puede considerar como «excitatriz», ya que al ser perpendicular al desplazamiento, ella no realiza trabajo, o sea, al sistema no se transmite energía. ▲

7. Un reloj suspendido de largos cordones. Un reloj de masa M tiene un péndulo en forma de una varilla imponderable de longitud l, en cuyo extremo hay una masa puntual m. ¿Cómo variará la marcha de este reloj si se suspende de largos cordones paralelos (fig. 7.1)?

△ A diferencia de un reloj fijado en la pared, el suspendido de cordones tiene la posibilidad de balancearse. Si los cordones son

Fig. 7.1. Un reloj suspendido de largos cordones

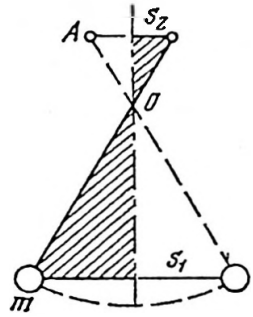


Fig. 7.2. El desplazamiento del peso del péndulo y del cuerpo del reloj durante las oscilaciones

paralelos, con tal balanceo, el movimiento del cuerpo del reloj será de traslación. Esto significa, que todos los puntos del cuerpo del reloj, incluidos el centro de masas del cuerpo y el punto de suspensión del péndulo, se mueven del mismo modo.

Supongamos que la amplitud del balanceo del reloj es suficientemente pequeña de modo que podemos considerar que los cordones siempre se encuentran en posición vertical. En este caso, lo mismo que en el problema anterior, todas las fuerzas externas que actúan sobre el sistema que consideramos, es decir, sobre el reloj con el péndulo, resultan dirigidas por la línea vertical, ya que, salvo las fuerzas de tensión de los cordones, sólo actúan las fuerzas de la

gravedad del cuerpo del reloj y del péndulo. Esto significa, que el centro de masas de todo el sistema no se desplazará en sentido horizontal.

Ahora, es evidente que las oscilaciones del péndulo y del cuerpo del reloj se producirán con igual frecuencia y en antifase, de forma que el centro de masas siempre se encuentre en una misma vertical. Con ello, el desplazamiento s_1 (fig. 7.2) del peso del péndulo y el desplazamiento s_2 del cuerpo del reloj (incluido el punto de suspensión del péndulo) serán inversamente proporcionales a sus masas:

$$s_1/s_2 = (M - m)/m. \qquad (1)$$

De la fórmula (1) se deduce que si $m \ll M$ tendremos $s_2 \ll s_1$, es decir, la amplitud de balanceo del cuerpo es mucho menor que la amplitud de las oscilaciones del péndulo. Por ello, si $m \ll M$ los cordones quedarán, prácticamente, verticales, incluso en el caso cuando su longitud es del orden de la del péndulo.

Los razonamientos aducidos muestran que para hallar el período de las oscilaciones del sistema que estudiamos es posible emplear en directo el resultado del problema 6, sustituyendo en él la masa del peso superior M por la masa del cuerpo $M - m$:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g\,[1 + m/(M-m)]}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}\left(1 - \frac{m}{M}\right)}. \qquad (2)$$

Designando con T_0 el período de las oscilaciones del péndulo de longitud l en el reloj inmóvil ($T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$) y tomando en consideración la condición $m/M \ll 1$, podemos dar a la fórmula (2) la forma

$$T = T_0\left(1 - \frac{m}{2M}\right). \qquad (3)$$

El reloj colgado de los cordones se adelantará. Es interesante señalar que la variación relativa del período

$$\frac{|\Delta T|}{T_0} = \frac{T_0 - T}{T_0} = \frac{m}{2M}$$

no depende de la longitud del péndulo. P. ej., si $M = 5$ kg, $m = 200$ g, la disminución del período constituye el 2% y, por día, el reloj suspendido de los cordones se adelantará casi media hora. ▲

8. **Oscilaciones propias del péndulo doble.** En el péndulo doble el punto de suspensión está inmóvil. El péndulo se saca del equilibrio de modo que, con su posterior movimiento libre, cada una de las bolas realiza una oscilación armónica. ¿Cuál es la frecuencia de tales oscilaciones y cómo se pueden excitar?

△ Si, de modo arbitrario, el péndulo doble se saca del estado de equilibrio y se deja que se mueva por sí solo, hablando en general, cada una de las bolas realizará un movimiento bastante complicado,

en el que es difícil distinguir cualquiera que sea regularidad. Sin embargo, al cumplirse ciertas condiciones iniciales el movimiento del péndulo resulta muy sencillo: ambas bolas realizan oscilaciones puramente armónicas con una misma frecuencia, con la particularidad de que las amplitudes y las fases de dichas oscilaciones se encuentran entre sí en una correlación determinada por completo. Semejantes tipos de movimiento se denominan oscilaciones normales o bien sus modos.

Existen determinados métodos para hallar las oscilaciones normales. Pero en muchos casos ellas se pueden, simplemente, encontrar basándose en la simetría del sistema que se investiga. Si consideramos que las oscilaciones del péndulo doble se pueden producir

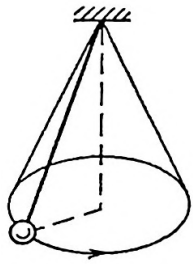


Fig. 8.1. Proyectando el movimiento circular del péndulo sobre el plano vertical, obtenemos oscilaciones armónicas

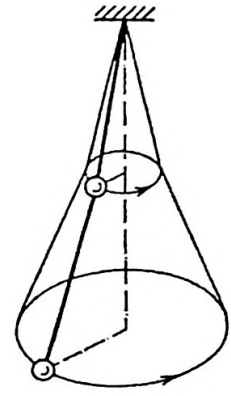


Fig. 8.2. Posible movimiento circular del péndulo doble

no sólo en el plano del diseño en la fig. 6.1, sino también en el plano perpendicular, podemos de inmediato comprender que el sistema que estudiamos posee simetría axial, con la particularidad de que el eje de simetría es la vertical que pasa por el punto de suspensión.

Con el fin de comprender cómo la simetría axial advertida nos puede ayudar a hallar las oscilaciones normales, para empezar dirijámonos al ejemplo más sencillo que nos ofrece el péndulo simple ordinario. Con pequeñas amplitudes, las oscilaciones de semejante péndulo son armónicas. Es bien conocido que las oscilaciones armónicas de un péndulo se pueden considerar en un determinado plano como la proyección sobre él de tal movimiento con el que el hilo del péndulo describe un cono circular (fig. 8.1). Así pues, el movimiento oscilatorio armónico se puede representar como la proyección de cierto movimiento circular, por ello el hallazgo de las oscilaciones

normales en un sistema con simetría axial se puede reducir a encontrar los posibles movimientos circulares en dicho sistema.

¿Qué movimientos circulares son posibles en el péndulo doble? Es fácil imaginarse (e incluso «palpar» por vía experimental, jugando con semejante péndulo) que el posible movimiento circular tendrá el aspecto representado en la fig. 8.2: las bolas se mueven uniforme y sincrónicamente por las circunferencias que yacen en planos horizontales de modo que los hilos, dispuestos en cada momento en un mismo plano vertical, describen superficies cónicas.

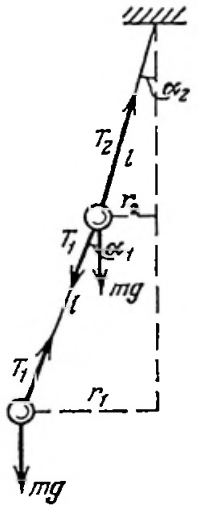


Fig. 8.3. Fuerzas que actúan sobre las bolas en el péndulo doble

Ahora, es fácil hallar la velocidad angular ω y la relación entre los ángulos α_1 y α_2 que los hilos forman con la vertical. Para ello, hay que aplicar la segunda ley de Newton al movimiento de cada una de las bolas. Consideremos, para simplificar, que las masas de las bolas son iguales, mientras que los hilos superior e inferior son de igual longitud l. En la fig. 8.3 se muestra qué fuerzas actúan. En el caso de pequeños ángulos, que es el que sólo nos interesa, la fuerza de tensión del hilo inferior T_1 no se diferencia, prácticamente, de mg, en tanto que la del hilo superior T_2, de $2\,mg$. Como se deduce de la fig. 8.3 la proyección de la fuerza T_1, que actúa sobre la bola inferior, sobre la dirección horizontal es igual a $T_1 \operatorname{sen} \alpha_1 \approx mg\alpha_1$. Por analogía, la proyección de las fuerzas de tensión de los hilos, que actúan sobre la bola superior, es igual a $T_2 \operatorname{sen} \alpha_2 - T_1 \operatorname{sen} \alpha_1 \approx mg\,(2\alpha_2 - \alpha_1)$. Por eso, las ecuaciones de la segunda ley de Newton para cada una de las bolas en las proyecciones sobre la dirección radial tienen la forma

$$m\omega^2 r_1 = mg\alpha_1, \quad m\omega^2 r_2 = mg\,(2\alpha_2 - \alpha_1). \tag{1}$$

Con ayuda de la fig. 8.3 los radios de las circunferencias r_1 y r_2, por los que se mueven las bolas, se ligan con facilidad con los ángulos α_1 y α_2:

$$r_2 = l\alpha_2, \quad r_1 = l\,(\alpha_1 + \alpha_2). \tag{2}$$

Poniendo r_1 y r_2 en la ecuación (1) e introduciendo la designación

$$\omega_0^2 = g/l, \tag{3}$$

obtenemos un sistema de ecuaciones para calcular α_1 y α_2:

$$(\omega^2 - \omega_0^2)\,\alpha_1 + \omega^2\alpha_2 = 0, \quad \omega_0^2\alpha_1 + (\omega^2 - 2\omega_0^2)\,\alpha_2 = 0. \tag{4}$$

De inmediato vemos que el sistema de ecuaciones (4) tiene la solución $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 = 0$, correspondiente al péndulo en posición de equilibrio. Pero el mencionado sistema tiene también soluciones que no son nulas. Para hallarlas, excluyamos, p.ej., α_2 de estas ecuaciones. Entonces, para α_1 obtenemos la ecuación

$$[(\omega^2 - \omega_0^2)(\omega^2 - 2\omega_0^2) - \omega_0^2\omega^2]\alpha_1 = 0. \quad (5)$$

Es evidente que la solución no nula $\alpha_1 \neq 0$ sólo puede existir cuando la expresión entre corchetes es igual a cero. Reduciendo en ella términos semejantes, escribamos esta condición en la forma

$$\omega^4 - 4\omega_0^2\omega^2 + 2\omega_0^4 = 0. \quad (6)$$

La ecuación (6), que es la condición para la existencia de soluciones no nulas de las ecuaciones (4), determina las frecuencias de los posibles movimientos circulares del péndulo doble

$$\omega_{1,2}^2 = \omega_0^2(2 \pm \sqrt{2}). \quad (7)$$

Como vemos, los movimientos circulares del péndulo doble pueden producirse con dos diferentes frecuencias. Con el fin de hallar la relación de los ángulos α_1 y α_2, correspondientes a cada uno de dichos movimientos, hay que poner, consecutivamente en una de las ecuaciones (4), los valores hallados de las frecuencias. P. ej., para empezar pongamos en la primera de las ecuaciones (4) la raíz $\omega^2 = \omega_2^2 = \omega_0^2(2 - \sqrt{2})$. Después de reducir los términos semejantes, obtenemos

$$\alpha_1/\alpha_2 = \sqrt{2} \qquad (\omega^2 = \omega_0^2(2 - \sqrt{2})). \quad (8)$$

Si hubiésemos puesto la raíz ω_2^2 en la segunda de las ecuaciones (4), obtendríamos el mismo valor de la razón α_1/α_2. Así pues, las ecuaciones (4) dan la posibilidad de determinar no los propios ángulos α_1 y α_2, sino sólo la razón entre ellos. Esto quiere decir, que el movimiento circular del péndulo doble con la frecuencia dada es posible con diversos valores de la abertura del cono (pero, claro está, con determinada relación α_1/α_2).

Ahora, pongamos en la primera de las ecuaciones (4) la otra raíz $\omega^2 = \omega_1^2 = \omega_0^2(2 + \sqrt{2})$. Reduciendo los términos semejantes, obtenemos para la razón de los ángulos de desviación de los hilos

$$\alpha_1/\alpha_2 = -\sqrt{2} \qquad (\omega^2 = \omega_0^2(2 + \sqrt{2})). \quad (9)$$

En esta relación el signo menos sólo puede significar que para el momivimento circular del péndulo doble los hilos se han desviado de la vertical en sentidos contrarios. Semejante movimiento se muestra en la fig. 8.4. De que esto era posible también podíamos figurárnoslo antes.

Así pues, el péndulo doble puede realizar dos tipos de movimientos circulares: el movimiento con menor frecuencia ω_2 se produce como se muestra en la fig. 8.2 y el movimiento con mayor frecuencia ω_1, como se ofrece en la fig. 8.4. A cada movimiento corresponde determinada configuración de los hilos. Todo esto se observa con facilidad en el experimento.

A cada tipo de movimientos circulares del péndulo doble le corresponde su oscilación normal. Proyectando el movimiento circular en el plano vertical, obtenemos la figura de la correspondiente oscilación normal. Es fácil ver que cuando tiene lugar la oscilación normal del péndulo doble con frecuencia $\omega = \omega_0 \sqrt{2 - \sqrt{2}} = 0{,}77\ \omega_0$, el movimiento de las bolas transcurre en la misma fase, con ello, como se desprende de las fórmulas (2), la razón de sus amplitudes vale

$$r_1/r_2 = 1 + \alpha_1/\alpha_2 = 1 + \sqrt{2} = 2{,}41.$$

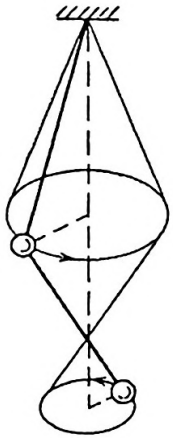


Fig. 8.4. Otro posible movimiento del péndulo doble

En caso de oscilación normal de frecuencia $\omega = \omega_0 \sqrt{2 + \sqrt{2}} = 1{,}85\ \omega_0$ las bolas realizan oscilaciones en antifase, en tanto que la razón de sus amplitudes es igual a

$$|\, r_1/r_2 \,| = \sqrt{2} - 1 = 0{,}41.$$

En el péndulo doble con distintas longitudes de los hilos superior e inferior y diferentes masas de las bolas, las frecuencias de las oscilaciones normales y las razones de las amplitudes de las oscilaciones de las bolas serán otras, pero, cualitativamente, toda la figura de las oscilaciones normales sigue siendo la misma.

Con el fin de excitar las oscilaciones normales del péndulo doble, se puede, p. ej., desviar las bolas de la vertical a los ángulos α_1 y α_2 que satisfacen las relaciones (8) y (9) y soltar las bolas simultáneamente, sin golpe inicial. Pero también es posible excitar de otro modo las oscilaciones normales en el experimento, haciendo uso del fenómeno de resonancia. Para ello, cogiendo el hilo cerca del punto de suspensión, se puede balancear éste con precaución con una frecuencia próxima a la de una de las oscilaciones normales. La amplitud de la correspondiente oscilación normal crece con rapidez si entramos en resonancia. ▲

9. **Oscilaciones forzadas.** El punto de suspensión de un péndulo simple de longitud l está en movimiento en dirección horizontal bajo el efecto de una fuerza externa, según la ley $x\ (t) = x_0 \operatorname{sen} \omega t$. Hallen las oscilaciones forzadas estacionarias del péndulo.

△ El problema consiste en hallar las oscilaciones forzadas estacionarias del péndulo. Al buscar las oscilaciones forzadas vamos a despreciar el rozamiento, pero hay que tener presente con claridad que el establecimiento de las oscilaciones sólo es posible, en principio, en presencia del amortiguamiento. Por un lado queremos resolver el problema sin tener en cuenta las fuerzas de rozamiento, mientras que por otro, como acabamos de indicar, dichas fuerzas son necesarias.

¿Tendrá sentido el resultado obtenido? Sí, lo tendrá, pero él sólo describirá el movimiento del péndulo con pequeño amortiguamiento, pasado un intervalo de tiempo suficientemente grande después de que el punto de suspensión adquirió movimiento. Las palabras «intervalo de tiempo suficientemente grande» significa aquí que a pesar del pequeño amortiguamiento, el proceso de transición ya finalizó.

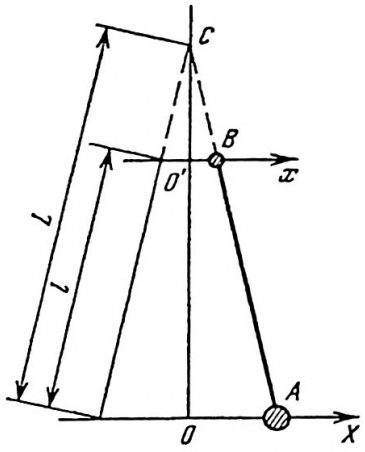


Fig. 9.1. Con las oscilaciones libres del péndulo de longitud L el punto B realiza oscilaciones armónicas con una frecuencia $\omega = \sqrt{g/L}$

Del planteamiento del problema conocemos la amplitud x_0 y la frecuencia circular ω de las oscilaciones de la suspensión. Es obvio que las oscilaciones forzadas se producirán con la misma frecuencia ω, en tanto que la frecuencia de las oscilaciones libres de dicho péndulo $\omega_0 = \sqrt{g/l}$. La idea fundamental de la resolución consiste en representar las oscilaciones forzadas del péndulo dado como las oscilaciones libres de otro péndulo. Está claro, que la longitud de éste L debe determinarse de la condición $\omega = \sqrt{g/L}$. Aquí se puede tropezar con diferentes casos: la frecuencia ω puede ser menor, mayor o igual a la frecuencia propia de las oscilaciones libres del péndulo simple que tratamos.

Primero examinemos el caso $\omega < \omega_0$, es decir, la frecuencia de las oscilaciones del punto de suspensión es menor que la de las oscilaciones libres. En este caso, la longitud L del péndulo imaginario es mayor que l (fig. 9.1). Como se estudian pequeñas oscilaciones, podemos considerar que el extremo inferior del péndulo A se mueve por una recta, es decir, el eje X en la figura. Si el movimiento del punto A transcurre según la ley $X(t) = X_0 \operatorname{sen} \omega t$, como se desprende la figura de inmediato, el punto B situado a la distancia l del extremo inferior, estará en movimiento a lo largo del eje x según la ley $x(t) = x_0 \operatorname{sen} \omega t$ que coincide con el movimiento prefijado del punto de

suspensión. Ahora es fácil imaginarse que si tomamos como B el punto de suspensión del péndulo l, el movimiento de su extremo inferior será el mismo que el del péndulo imaginario L. Con otras palabras, si al péndulo de longitud L le cortamos la parte superior, pero, con ello, le aseguramos con las fuerzas externas el movimiento del punto B, según la misma ley que con las oscilaciones libres del péndulo de longitud L, entonces, obtendremos el péndulo de longitud l, que nos interesa, cuyo punto de suspensión realiza el movimiento prefijado. Es evidente que, en tal caso, el movimiento de la parte inferior del péndulo no varía.

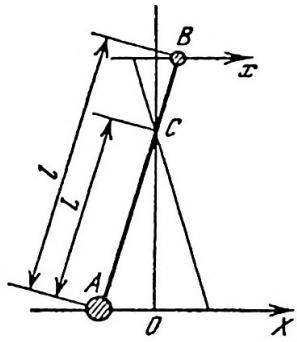


Fig. 9.2. Si $\omega > \omega_0$ el extremo inferior del péndulo y el punto de suspensión se mueven en antifase

Así pues, la oscilación forzada se produce en la misma fase que el movimiento del punto de suspensión, en tanto que la amplitud de dicha oscilación X_0 se puede determinar partiendo de consideraciones geométricas obvias:

$$X_0 = x_0 \frac{L}{L-l} = x_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Aquí hemos puesto la expresión para las longitudes de los péndulos por intermedio de sus frecuencias. Prestemos atención a que, al tender la frecuencia de las oscilaciones del punto de suspensión a la de las oscilaciones libres del péndulo, la amplitud de sus oscilaciones forzadas crece ilimitadamente, es decir, surge la resonancia. Cerca de la resonancia el resultado obtenido no es aplicable, ya que, primero, partimos de la suposición de la pequeñez de las oscilaciones y, segundo, junto a la resonancia no se puede despreciar el amortiguamiento, porque sólo al tener éste en cuenta, en resonancia la amplitud resulta ser finita.

En el caso $\omega > \omega_0$ la longitud del péndulo imaginario $L < l$ (fig. 9.2). Razonando de modo análogo a como lo hicimos en el caso anterior, es fácil llegar a la conclusión de que el movimiento del extremo inferior del péndulo l (punto A en la fig. 9.2) transcurre en antifase con el movimiento del punto de suspensión B. La amplitud de las oscilaciones forzadas se determina con facilidad partiendo de razonamientos geométricos.

Aduzcamos el resultado definitivo

$$X(t) = X_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi),$$

donde

$$\varphi = \begin{cases} 0 & \text{para } \omega < \omega_0, \\ -\pi & \text{para } \omega > \omega_0, \end{cases}$$

$$X_0 = \begin{cases} \dfrac{x_0\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} & \text{para } \omega < \omega_0, \\ \dfrac{x_0\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2} & \text{para } \omega > \omega_0. \end{cases}$$

En la fig. 9.3 se aduce la dependencia entre la amplitud de las oscilaciones forzadas y la frecuencia del movimiento del punto de suspensión. La curva *1* corresponde al caso idealizado cuando no hay amortiguamiento. Para $\omega \to \omega_2$ esta curva nos muestsra la tendencia al infinito de la amplitud de las oscilaciones forzadas en condiciones de resonancia. Si tomásemos en consideración el amortiguamiento, en lugar de la curva *1* obtendríamos la *2*. Con ello, el máximo de la amplitud de las oscilaciones forzadas sería finito y correspondería a una frecuencia algo menor que la frecuencia ω_0 de las oscilaciones libres. El desplazamiento de la frecuencia es tanto mayor, cuanto mayor sea el amortiguamiento. Con el crecimiento de éste disminuye la amplitud de las oscilaciones forzadas. Cuando $\omega \to \infty$ la amplitud de las oscilaciones tiende a cero, incluso en ausencia del amortiguamiento. Para $\omega = 0$, lo que corresponde al desplazamiento estático a la distancia x_0 del punto de suspensión, el extremo inferior del péndulo se desplaza de la posición anterior a esa misma magnitud x_0. ▲

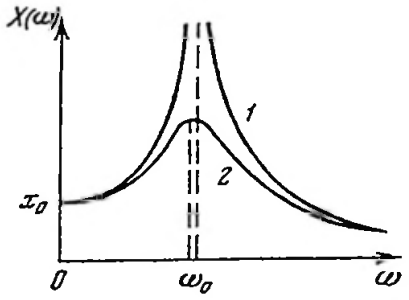


Fig. 9.3. La amplitud de las oscilaciones forzadas durante la resonancia es tanto menor cuanto mayor es el amortiguamiento

10. Amortiguamiento de las oscilaciones. Un electromor está instalado en un soporte suspendido de cordones inextensibles de longitud l (fig. 10.1). Su rotor gira con una frecuencia ω. El centro de masas del rotor del motor no se halla en su eje, por lo que el soporte oscila en sentido horizontal. Con el fin de eliminar semejantes oscilaciones no deseables del soporte se puede operar del siguiente modo. Suspendamos junto al soporte un peso de masa m y unámoslo con él mediante un resorte elástico (fig. 10.2). Entonces, con determinada rigidez del resorte k el soporte con el motor estará inmóvil y el peso realizará oscilaciones. ¿Por qué sucede así y cuál deberá ser la rigidez k del resorte?

△ Supongamos que hemos conseguido elegir tal resorte: el soporte con el motor queda inmóvil a pesar de que el rotor del motor gira. Intentemos aclarar bajo qué condiciones esto es posible. El soporte

está inmóvil, esto significa que todas las fuerzas que sobre él actúan están compensadas. ¿Qué fuerzas actúan sobre el soporte?

Cuando el rotor gira, su centro de masas, que no yace en el eje, se mueve por una circunferencia. Esto quiere decir que la fuerza que actúa sobre el rotor, en cada momento de tiempo, está dirigida hacia el centro de la circunferencia, o sea, es un vector constante

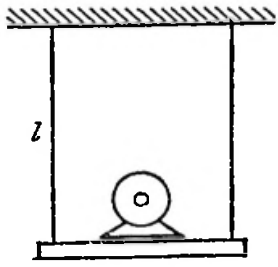


Fig. 10.1. El soporte con el electromotor está suspendido de cordones

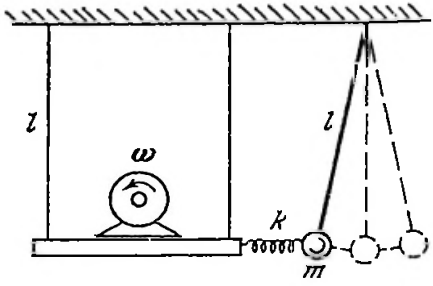


Fig. 10.2. Amortiguamiento de las oscilaciones del motor con el rotor desequilibrado mediante un péndulo combinado

en módulo que gira con la frecuencia ω. De acuerdo con la segunda ley de Newton, esta fuerza F_0 es igual al producto de la masa del rotor M por la aceleración centrífuga $\omega^2 r$:

$$F_0 = M\,\omega^2 r, \tag{1}$$

donde r es la distancia desde el eje hasta el centro de masas del rotor. La proyección vertical de la fuerza que actúa sobre el rotor varía con el tiempo según la ley armónica:

$$F_1(t) = F_0 \operatorname{sen} \omega t. \tag{2}$$

Gracias a esta fuerza, periódicamente con la frecuencia ω, varía la fuerza de tensión de los cordones de los que está suspendido el soporte. Si la amplitud de dicha fuerza F_0 no supera la fuerza de la gravedad $M_1 g$, que actúa sobre el motor con el soporte, los cordones quedan todo el tiempo tensados. Así pues, el soporte no realiza desplazamientos en sentido vertical si, como se desprende de la fórmula (1), se cumple la condición

$$\omega^2 < \frac{M_1}{M}\,\frac{g}{r}. \tag{3}$$

Ahora, aclaremos bajo qué condición el soporte con el motor tampoco realizará desplazamientos horizontales. La proyección horizontal de la fuerza que actúa sobre el rotor también varía según una ley armónica:

$$F_2(t) = F_0 \cos \omega t. \tag{4}$$

De acuerdo con la tercera ley de Newton una fuerza, igual en módulo y de dirección opuesta, actúa por parte del rotor sobre el estator del motor y el soporte. Precisamente en virtud de esta fuerza sinusoidal, el soporte realizaría oscilaciones horizontales en ausencia del peso m con el resorte. Es obvio, que si en cada momento de tiempo la fuerza que actúa sobre el soporte, por parte del muelle deformado, compensa la fuerza que actúa desde el rotor, el soporte con el motor quedará inmóvil.

Así pues, la fuerza que actúa sobre el soporte por parte del muelle debe ser igual a la fuerza $F_2(t)$ expresada con la fórmula (4), es decir, debe depender sinusoidalmente del tiempo con la misma frecuencia ω. Como la fuerza elástica del muelle es proporcional a su deformación, es decir, al desplazamiento del peso m de la posición de equilibrio (fig. 10.2), el movimiento del peso m debe ser una oscilación armónica con esa misma frecuencia ω. Como, en tal caso, el soporte con el motor está inmóvil, es evidente que la frecuencia ω debe ser la frecuencia de las oscilaciones propias de un péndulo combinado con resorte. Semejante péndulo fue estudiado en el problema 3 de este capítulo. Como ahora está fijado al peso m un resorte y no dos, la expresión para la frecuencia de las oscilaciones propias tiene la forma

$$\omega^2 = g/l + k/m. \tag{5}$$

De aquí se determina la rigidez del muelle necesaria para amortiguar las oscilaciones del soporte con el motor, cuyo inducido gira con frecuencia circular ω:

$$k = m(\omega^2 - g/l) = m(\omega^2 - \omega_0^2). \tag{6}$$

De esta fórmula se desprende que alcanzar el amortiguamiento del soporte aplicando este procedimiento sólo es posible cuando la frecuencia circular del rotor es mayor que la frecuencia ω_0 de las oscilaciones libres de un péndulo simple de longitud l. Con el fin de amortiguar las oscilaciones de baja frecuencia, cuando $\omega \leqslant \omega_0$, sería necesario suspender el peso m de un hilo de mayor longitud.

Así pues, cuando gira un rotor no equilibrado el soporte con el motor permanece inmóvil, mientras que el péndulo unido a él efectúa oscilaciones armónicas. La amplitud de éstas es fácil de hallar. Como vemos en la fórmula (4) la amplitud de las oscilaciones x_0 determina de la condición $kx_0 = F_0$. Poniendo aquí F_0 de la fórmula (1) y k de (6), hallamos

$$x_0 = r\frac{M}{m}\frac{1}{1-\omega_0^2/\omega^2} \quad (\omega > \omega_0). \tag{7}$$

La amplitud de las oscilaciones del peso x_0 siempre se puede hacer suficientemente grande aumentando la masa del peso m. Pero, como

se desprende de (6), el aumento de la masa requerirá el aumento de la rigidez del muelle k.

Hemos aclarado que, en realidad, al elegir correctamente la rigidez del muelle, es posible tal movimiento del sistema considerado con el que permanece inmóvil el soporte con el motor. No obstante, hay que hallar respuesta acerca de que si el sistema pasará por sí mismo a semejante estado después de poner en marcha el motor. La respuesta a esta pregunta es positiva. El rasgo general de las oscilaciones forzadas, que transcurren bajo el efecto de una fuerza externa periódica, consiste en que al pasar cierto tiempo después del comienzo del mencionado efecto, el sistema se «olvida» por completo de su estado inicial. En cualquier sistema real, donde las oscilaciones propias se amortiguan, las oscilaciones forzadas adquieren carácter estacionario y no dependen de las condiciones iniciales. Éstas sólo se manifiestan en el período del establecimiento de las oscilaciones que, por regla, recibe el nombre de proceso de transición.

Señalemos que en presencia del amortiguamiento, la atenuación de las oscilaciones del soporte con el motor, hablando en rigor, no será absoluta. Para que las oscilaciones del péndulo auxiliar, habiendo en él rozamiento, transcurran con amplitud invariable, a él ha de transmitirse energía. Esto es posible cuando el soporte con el motor realiza, a pesar de todo, oscilaciones con pequeña amplitud.

El procedimiento de atenuación de las oscilaciones forzadas, considerado en el presente problema, se aplica extensamente en la técnica y lleva el nombre de amortiguación dinámica. ▲

11. Oscilaciones no sinusoidales. En un condensador plano con dimensiones de las armaduras $l_1 \times l_2$ y distancia entre ellas d ($l_1 \gg d$, $l_2 \gg d$) se ha introducido por completo una placa dieléctrica de masa m y permeabilidad ε, que, justamente, ocupa todo el espacio entre las armaduras. En el condensador se mantiene la tensión constante U. La placa dieléctrica se desplaza a lo largo del lado de largura l_1 a la distancia x_0 y se suelta. Despreciando el rozamiento, hallen la dependencia entre el desplazamiento de la placa y el tiempo $x(t)$.

△ Con el fin de aclarar la ley con la que transcurrirá el movimiento de la placa, ante todo, es necesario hallar la expresión para la fuerza que sobre ella actúa por parte del campo eléctrico del condensador plano, conectado a la fuente de tensión constante U. Sea que la placa dieléctrica se ha sacado a una distancia x tras los márgenes del condensador (fig. 11.1) y se halla en equilibrio debido al efecto de la fuerza F_{el}, que actúa por parte del campo eléctrico, y de la fuerza externa F, igual en módulo a la primera. Supongamos que el dieléctrico se desplazó por el espacio entre las armaduras en la magnitud Δx. De la ley de la conservación de la energía se deduce que el trabajo A_{fuen}, realizado en este caso por la fuente de tensión, es igual

a la suma de la variación de la energía del condensador ΔW_{con} y el trabajo mecánico de la fuerza F_{el} sobre las fuerzas externas:

$$A_{fuen} = \Delta W_{con} + F_{el}\Delta x. \quad (1)$$

Si, con ello, la carga del condensador varió en la magnitud Δq, la variación de la energía del condensador

$$\Delta W_{con} = \frac{U\,\Delta q}{2}. \quad (2)$$

En este caso, la fuente de tensión realizó un trabajo

$$A_{fuen} = U\ \Delta q. \quad (3)$$

Poniendo ΔW_{con} y A_{fuen} de (2) y (3) en la ecuación (1), obtenemos

$$F_{el}\,\Delta x = \frac{U\,\Delta q}{2}. \quad (4)$$

Esta relación permite hallar la fuerza F_{el} que actúa sobre la placa dieléctrica por parte del campo eléctrico del condensador. La variación de la carga del condensador Δq al introducir la placa se puede

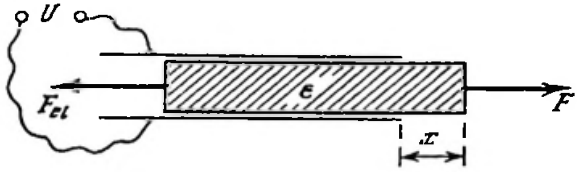


Fig. 11.1. Para hallar la fuerza F_{el} con la que se atrae la placa dieléctrica con la tensión U invariable entre las armaduras del condensador

escribir en la forma $\Delta q = U\Delta C$. La variación de la capacidad del condensador ΔC, al introducir la placa en Δx, se puede hallar si consideramos al condensador con la placa parcialmente sacada como dos condensadores unidos en paralelo, uno de los cuales está lleno de un dieléctrico y el otro, no. Entonces, un sencillo cálculo nos conduce al resultado

$$\Delta C = \frac{\varepsilon_0\,(\varepsilon - 1)\,l_2\,\Delta x}{d}. \quad (5)$$

Poniendo la variación de la carga Δq en la ecuación (4), hallamos que

$$F_{el} = \frac{\varepsilon_0\,(\varepsilon - 1)\,l_2}{d}\,\frac{U^2}{2}. \quad (6)$$

Así pues, si entre las armaduras del condensador se mantiene tensión constante, la fuerza que actúa sobre el dieléctrico no depende de la longitud de la parte que sobresale del condensador. Esta fuerza atrae el dieléctrico al espacio entre las armaduras.

Ahora, es fácil comprender que la placa que sobresale, bajo el efecto de la fuerza F_{el}, estará en movimiento uniformemente variado con la aceleración $a = F_{el}/m$ hasta que alcance la posición de equilibrio. Después de que la placa pase por inercia dicha posición y salga del condensador por el otro lado, la dirección de la aceleración variará por la opuesta, ya que cambia el sentido de la fuerza de retracción.

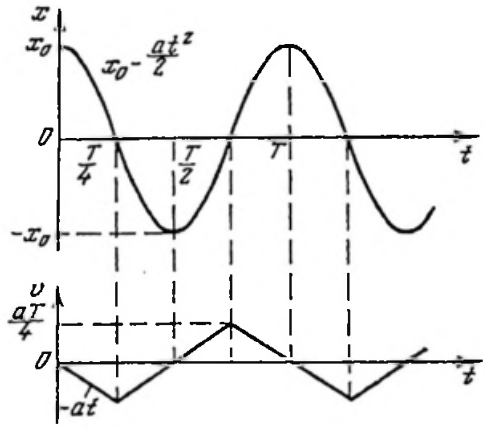


Fig. 11.2. Las gráficas de dasplazamiento y velocidad con las oscilaciones de la placa dieléctrica en el condesador

Como resultado la placa realizará oscilaciones que no serán armónicas. La gráfica del desplazamiento en función del tiempo $x\ (t)$ consta de segmentos de parábola (fig. 11.2). P. ej., en el transcurso del primer cuarto de período de tales oscilaciones, es decir, para $0 < t < T/4$.

$$x\ (t) = x_0 - at^2/2, \tag{7}$$

donde

$$a = \frac{F_{el}}{m} = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1)\, l_2 U^2}{2md}. \tag{8}$$

La amplitud de semejantes oscilaciones, como vemos en la fig. 11.2, coincide con el desplazamiento inicial de la placa x_0, respecto de la posición de equilibrio. Al finalizar el primer cuarto de período de las oscilaciones, $x\ (t)$ en el primer miembro de la relación (7) se anula. Por esta razón, para el período total de las oscilaciones T obtenemos

$$T = 4\sqrt{2x_0/a}. \tag{9}$$

Vemos que el período de estas oscilaciones no sinusoidales depende de la amplitud x_0.

Si la gráfica de la dependencia del desplazamiento de la placa del condensador respecto del tiempo, hasta cierto punto, nos recuerda

una cosinusoide, la gráfica de la velocidad ya no se parece en nada a la que debe haber en caso de oscilaciones armónicas. Como la aceleración de la placa es constante en módulo y sólo cambia a salto su dirección por la opuesta al pasar la placa por la posición de equilibrio, la gráfica de la velocidad $v(t)$ tiene la forma de la «sierra» ofrecida en la fig.11.2. ▲

12. Oscilaciones de un aro. En un aro imponderable de radio R, situado en posición vertical, está fijado un punto material de masa m. El aro puede rodar sin deslizamiento por un plano horizontal. Si sacamos el aro de la posición de equilibrio de modo que el

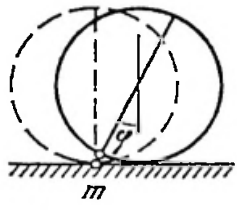


Fig. 12.1. Cuando el aro imponderable de masa puntual m se desvía de la posición de equilibrio él realizará oscilaciones

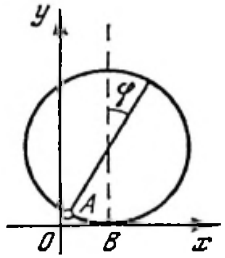


Fig. 12.2. Para la deducción de la ecuación de la cicloide. La longitud del arco AB es igual al segmento OB

diámetro del aro, que pasa por el punto material, forme un pequeño ángulo φ_0 con la vertical (fig. 12.1), y lo soltamos sin empujarlo, surgirán oscilaciones. ¿Cuál será su período?

△ Si el aro se encuentra en la posición de equilibrio estable, el punto material en él fijado ocupa la posición inferior. Cuando el aro rueda sin deslizamiento, dicho punto se mueve describiendo una cicloide. Ante todo obtengamos la ecuación de esta cicloide.

Elijamos el origen de coordenadas en la posición de equilibrio del punto material. «Rodemos» el aro por eje x de forma que el diámetro, que pasa por el punto m, forme con la vertical el ángulo φ (fig. 12.2). Expresemos las coordenadas x e y, del punto que nos interesa, por medio del ángulo φ. Al rodar sin deslizamiento la longitud del arco $AB = R\varphi$ es igual a la largura del segmento OB. Por ello, directamente de la fig. 12.2, se desprende que

$$x = R(\varphi - \operatorname{sen}\varphi), \quad y = R(1 - \cos\varphi). \tag{1}$$

Para pequeñas oscilaciones del aro, cuando el ángulo $\varphi \ll 1$, las fórmulas (1) se pueden simplificar. Para ello, sustituyamos sen φ por φ, entonces la expresión para cos φ se puede escribir en la forma

$$\cos\varphi = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\varphi} \approx \sqrt{1 - \varphi^2} \approx 1 - \varphi^2/2.$$

Ahora, las ecuaciones (1) se escriben en la siguiente forma:

$$x = 0, \quad y = R\varphi^2/2. \tag{2}$$

De estas relaciones se desprende que, siendo pequeñas las oscilaciones del aro, el punto fijado en él se mueve, prácticamente, por la vertical.

En general, podemos hallar la ley de movimiento del punto material por la trayectoria conocida sin analizar las fuerzas que actúan, sino que empleando sólo la ley de la conservación de la energía. Como con pequeños ángulos φ el punto se mueve por la vertical, su energía cinética es igual a $m\dot{y}^2/2$. Considerando la energía potencial en la posición de equilibrio igual a cero, escribimos la ley de la conservación de la energía en la forma

$$\frac{m\dot{y}^2}{2} + mgy = \text{const}. \tag{3}$$

Derivemos esta ecuación respecto del tiempo:

$$m\dot{y}\ddot{y} + mg\dot{y} = 0. \tag{4}$$

Como $\dot{y}$ no es igual a cero idénticamente, después de simplificar por $m\dot{y}$, de esta relación obtenemos

$$\ddot{y} + g = 0. \tag{5}$$

Esta ecuación nos indica que la aceleración del punto material está siempre dirigida verticalmente hacia abajo, es constante en módulo e igual a la aceleración de la caída libre. Esto significa que, para pequeñas oscilaciones del aro imponderable, el punto material fijado en él se mueve del mismo modo que durante la caída libre en el campo de la gravedad. Cada vez, en el momento que el punto pasa por la posición de equilibrio, la dirección del movimiento del punto cambia por la opuesta, es decir, él se comporta como una bola elástica de acero que bota en el campo de la gravedad sobre una plancha de mármol horizontal.

Ahora, es fácil escribir la ecuación que expresa la dependencia de la velocidad y la coordenada del punto respecto del tiempo para el primer cuarto del período de las oscilaciones T. Como de acuerdo con (5) $\ddot{y} = -g$, tendremos

$$\dot{y}(t) = -gt, \quad y(t) = y_0 - \frac{gt^2}{2} \quad (0 < t < T/4). \tag{6}$$

Aquí, y_0 es la altura en la que la masa m se encontraba en el momento inicial, cuando el aro estaba desviado de la posición de equilibrio en el ángulo φ_0 y fue soltado sin empujarlo.

Las gráficas de la dependencia de la velocidad y la coordenada y respecto del tiempo se muestran en la fig. 12.3. A primera vista puede parecer que el período de las oscilaciones es dos veces menor que el indicado en estas gráficas. En efecto, el período sería dos veces menor si se tratara de la bola que rebota. Pero para el aro esto no es así, ya que el período de las oscilaciones se determina aquí por el tiempo del ciclo completo de variación del ángulo φ que consta de las desviaciones del aro tanto hacia uno, como hacia el otro lado. Esto se ve con particular claridad de la gráfica de la dependencia entre el ángulo de desviación y el tiempo, ofrecida en la misma fig. 12.3.

La gráfica de la dependencia $\varphi(t)$ consta de mitades de una elipse, de lo que podemos cerciorarnos poniendo en la segunda de las fórmulas (6) la coordenada y expresada a través del ángulo φ, mediante la relación (2):

$$\varphi^2(t) = \varphi_0^2 - gt^2/R. \qquad (7)$$

Esta fórmula se puede anotar en la forma

$$\frac{\varphi^2}{\varphi_0^2} + \frac{t^2}{R\varphi_0^2/g} = 1. \qquad (8)$$

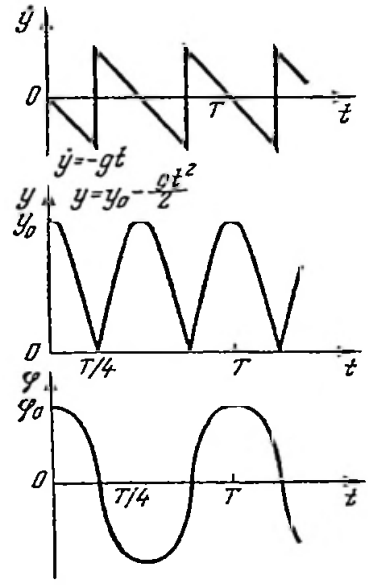


Fig. 12.3. Gráficas de la velocidad y el desplazamiento vertical de la masa m y el ángulo de desviación φ con pequeñas oscilaciones del aro

Como vemos, ella es la ecuación de una elipse en el plano t, φ. Los semiejes de esta elipse son iguales a $\varphi_0\sqrt{R/g}$ y φ_0. Como se desprende de la gráfica de la dependencia $\varphi(t)$, el semieje $\varphi_0\sqrt{R/g}$ es igual al cuarto del período de las oscilaciones del aro $T/4$. También es posible obtener semejante valor para $T/4$ de la ecuación (6).

Así pues, el período de las oscilaciones del aro

$$T = 4\varphi_0\sqrt{R/g}. \qquad (9)$$

Remarquemos que incluso pequeñas oscilaciones de semejante sistema no son armónicas y su período depende de la amplitud φ_0. ▲

13. Ondas en un anillo en rotación. Un cordón de caucho circular está en rotación en torno del eje perpendicular al plano del anillo (fig. 13.1). La velocidad lineal de los elementos del cordón es igual a v. ¿A qué velocidad se propagarán las ondas transversales de pequeña amplitud por semejante anillo?

△ La onda elástica transversal en un cordón flexible de caucho puede propagarse sólo cuando este cordón esté tensado. La tensión previa es necesaria debido a que el cordón no tensado, a diferencia de un sólido, sólo manifiesta elasticidad con relación a las deformaciones por tracción y no por compresión. En el ejemplo que consideramos la fuerza de tensión del cordón circular está condicionada por su rotación. Hallemos dicha fuerza de tensión.

Mentalmente, separemos en el cordón en rotación el elemento Δl, caracterizado por el pequeño ángulo θ (fig. 13.2). Las fuerzas F_1 y F_2,

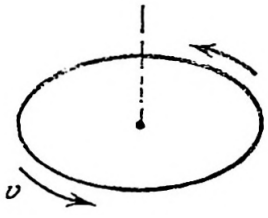


Fig. 13.1. El anillo de caucho gira en torno del eje vertical

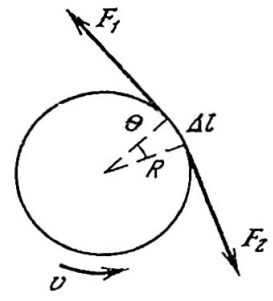


Fig. 13.2. Para el cálculo de la fuerza de tensión del cordón de caucho en rotación

que actúan sobre el elemento separado por parte de dos sectores vecinos, están dirigidas por las tangentes a la circunferencia. El módulo de estas fuerzas F es, precisamente, la fuerza de tensión del cordón que nos interesa. La resultante de las fuerzas F_1 y F_2 comunica al elemento separado del cordón la aceleración centrífuga v^2/R. La masa del elemento separado es igual a $pS\Delta l = \rho SR\theta$, donde ρ es la densidad del caucho; S, el área de la sección transversal del cordón. Por ello, basándonos en la segunda ley de Newton, tendremos

$$F\theta = \rho SR\theta v^2/R, \tag{1}$$

de donde

$$F = \rho S v^2. \tag{2}$$

Ahora, supongamos que por dicho cordón se propaga una onda elástica, en la que el desplazamiento de los elementos del cordón se produce en la dirección perpendicular al plano de equilibrio del cordón. Sea que la mencionada onda se propaga, p. ej., en la misma dirección que gira el anillo. Con el fin de hallar la velocidad de propagación de dicha onda en el cordón u vamos a operar del siguiente modo. Pasemos al nuevo sistema de referencia K en el que, en cierto momento de tiempo, queda inmóvil la cresta de la onda separada

(fig. 13.3). Es obvio que este sistema de referencia está en movimiento uniforme a la velocidad $u + v$ en el sentido de la tangente a la circunferencia formada por el cordón en rotación. La cresta separada estará inmóvil, en dicho sistema de referencia, en el momento cuando su velocidad resulta ser paralela a la del sistema de referencia introducido. En dicho momento la cresta parecerá inmóvil, en tanto, que la sustancia del cordón se deslizará a la izquierda a lo largo de la cresta inmóvil a la velocidad u, (fig. 13.4). Como el nuevo sistema de

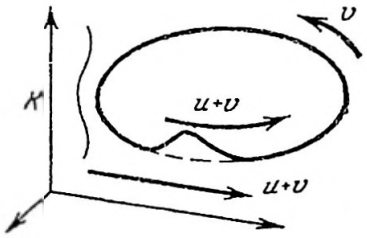


Fig. 13.3. En cierto momento de tiempo la cresta que se desplaza por el cordón estará inmóvil en el sistema auxiliar de referencia K

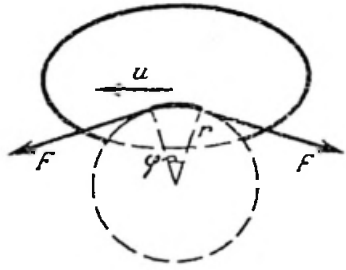


Fig. 13.4. En este sistema de referencia la sustancia del cordón se desplaza por el vértice de la cresta inmóvil a velocidad u

referencia es inercial, en él también es cierta la segunda ley de Newton. Apliquémosla al movimiento del elemento del cordón que pasa por el vértice de la cresta. Este elemento se mueve a la velocidad u por el arco de la circunferencia de cierto radio r, yaciente en el plano vertical y mostrada con una línea de trazos en la fig. 13.4. La proyección de la ecuación de la segunda ley de Newton sobre la dirección vertical, al desplazarse por esta circunferencia, se escribe en la forma

$$F\varphi = \rho S r \varphi u^2/r. \qquad (3)$$

De aquí, para el cuadrado de la velocidad de propagación de la onda transversal por el cordón obtenemos

$$u^2 = F/\rho S. \qquad (4)$$

Es evidente que esta misma expresión para la velocidad de la onda será cierta, asimismo, en el caso de un cordón rectilíneo, cuya tensión se crea debido al efecto de las fuerzas externas.

Poniendo en la fórmula (4) la expresión para la fuerza de tensión F por intermedio de la velocidad del cordón en rotación v de (2), hallamos que $v = u$. Con otras palabras, la velocidad de las ondas transversales con relación al cordón, cuya fuerza de tensión está condicionada por su rotación, coincide con la velocidad lineal de rotación del cordón. Por ello, las ondas que se desplazan en la misma

dirección en la que gira el cordón, se mueven respecto al observador inmóvil a la velocidad $2v$, en tanto que las ondas que se mueven al encuentro de la rotación del cordón, al mencionado observador le parecen inmóviles. ▲

14. **Excitación de ondas en una cuerda.** Al extremo de una cuerda elástica tensada se le imprime un movimiento oscilatorio armónico de amplitud A y frecuencia ω con ayuda del dispositivo cuyo esquema se muestra en la fig. 14.1. ¿Qué potencia desarrolla el motor que lo

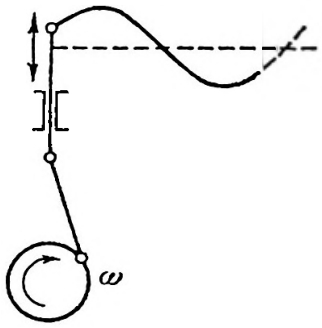


Fig. 14.1. El extremo de la cuerda se pone en movimiento según una ley armónica

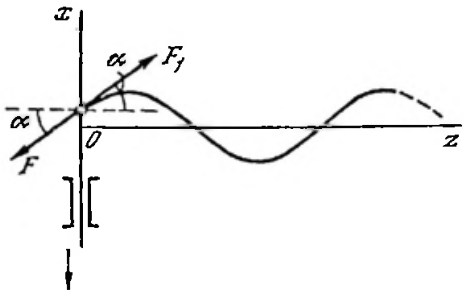


Fig. 14.2. Por parte de la varilla sobre el extremo de la cuerda actúa la fuerza F

pone en movimiento? ¿En qué se convierte la energía consumida? ¿Qué sucede en el otro extremo de la cuerda? ¿De qué modo se puede conseguir que en él no se produzca la reflexión de la onda?

△ Con el fin de describir el movimiento forzado de la cuerda introduzcamos los ejes de coordenadas x y z como se muestra en la fig. 14.2: el eje z coincide con la posición de equilibrio de la cuerda, en tanto que el eje x está dirigido a lo largo de la barra que acciona el movimiento del extremo de la cuerda. Elijamos el origen de cuenta del tiempo de modo que el desplazamiento del extremo izquierdo de la cuerda se dé con la expresión

$$x\,(t) = A\cos\omega t. \tag{1}$$

Las oscilaciones forzadas del extremo izquierdo de la cuerda conducen a la aparición de una onda elástica en la cuerda, que se propaga hacia la derecha a lo largo del eje z. Como fue aclarado en el problema anterior, la velocidad u de semejante onda depende de la fuerza previa de tensión F_0 de la cuerda, de la densidad del material ρ y del área de la sección transversal S:

$$u^2 = F_0/\rho S. \tag{2}$$

Durante la propagación de la onda, el desplazamiento transversal x de cualquier punto de la cuerda, que en equilibrio tiene la coordenada z, repite el movimiento del extremo izquierdo pasado en intervalo de tiempo z/u, necesario para que la onda se propague a la distancia z

$$x\ (z,\ t) = x\ (0,\ t - z/u) = A\ \cos\ \omega\ (t - z/u). \qquad (3)$$

Con objeto de hallar la potencia que desarrolla el motor, hay que conocer la fuerza F con la que la barra actúa sobre el extremo de la cuerda. Ésta ejerce sobre la barra la fuerza F_1, igual en módulo y de dirección opuesta (fig. 14.2). Para la cuerda flexible, que sólo manifiesta propiedades elásticas durante la deformación por tracción, la fuerza de tensión está dirigida en cualquier punto por la tangente. Por esta causa, la fuerza F_1, que actúa sobre la barra, está dirigida bajo el ángulo α respecto del eje z, cuya tangente, como se desprende de la fig. 14.2, es igual a la derivada dx/dz cuando $z = 0$;

$$\operatorname{tg}\alpha = A\frac{\omega}{u}\operatorname{sen}\omega\left(t - \frac{z}{u}\right)\Big|_{z=0} = A\frac{\omega}{u}\operatorname{sen}\omega t. \qquad (4)$$

Cuando la onda se propaga por la cuerda, cada uno de sus elementos sólo se desplaza transversalmente a la posición de equilibrio. Por eso la proyección horizontal de la fuerza de tensión de la cuerda queda invariable e igual en módulo a la fuerza previa de tensión F_0 en cualquier momento de tiempo y en todo lugar de la cuerda, incluido su extremo izquierdo. De aquí se deduce que la proyección vertical de la fuerza F, igual a $-F_0\ \operatorname{tg}\alpha$ (fig. 14.2), varía con el tiempo según la ley armónica:

$$F_x(t) = -F_0 A\frac{\omega}{u}\operatorname{sen}\omega t. \qquad (5)$$

La velocidad de movimiento del extremo izquierdo de la cuerda es igual a la derivada respecto del tiempo del desplazamiento $x\ (t)$, que proporciona con la fórmula (1):

$$v_x = \dot{x} = -A\omega\operatorname{sen}\omega t. \qquad (6)$$

El valor instantáneo de la potencia que desarrolla el motor P es igual al producto escalar de la fuerza F, que actúa sobre el extremo izquierdo de la cuerda, por su velocidad v:

$$P = F\cdot v = F_x v_x = F_0 A^2\frac{\omega^2}{u}\operatorname{sen}^2\omega t. \qquad (7)$$

Vemos que la potencia desarrollada por el motor sufre oscilaciones desde cero hasta el valor máximo, igual a $F_0A^2\omega^2/u$. Es fácil hallar el valor medio de la potencia si expresamos el cuadrado del seno, que entra en la fórmula (7), mediante el coseno del ángulo doble:

$$\operatorname{sen}^2\omega t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t). \qquad (8)$$

Durante la mediación por el tiempo el segundo sumando en (8) desaparece y la expresión para la potencia media $\langle P \rangle$, toma la forma

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} F_0 A^2 \frac{\omega^2}{u}. \tag{9}$$

Poniendo aquí el valor de la fuerza de tensión de la cuerda F_0 de la fórmula (2), podemos escribir la expresión para $\langle P \rangle$ de la forma siguiente:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \rho S \omega^2 A^2 u. \tag{10}$$

La energía consumida para excitar las oscilaciones del extremo izquierdo de la cuerda, como es natural, no desaparece sin dejar huella, sino que se transporta por la onda a lo largo de ella. Esto se desprende con claridad de la fórmula (10), en la que el segundo miembro es precisamente, igual al flujo de energía transportado por la onda. En efecto, si analizamos las energías cinética y potencial de cierto elemento de la cuerda de longitud Δl al pasar la onda, podemos cerciorarnos de que el valor medio de su suma es igual a $\rho S \omega^2 A^2 \Delta l/2$. Por unidad de tiempo la onda se propaga a la distancia Δl, numéricamente igual a su velocidad u. Por ello, el segundo miembro de la fórmula (10) es la energía transportada por la onda a través de cualquier sección de la cuerda por unidad de tiempo.

Si la cuerda se extiende a la derecha hasta la infinidad, la energía sólo se transporta por la onda en una dirección. Si con esto, la disipación de la energía mecánica, que conduce a la atenuación de las oscilaciones, es despreciablemente pequeña, en cualquier lugar el flujo medio de energía es el mismo.

En una cuerda limitad el carácter de la propagación de la energía será diferente en dependencia de las condiciones en el extremo opuesto de la cuerda. P. ej., si el segundo extremo de la cuerda está fijado, ella no puede transmitir la energía a la pared, ya que el último punto de la cuerda permanece inmóvil. La energía de la onda se refleja por completo en sentido opuesto respecto del extremo inmóvil. Como resultado, en la cuerda se forma una onda estacionaria en la que la energía no se transporta por los puntos nodales, donde la amplitud de las oscilaciones es igual a cero. Es posible mostrar que en semejante caso la potencia media del motor, que excita tal onda fija, es igual a cero: tanta energía como cede el motor a la cuerda por período, recibe de ésta de vuelta.

Pero también es posible crear en el otro extremo de la cuerda tales condiciones que la onda no se reflejará y toda la energía transportada será transmitida a cierto dispositivo. ¿Cómo deberá ser éste? Para que en el extremo derecho de la cuerda de longitud l no se produzca la reflexión de la onda, es necesario que las condiciones en el último punto de la cuerda sean las mismas que en la cuerda

infinita. Con otras palabras, si «quitamos» la continuación de la cuerda, el desplazamiento y la velocidad del último punto deben quedar invariables. Para ello, la fuerza F_2, ejercida sobre el último punto

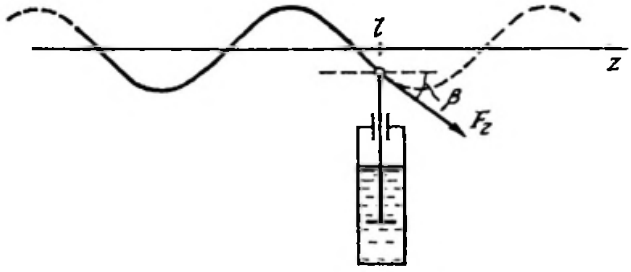


Fig. 14.3. La reflexión de la onda en el extremo derecho no se producirá si la fuerza F_2, que actúa por parte del vástago sobre el extremo de la cuerda, es la misma que por parte del sector cortado de la cuerda

de la cuerda por parte del dispositivo, debe ser igual a la que actúa desde la parte «quitada» de la cuerda infinita (fig. 14.3).

Para hallar la fuerza F_2 se puede operar del mismo modo que al buscar la fuerza F en el extremo izquierdo de la cuerda. La tangente del ángulo β (fig. 14.3) es igual a la derivada dx/dz cuando $z = l$:

$$\operatorname{tg}\beta = A\frac{\omega}{u}\operatorname{sen}\omega\left(t-\frac{z}{u}\right)\Big|_{z=l} = A\frac{\omega}{u}\operatorname{sen}\omega\left(t-\frac{l}{u}\right). \qquad (11)$$

Como la proyección horizontal de la fuerza F_2 es igual a la fuerza previa de tensión F_0, la proyección vertical de la fuerza F_2, igual a $F_0 \operatorname{tg}\beta$, se da con la expresión

$$F_{2x} = F_0 A\frac{\omega}{u}\operatorname{sen}\omega\left(t-\frac{l}{u}\right). \qquad (12)$$

Es fácil advertir que, en cada momento de tiempo, esta fuerza es proporcional a la velocidad v_2 del extremo derecho de la cuerda. Esta velocidad puede ser calculada con ayuda de la expresión (3) haciendo, previamente, en ella $z = l$:

$$v_2 = \dot{x}(l, t) = -A\omega\operatorname{sen}\omega\left(t-\frac{l}{u}\right). \qquad (13)$$

Comparando las fórmulas (12) y (13) vemos que la fuerza F_2, ejercida sobre el extremo derecho de la cuerda por parte del dispositivo que asegura la absorción de la onda, debe ser proporcional a la velocidad del punto extremo de la cuerda v_2:

$$F_{2x} = F_0 v_2/u. \qquad (14)$$

El dispositivo requerido se puede realizar haciendo uso de la fuerza de resistencia cuando un sólido se mueve en el seno de un

medio viscoso, que a pequeñas velocidades es proporcional a la velocidad. P. ej., tomemos un ligero vástago con pistón de masa despreciablemente pequeña que puede desplazarse, en sentido vertical, por un cilindro lleno de un líquido viscoso (fig. 14.3). Con ello, la viscosidad del líquido y la dimensión del pistón se deben elegir de tal forma que el coeficiente de proporcionalidad entre la fuerza de resistencia y la velocidad, sea precisamente igual al exigido a base de la fórmula (14), es decir, F_0/u.

Al emplear semejante dispositivo toda la energía, transmitida a la cuerda por su extremo izquierdo, se convertirá en calor al desplazarse el pistón por el líquido viscoso. Así pues, el sistema que hemos considerado es, en realidad, un guiaondas mecánico con carga concordada en el extremo derecho, mediante el cual la energía puede transmitirse de un lugar a otro.

De modo análogo es posible transmitir la energía de un lugar a otro con ayuda de las ondas electromagnéticas. Para las correspondientes líneas de transmisión o bien guiaondas, es preciso elegir la carga de modo que ella esté concordada con el guiaondas, es decir, para que no se produzca la reflexión de la onda en su extremo. ▲

15. Radiación direccional de ondas de radio (radioeléctricas). Las antenas de las estaciones de radiodifusión son mástiles verticales que en el plano horizontal, es decir, a lo largo de la superficie terrestre, irradian del mismo modo en todas direcciones. Empleando varias antenas de semejante tipo, que funcionan de un mismo transmisor, la emisión de la estación de radio se puede convertir en direccional. ¿Cómo hay que disponer dos antenas en una ciudad, extendida en forma de una estrecha banda a lo largo de la costa del mar, de forma que disminuya la radiación inútil de las ondas de radio tanto en dirección del mar, como hacia el territorio inhabitado?

△ La formación de la emisión direccional de las ondas de radio se produce debido al fenómeno de interferencia. Si tenemos dos fuentes coherentes S_1 y S_2 que irradian ondas en todas direcciones de igual manera, las oscilaciones que llegan a cierto punto P, amplificarán o debilitarán unas a otras durante su combinación en función de la diferencia de recorridos de las ondas $r_1 - r_2$ (fig. 15.1). Para simplificar, vamos a considerar que las fuentes son iguales e irradian en la misma fase. Si el punto de observación P está situado lejos de las fuentes de forma que la distancia desde P hasta cualquiera de ellas es mucho mayor que la distancia d entre las fuentes, entonces las amplitudes de las oscilaciones que llegan a P se pueden considerar iguales y al calcular la diferencia de recorridos las direcciones r_1 y r_2 pueden tomarse como paralelas (fig. 15.2). Entonces, la diferencia de recorridos Δ se expresa con el ángulo θ que caracteriza la dirección hacia el punto de observación P:

$$\Delta = d \operatorname{sen} \theta. \qquad (1)$$

Es obvio que con $\theta = 0$ y $\theta = \pi$, es decir, en las direcciones de las líneas perpendiculares que unen las fuentes, la radiación será de máximo valor. En las direcciones para las que la diferencia de recorridos Δ es igual a la longitud de onda λ (o bien a cualquier número impar de semiondas) la radiación no tiene por completo lugar. Claro está, que para las estaciones de radio la existencia de semejantes zonas muertas no es deseable. Esto significa que la distancia d entre las antenas debe ser menor que la mitad de la longitud de onda. Si la distancia d es sólo un poco menor que $\lambda/2$, en las direcciones a lo largo de la línea que une las antenas, casi no se produce la radiación,

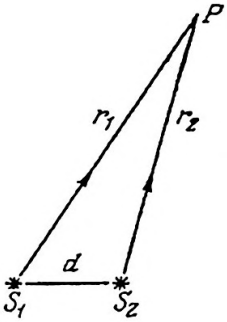


Fig. 15.1. Con las fuentes coherentes S_1 y S_2 la intensidad de las oscilaciones en el punto P depende de la diferencia de marcha de las ondas $r_1 - r_2$

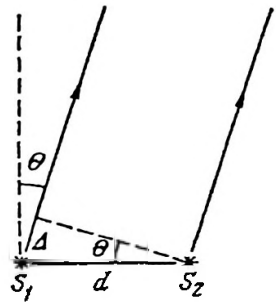


Fig. 15.2. Para el cálculo de la diferencia de marcha de las ondas para un punto alejado de observación

ya que en cualquier punto de dicha línea las oscilaciones electromagnéticas partientes de la antena llegan casi en antifase. Si la mencionada distancia se disminuye aún más, en estas direcciones la radiación aumentará, ya que la diferencia de fase de las oscilaciones disminuirá.

Así, pues, con el fin de dirigir la emisión de la estación de radio, principalmente, a lo largo de la costa habitada del mar, hay que ubicar las antenas en una recta perpendicular al litoral. La distancia entre las antenas debe ser no menor que $\lambda/2$ y elegirse partiendo del requerimiento de que la intensidad de la radiación en la dirección perpendicular a la costa sea no menor que determinado valor.

Es fácil comprender que con ayuda de semejantes antenas también se puede concentrar la radiación en las direcciones requeridas en caso de que la ciudad esté situada en forma de una estrecha banda a lo largo de la costa de un golfo que penetra en la tierra en forma de ángulo (fig. 15.3). Para ello es suficiente advertir que el máximo de la radiación de las dos antenas estará dirigido no perpendicularmente a la línea que las une, sino que bajo cierto ángulo θ (fig. 15.2), si en las antenas las oscilaciones se producen con cierto desfasaje δ. En tal caso, la dirección de la máxima radiación se determina par-

tiendo de la condición de que la diferencia de fase inicial δ, introducida por las antenas, se compensa con el retardo de una de las ondas al recorrer ella la distancia «excesiva» Δ (fig. 15.2). P. ej., si las oscilaciones en la antena S_2 se retrasan de las oscilaciones en la antena S_1 en fase en δ, el ángulo θ se halla con la fórmula

$$\frac{2\pi}{\lambda} d \operatorname{sen} \theta = \delta, \qquad (2)$$

ya que, precisamente, en esta dirección las ondas que parten desde S_1 y S_2 se propagan en igual fase y durante su combinación se amplifican unas a otras. Claro está, la máxima intensidad de radiación se observará en dos direcciones que forman el ángulo θ con la perpendicular a la línea que une las antenas, lo que se muestra en la fig. 15.3.

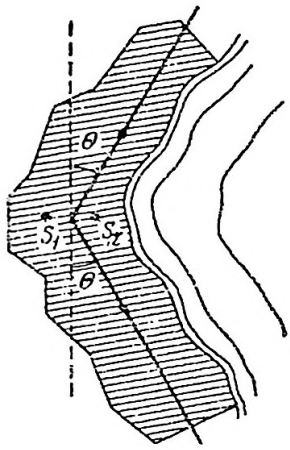


Fig. 15.3. Las direcciones de la irradiación máxima están giradas a cierto ángulo θ, si las oscilaciones en la antena S_2 se retardan en fase de las oscilaciones en la antena S_1

Con objeto de reducir la parte de la energía que irradia inútilmente la estación de radio, es conveniente conseguir la emisión direccional de las ondas de radio no sólo en el plano horizontal, sino también en el vertical. La formación de un estrecho diagrama de directividad, «aplastado» a la superficie terrestre, se asegura con relativa facilidad en la gama de las ondas métricas y aún más cortas (televisión, radioemisión en ondas ultracortas). Los vibradores de la antena transmisora se disponen sobre un mástil vertical, formando varias filas unos sobre otros, de modo que la distancia entre ellos sea, en sentido vertical, menor que la longitud de onda. En todos los vibradores las oscilaciones se excitan en la misma fase. Esto se alcanza de la forma más sencilla empleando cables de igual longitud para la alimentación de la energía desde el generador a todos los vibradores. Las ondas electromagnéticas de todos los vibradores de semejante antena de «múltiples pisos» de resultas de la interferencia se amplifican entre sí, cuando ellas se propagan en dirección horizontal. Las ondas propagadas en todas las demás direcciones, es decir, que se desvían hacia arriba y abajo de la horizontal se extinguen mutuamente. El carácter de la distribución angular de la radiación de tal antena es fácil de comprender por analogía con el problema de la difracción de una onda plana que pasa por una rendija: mientras mayor es la dimensión de la rendija en comparación con la longitud de onda, tanto menor es la dispersión angular de la onda que pasó por la rendija. ▲

IX. OPTICA

En óptica se estudia la propagación de ondas electromagnéticas cortas, cuya longitud constituye unos 10^{-5}—10^{-7} m, y su interacción con la sustancia. En los márgenes de esta región espectral se encuentra un sector, relativamente estrecho, de longitudes de onda desde 400 hasta 760 nm correspondiente a la luz visible que, directamente, se percibe por el ojo humano. Además de la luz visible, en la gama óptica también se incluyen las radiaciones infrarroja y ultravioleta, ya que entre ellas no hay diferencia física de principio. Por esta razón los límites de la gama óptica son convencionales en alto grado y, en esencia, sólo se determinan por los procedimientos de obtención y registro de las ondas electromagnéticas que se emplean.

La teoría ondulatoria de la luz se basa en el principio de Huygens que permite, según la posición conocida del frente de onda en el momento dado de tiempo, hallar su posición en los siguientes lapsos. De acuerdo con el principio de Huygens cada punto del frente de onda es fuente de ondas esféricas secundarias. La envolvente de la superficie de dichas superficies ondulatorias secundarias proporciona la posición del frente de onda en el siguiente momento de tiempo.

La teoría ondulatoria de la luz permite explicar tales fenómenos como la interferencia y la difracción. Con el fin de observar una figura estable de interferencia las fuentes de luz deben ser coherentes, es decir, las ondas que ellas crean deben llegar al punto de observación con diferencia de fase (desfasaje) constante. Es imposible conseguir una diferencia de fase invariable de dos ondas irradiadas por dos fuentes de luz que no sean de láser. Por ello, para obtener la figura de interferencia la luz de una fuente se divide en dos haces y, a continuación, después de que ellos pasan distintos recorridos de nuevo se reúnen. Los fenómenos de difracción, que surgen cuando la luz pasa por agujeros u obstáculos, reciben su explicación al considerar la interferencia de las ondas coherentes secundarias construidas según el principio de Huygens.

Este principio da la posibilidad de establecer las leyes que describen la conducta de la onda luminosa en el límite de separación de dos medios transparentes. Con la aproximación de la óptica geométrica, para prefijar la posición de las superficies ondulatorias se pueden introducir rayos, o sea, líneas perpendiculares a las superficies ondulatorias. Los rayos de luz caracterizan la dirección de propagación de la onda. Las reglas de hallazgo de los rayos para las ondas reflejada y refractada, que se desprenden del principio de Huygens, son las bien conocidas leyes de la óptica geométrica.

Las leyes fundamentales de la óptica geométrica, tales como la ley de la propagación rectilínea de la luz por un medio homogéneo, las leyes de reflexión y refracción de la luz en el límite de dos medios, se pueden obtener, asimismo, del principio de Fermat. De acuerdo con él, el recorrido real de un rayo de luz es aquel que pasa la luz necesitando para ello el tiempo extremo (por regla, el mínimo) en comparación con cualquier otro recorrido próximo al real entre los mismos puntos. Aunque semejante enunciación del principio de Fermat no es del todo exacta, ella es suficiente para la comprensión de los ejemplos que vamos a estudiar más abajo.

Como la velocidad de la luz en un medio con índice de refracción n es igual a c/n, el principio de Fermat se puede enunciar como el requerimiento de la longi-

tud óptica mínima del rayo al propagarse la luz entre dos puntos prefijados. Por longitud óptica del rayo entendemos el producto del índice de refracción por la longitud del rayo. En un medio no homogéneo la longitud óptica del rayo se compone de las longitudes ópticas en distintos sectores que pueden considerarse homogéneos. El empleo del principio de Fermat permite considerar algunos problemas desde un punto de vista algo diferente que al hacer directamente uso de las leyes de reflexión y refracción. P. ej., al considerar un sistema óptico de enfoque en lugar de emplear la ley de refracción de la luz sobre una superficie curvilínea, es posible, simplemente, exigir la igualdad de las longitudes ópticas de todos los rayos que se enfocan.

1. Sextante y reflector angular. Dos espejos planos forman el ángulo diedro α. Sobre uno de los espejos incide un rayo que yace en el plano perpendicular a la arista del ángulo. Determinen el ángulo

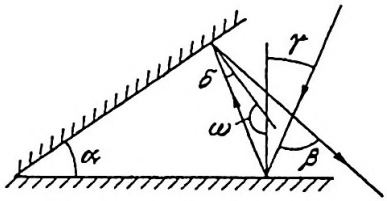


Fig. 1.1. Después de sufrir reflexión en dos espejos, el rayo incidente varía su dirección en el ángulo β

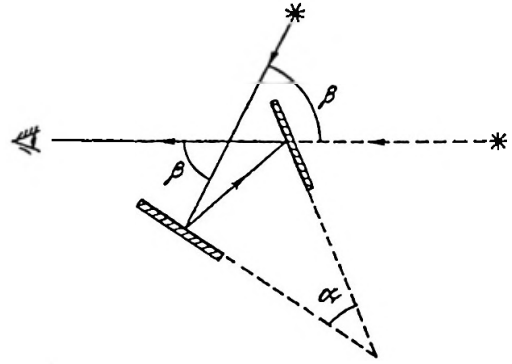


Fig. 1.2. Esquema de principio de un sextante

de desviación del rayo β de la dirección inicial después de reflejarse en los dos espejos. La marcha de los rayos se muestra en la fig. 1.1.

△ Supongamos que el ángulo de incidencia del rayo sobre el primer espejo es igual a γ, sobre el segundo, δ. Es evidente que el ángulo β, como ángulo exterior de un triángulo formado por los rayos, es igual a $2(\gamma + \delta)$. Por otro lado, $\gamma + \delta = \alpha$, ya que tanto el ángulo α, como $\gamma + \delta$, completan el ángulo ω hasta π. Por esto, $\beta = 2\alpha$. ¡Lo más interesante consiste en que este ángulo no depende del ángulo de incidencia del rayo sobre el espejo! Esta propiedad ha permitido, precisamente, emplear semejante sistema de espejos en el instrumento de navegación llamado sextante. Con este instrumento se mide la altura del astro sobre el horizonte, es decir, el ángulo β entre las direcciones al horizonte y al astro (fig. 1.2). Esto se realiza en condiciones desventajosas, p. ej., en la cubierta de la nave en balanceo. El instrumento puede sujetarse con las manos temblorosas, con ello, sólo es de importancia fijar con precisión el ángulo α. Uno de los espejos es semitransparente. Observando la línea del horizonte

a través de él, variando el ángulo α, se hace coincidir con ella la imagen del astro que se ve en dicho espejo (fig. 1.2). A continuación, el valor del ángulo α se lee en la escala del instrumento

Prestemos atención a un caso particular cuando los espejos forman entre sí el ángulo recto. Entonces $\beta = \pi$ y, como resultado de dos reflexiones, el rayo incidente gira en dirección opuesta (fig. 1.3). Recordemos que esto es cierto sólo en el caso cuando el rayo incidente yace en el plano perpendicular a la arista del ángulo diedro entre los espejos.

¿Es posible crear un dispositivo en el que el rayo incidente se reflejara hacia atrás en cualesquiera condiciones? Resulta que para ello es suficiente añadir a los dos espejos un tercero, situándo de mo-

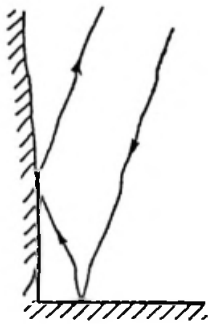


Fig. 1.3. El rayo que yace en el plano del diseño se refleja hacia atrás si los espejos forman un ángulo recto

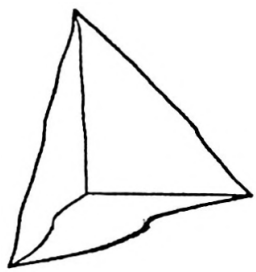


Fig. 1.4. La célula cóncava de tres espejos planos perpendiculares entre sí forma un reflector angular

do que los planos de los tres espejos sean entre sí perpendiculares, como los planos de coordenadas del sistema cartesiano (fig. 1.4). Para la orientación al azar del rayo incidente, éste, después de sufrir la reflexión de cada uno de los espejos, se propagará con precisión en sentido contrario. Es fácil cerciorarse de esto. En la fig. 1.5*a*, con el sombreado, se muestran los planos del espejo y el plano de incidencia del rayo. Vemos que las proyecciones de los rayos incidente y reflejado sobre el plano del espejo están dirigidas a lo largo de una misma recta MN (fig. 1.5 *b*). Las proyecciones de estos rayos sobre cualquier plano Q, perpendicular al espejo, forman iguales ángulos con la perpendicular al espejo (fig. 1.5 *c*). De aquí se desprende que en caso de la reflexión de los rayos de tres espejos perpendiculares entre sí, las proyecciones de los rayos sobre el plano de cualquiera de los tres espejos tiene el aspecto mostrado en la fig. 1.6. Pero, si la proyección del rayo sobre cualquiera de los planos de coordenadas varía la dirección por la inversa, el propio rayo, después de tres *reflexiones, girará con precisión hacia atrás. Semejante dispositivo* recibe el nombre de reflector angular y se utiliza ampliamente en la práctica.

Estos instrumentos se realizan con frecuencia en forma del ángulo cortado de un cubo de vidrio, es decir, de una pirámide triangular equilátera. Las caras laterales de tal cubo se hacen especulares. Los

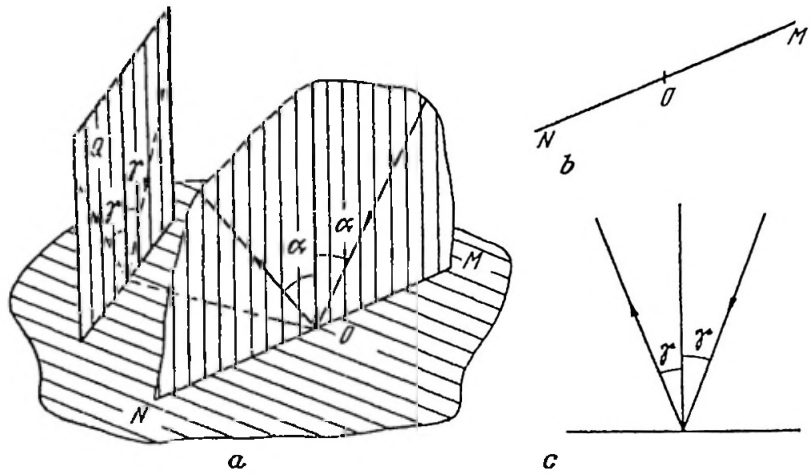


Fig. 1.5. La proyección de los rayos incidente y reflejado sobre el plano del espejo tiene el aspecto mostrado en la fig. *b*, mientras que la proyección en el plano *Q*, como en la fig. *c*

reflectores angulares se utilizan en lugar de espejos en los resonadores láser y en los telémetros. Su ventaja consiste en que ellos no requieren ajuste. Reflectores angulares especiales fueron llevados a la Luna

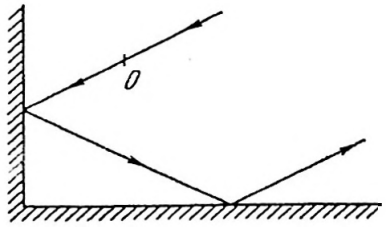


Fig. 1.6. En el punto *O* el rayo se refleja del tercer espejo que yace en plano del diseño

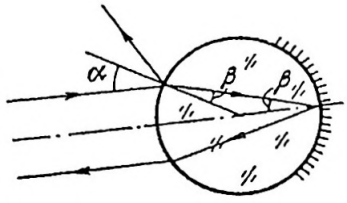


Fig. 1.7. El rayo que incide sobre la bolita transparente con $n=2$, después de su reflexión, se dirige exactamente hacia atrás

y se emplearon con el fin de medir la distancia hasta nuestro satélite con ayuda del rayo láser. El error de la medición sólo constituyó 0,1 m.

La aplicación de los reflectores angulares más difundida son los reflectores rojos de la luz, instalados en los automóviles, bicicletas y en la señalización de carreteras. Semejante accesorio es un mosaico de ángulos especulares.

Es de interés señalar que esta misma propiedad de reflejar la luz, incidente bajo cualquier ángulo, la posee el elemento óptico representado en la fig. 1.7. Es una bola de material transparente con índice de refracción $n = 2$ y con la superficie posterior plateada. Es fácil mostrar que cualquier rayo que pase por el interior de la bola, distando relativamente poco de su centro, después de reflejarse de la superficie posterior saldrá de la bola en dirección inversa. Esta propiedad se emplea para fabricar pintura reflectante de la luz en las señales de carretera: en su composición se incluyen diminutas bolitas de cristal. ▲

2. Reflejo de sol. Si con un espejo plano rectangular enviamos un reflejo de sol, en una pared cercana la forma de la mancha luminosa repetirá la forma del espejo, mientras que en la pared lejana la mancha luminosa tendrá forma elíptica. ¿Por qué?

△ El espejo (lo mismo que un diafragma) limita el haz de los rayos solares rectilíneos que sobre él inciden y varía su dirección. El cambio de la dirección de los rayos al reflejarse no desempeña un papel de principio en el problema de la forma de la mancha luminosa que se forma en la pared. Por esto es suficiente considerar la limitación del haz de rayos solares mediante un agujero de la misma forma y dimensiones que el espejo.

El fenómeno descrito en el planteamiento del problema se debe a que la luz del Sol crea en la pared la imagen del agujero cuando la pared está cerca y proporciona la imagen de la fuente al estar la pared lejos. Examinemos los dos casos con detalle.

1. La pared se encuentra cerca del agujero (o bien del espejo). Con la primera aproximación podemos considerar que el Sol es la fuente puntual S (fig. 2.1). Entonces, la mancha luminosa es la proyección central del agujero en el plano de la pared. El centro de la proyección S se encuentra muy lejos, por ello todos los rayos, prácticamente, son paralelos. Si, con ello, el plano de la pantalla con el agujero y la pared son paralelos, la forma y la dimensión de la mancha luminosa d_1 coinciden con la forma y la dimensión del agujero d: $d_1 = d$.

Primero, supongamos que la pantalla con el agujero y la pared son perpendiculares a la dirección de los rayos (fig. 2.1). Si inclinamos la normal al plano de la pantalla con el agujero hasta un ángulo β con relación a la dirección al Sol, la dimensión de la mancha luminosa en la correspondiente dirección disminuirá:

$$d_1 = d \cos \beta.$$

Pero si inclinamos la normal hacia la pared en el ángulo γ, la dimensión de la mancha aumentará:

$$d_1 = d/\cos \gamma.$$

Con semejantes inclinaciones la mancha luminosa en la pared es de forma rectangular. Si inclinamos simultáneamente la pantalla y la pared respecto a la dirección de los rayos en distintos planos, la mancha luminosa tendrá la forma de paralelogramo.

En realidad, debido al carácter finito del diámetro angular del Sol ($\alpha \approx 0{,}01$), el límite de la sombra en la pared desde los bordes

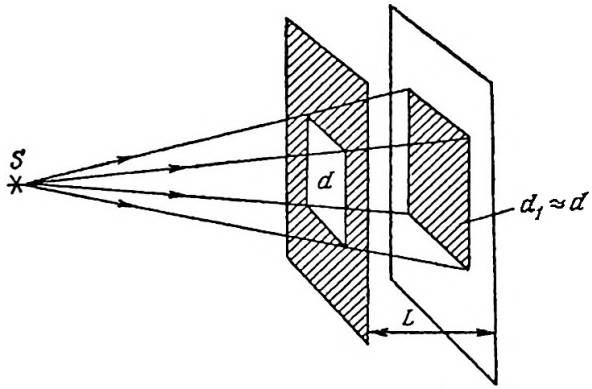


Fig. 2.1. La forma del reflejo de sol cuando la pared está cerca del agujero

del agujero en la pantalla estarán difuminados. Es obvio que los resultados obtenidos más arriba son ciertos cuando la anchura de la penumbra es mucho menor que las dimensiones de la mancha luminosa (es decir, las dimensiones del espejo). La anchura de la penumbra

Fig. 2.2. Para la determinación de la anchura de la penumbra

$d' = \alpha L$, donde L es la distancia del agujero a la pared (fig. 2.2). Así pues, la forma del reflejo de sol repite la forma del espejo bajo la condición de que $\alpha L \ll d$. Como $\alpha \approx 0{,}01$, la condición que consideramos tomará la forma

$$L \ll 100\, d.$$

Si $d \approx 10$ cm esto proporciona $L \ll 10$ m.

2. La pared está lejos del agujero (del espejo). Ahora, con la primera aproximación, el agujero en la pantalla se puede considerar puntual. Su forma no desempeña papel alguno y todo queda definido por la dimensión angular finita del Sol. La mancha luminosa en la pared es como si fuera la imagen del Sol en una cámara oscura.

Ella es de por sí la sección con el plano de la pared del cono cilíndrico de los rayos solares con el vértice situado en el agujero y con ángulo α en el vértice igual al diámetro angular de Sol (fig. 2.3). Si la pared es perpendicular al eje del cono de los rayos, la mancha lu-

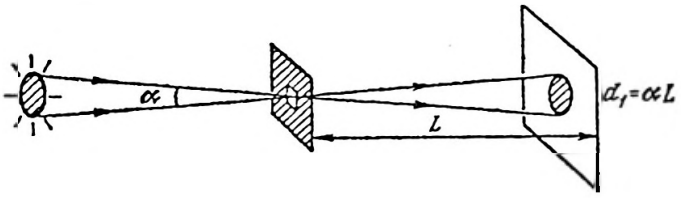


Fig. 2.3. Forma del reflejo cuando la pared está lejos del agujero

minosa tiene la forma de un círculo de diámetro $d_1 = \alpha L$. Si la pared tiene una inclinación con ángulo γ, el círculo se convierte en una elipse con el eje mayor

$$d_2 = d_1/\cos\gamma = \alpha L/\cos\gamma.$$

Al aumentar las dimensiones del orificio (o sea, del espejo) la luminosidad de la mancha crece (el reflejo de sol es más brillante) pero, simultáneamente, sus bordes se difuminan en mayor grado. Es evidente, que tal difuminación es de un orden de las dimensiones d del agujero. Así pues, el reflejo de sol tiene forma elíptica (o bien redonda) si $d \ll d_1 = \alpha L$, es decir, si $L \gg 100\, d$.

De la solución aducida es obvio que el parámetro adimensional Γ, que es el que determina la forma del reflejo de sol, es la razón entre el diámetro angular del Sol α y la dimensión angular del espejo, es decir, el ángulo ε bajo el cual él se ve desde la pared:

$$\Gamma = \alpha/\varepsilon = \alpha L/d.$$

Si $\Gamma \ll 1$ se verifica el primero de los casos considerados, si $\Gamma \gg 1$, el segundo.

El análisis que hemos realizado se basaba por completo en la ley de la óptica geométrica acerca de la propagación rectilínea de la luz. La solución exhaustiva debe tomar en consideración los efectos de difracción que se manifiestan en la desviación respecto de la ley de la propagación rectilínea de la luz al pasar ésta por el agujero en la pantalla. El ángulo φ de la desviación por difracción de la luz, según el orden de la magnitud, es igual a la razón entre la longitud de la onda luminosa λ y la dimensión del agujero d:

$$\varphi = \lambda/d$$

(con mayor detalle acerca de esto, véase el problema «Enfoque de una cámara fotográfica»). Los efectos de la difracción no influyen sobre la forma del reflejo de sol si el ángulo φ es pequeño en compara-

ción con la dimensión angular del Sol α:

$$\lambda/d \ll \alpha.$$

Considerando $\lambda \approx 5 \cdot 10^{-7}$ m, $\alpha \approx 0{,}01$, hallamos que los efectos de difracción son insignificantes si, p. ej., la dimensión d del espejo supera $5 \cdot 10^{-5}$ m. ▲

3. Refracción de la luz en una cuña de vidrio. La luz incide por la normal a la cara de la cuña de vidrio con pequeño ángulo en el vértice (fig. 3.1). ¿A qué ángulo girarán los rayos de la luz refractada en la cuña al girar los rayos incidentes en un pequeño ángulo α alrededor de la arista de la cuña?

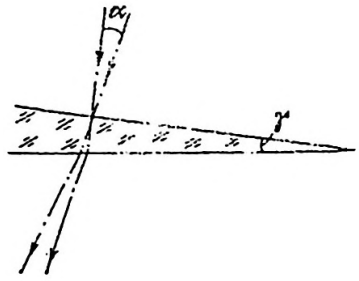


Fig. 3.1. Refracción de los rayos en una cuña de vidrio

△ La respuesta a la pregunta planteada se puede obtener aplicando consecutivamente la ley de refracción de la luz en el límite de separación de dos medios. Como según el planteamiento del problema los ángulos son pequeños, en la ley de refracción sus senos se pueden sustituir por los propios ángulos expresados en medida radial. Los rayos incidentes por la normal sobre la cara delantera de la cuña sufren refracción sólo en la cara posterior, en la que el ángulo

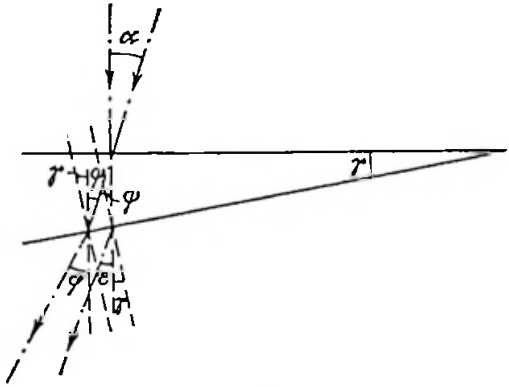


Fig. 3.2. Para la determinación del ángulo de giro del rayo

de incidencia es igual al ángulo de refracción γ de la cuña (fig. 3.2). Si designamos el ángulo de giro de dichos rayos con ε, tendremos

$$n \operatorname{sen} \gamma = \operatorname{sen} (\varepsilon + \gamma), \qquad (1)$$

de donde, para pequeños valores de los ángulos γ y ε, se desprende

$$n\gamma \approx \varepsilon + \gamma, \text{ o sea, } \varepsilon \approx (n - 1)\gamma. \qquad (2)$$

Los rayos que inciden sobre la cara delantera oblicuamente (bajo el ángulo α), sufren refracción sobre las dos caras de la cuña (fig. 3.2). En la cara delantera

$$\operatorname{sen} \alpha = n \operatorname{sen} \psi, \tag{3}$$

de donde el ángulo de refracción de la cara delantera $\psi \approx \alpha/n$. En la cara posterior de la cuña se verifica la relación

$$n \operatorname{sen} (\psi + \gamma) = \operatorname{sen} (\varphi + \gamma),$$

de donde

$$n (\psi + \gamma) \approx \varphi + \gamma, \tag{4}$$

es decir, el ángulo de refracción en la cara posterior $\varphi \approx n\psi + (n - 1)\gamma$. Tomando en consideración que debido a (3) $n\psi = \alpha$, tenemos

$$\varphi \approx \alpha + (n - 1)\gamma. \tag{5}$$

Como vemos en la fig. 3.2, el ángulo de giro de los rayos refractados es igual a la diferencia de los ángulos φ y ε:

$$\varphi - \varepsilon \approx \alpha.$$

Así pues, el rayo refractado gira al mismo ángulo que el incidente.

La respuesta real a la pregunta en el planteamiento del problema ya la hemos conseguido en la fórmula (5), ya que la diferencia $\varphi -$

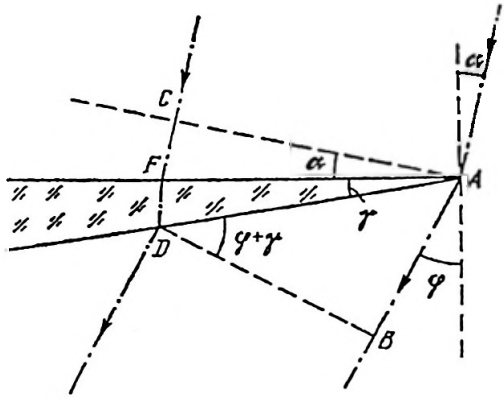


Fig. 3.3. Giro del frente de onda durante la refracción de la luz en la cuña

$- \alpha$, como se desprende de la fig. 3.2, nos proporciona el ángulo de desviación de los rayos de su dirección inicial al pasar por la cuña. De (5) se deduce que $\varphi - \alpha = (n - 1)\gamma$, es decir, con pequeños ángulos el ángulo de desviación no depende del ángulo de incidencia α.

El ángulo de desviación $\varphi - \alpha$, expresado con la fórmula (5), se puede hallar sin aplicar la ley de refracción, si aplicamos el principio de Huygens o el de Fermat. En la fig. 3.3 se muestran con lí-

neas de trazos las posiciones de las superficies ondulatorias para las ondas planas incidente y desviada en la cuña. El giro del frente de onda está condicionado por la disminución n veces de la velocidad de fase de la luz en el vidrio. El tiempo de paso de la luz por el sector CFD es igual al tiempo en el sector AB. Por ello, deben ser iguales las longitudes ópticas de estos sectores:

$$| CF | + n | FD | = | AB |. \qquad (6)$$

El frente de onda de la onda desviada forma el ángulo φ con la cara delantera de la cuña. Por ello, con la cara posterior él forma el ángulo $\varphi + \gamma$. Ahora, con ayuda de la fig. 3.3, la relación (6) se puede anotar en la forma

$$L\alpha + nL\gamma = L(\varphi + \gamma) \text{ (aquí } L = | AF | \approx | AD |),$$

de donde, en directo, sigue la fórmula (5). ▲

4. **Rayos X en medicina.** Como es sabido en los tejidos del organismo la luz visible se absorbe con mucha menor intensidad que la radiación de rayos X. ¿Por qué, entonces, para el diagnóstico se emplean en medicina, precisamente, los rayos X y no la radiación de la región visible del espectro?

△ En el planteamento sólo se dice que los rayos X se absorben más intensamente por el organismo humano que la luz visible. Y si la posibilidad de «radiografiar» sólo se determinara por la absorción, los rayos X no darían ninguna clase de ventajas en comparación con la radiación visible. Esto significa que la cuestión radica no sólo en el grado de absorción de la radiación, sino que en algunas otras singularidades de su propagación en el organismo. ¿Cómo pueden estar ligadas dichas singularidades?

Ante todo, recordemos que el organismo es un medio no homogéneo de tejidos, que limitan entre sí, con diferentes propiedades ópticas. Para la propagación de la luz visible estas no homogeneidades resultan ser de suma importancia. Su papel puede comprenderse en el siguiente sencillo ejemplo: vemos perfectamente los pececillos en un acuario a través de la capa de agua, pero nada vemos con espesa niebla, constituida de diminutas gotas de esta misma agua, pura y transparente, suspendidas en el aire transparente en absoluto. ¿Por qué?

Vemos el objeto si el haz de luz, que sale de cierto punto en él, incide en nuestro ojo y, de resultas, en la retina se forma la imagen de dicho punto. Pero si en el recorrido semejante haz tropieza con una gota de niebla, toda la luz que incide sobre ella, como resultado de la reflexión y la refracción en su superficie, varía la dirección de propagación y se separa del haz. Si en el recorrido del haz tales gotas son muchas, ellas interceptan el haz de modo que en la retina del ojo no puede formarse la imagen del punto dado del objeto. Al ojo sólo

llegará la luz dispersa por las gotas de niebla que no es capaz de formar la imagen del objeto. Semejante luz dispersa ya no sirve de señal para el ojo, sino que sólo crea el fondo de ruido.

Es fácil estimar la distancia l a la que aún podemos distinguir los objetos en la niebla. Para simplificar, vamos a considerar que todas las gotas de niebla son bolitas iguales de radio R. Es evidente que el haz cilíndrico de luz del mismo radio R podrá sin obstáculo propagarse hasta el momento cuando tropiece en su camino con una gota de niebla. Por ello, para estimar la distancia l podemos considerar que en el volumen de un cilindro de radio R y largura l debe haber, por término medio, una gotita de niebla. Para una concentración de dichas gotitas igual a n esta condición conduce a la igualdad

$$n\pi R^2 l = 1, \text{ de donde } l = 1/(\pi R^2 n).$$

Señalemos que, en realidad, la intensidad del haz luminoso durante su propagación por la niebla decrece a medida de aumentar la distancia según una ley exponencial. Una estimación más escrupulosa muestra que el valor hallado de l es la distancia en la que la intensidad del haz de luz decrece e veces.

Así pues, al propagarse la luz por un medio no homogéneo, que débilmente absorbe, la debilitación del haz lumínoso en condiciones de una concentración suficientemente alta de las no homogeneidades, se determina no tanto por la absorción, como por la dispersión en las no homogeneidades. Claro está que esta dispersión sólo se verifica cuando el índice de refracción varía en el límite de las no homogeneidades. En particular, en la niebla la luz visible se dispersa con eficacia porque el índice de refracción de las gotas se distingue notoriamente del índice de refracción del aire.

El organismo del hombre está formado no por gotas, pero debido a la presencia de múltiples no homogeneidades la figura cualitativa de la propagación de la luz visible por él es la misma que en la niebla, ya que los índices de refracción de distintos tejidos del organismo se diferencian entre sí.

De modo en absoluto diferente transcurre la propagación de los rayos X. La causa de esto radica en que el índice de refracción de los rayos X no difiere de la unidad, prácticamente, en todas las sustancias. Por esta razón, los rayos X se propagan por el organismo de forma rectilínea, sin dispersarse y como si no notaran todos los límites internos entre distintos tejidos. Las imágenes más sombrías de los huesos y los órganos internos surgen gracias a la diferente absorción de los rayos X en los huesos y tejidos blandos del organismo.

No obstante, la radiación roentgen, debido a la absorción, no puede pasar por un gran grosor del medio, incluso al no haber dispersión. P. ej., la radiación emitida por los cuerpos celestes en la región visible del espectro alcanza libremente la superficie de la Tierra, pasando por todo el grosor de la atmósfera homogénea (si

no hay niebla o bien nubes), pero los rayos X se absorben por completo en la atmósfera. Por esto, la astronomía de rayos X se ha hecho posible sólo después de sacar los telescopios de rayos X tras los márgenes de la atmósfera. ▲

5. Imagen de objetos volumétricos. Con ayuda de una lente delgada se obtiene la imagen de un objeto volumétrico, p. ej., de un cubo. ¿Puede ser la imagen volumétrica de este objeto geométricamente semejante al propio objeto (es decir, ser también un cubo)?

△ A primera vista puede parecer que así debe ser, ya que la imagen siempre se parece al objeto. Sin embargo, si probamos mos-

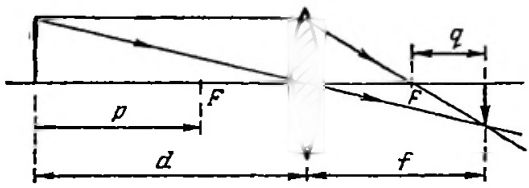


Fig. 5.1. Para deducir la fórmula de Newton para una lente delgada

trar de modo riguroso que la relación de las dimensiones transversales y longitudinales en la imagen es la misma que en el objeto, veremos que la cuestión no es tan sencilla.

El enfoque cualitativo para la resolución de este problema se basa en el empleo de la fórmula de la lente delgada

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}. \tag{1}$$

Es cómodo dar a esta fórmula una forma algo diferente, introduciendo la designación p para la distancia desde el objeto hasta el foco delantero de la lente y q para la distancia desde el foco posterior hasta la imagen (fig. 5.1):

$$p = d - F, \quad q = f - F. \tag{2}$$

Poniendo las magnitudes d y f de (2) en la ecuación (1), después de sencillas transformaciones, obtenemos

$$pq = F^2. \tag{3}$$

Semejante tipo de relación para una lente delgada recibe el nombre de fórmula de Newton.

Designemos las dimensiones transversal y longitudinal del objeto por y y x, mientras que las correspondientes dimensiones de la imagen por Y y X (fig. 5.2). Con el fin de aclarar la cuestión de la semejanza geométrica entre el objeto volumétrico y su imagen, además del aumento lineal transversal de la lente $\Gamma = Y/y$ (fig. 5.2), intro-

duzcamos el aumento longitudinal γ, igual a la razón de las dimensiones longitudinales de la imagen y el objeto:

$$\gamma = X/x. \tag{4}$$

El aumento transversal de la lente Γ se puede expresar con las magnitudes introducidas p y q que caracterizan la posición del objeto y la imagen respecto de los focos de la lente:

$$\Gamma = \frac{Y}{y} = \frac{f}{d} = \frac{F+q}{F+p}. \tag{5}$$

Poniendo aquí la distancia focal de la lente F de la fórmula de Newton (3), obtenemos

$$\Gamma = \sqrt{q/p}. \tag{6}$$

Con el fin de obtener la expresión para el aumento longitudinal γ, hagamos uso de la fórmula de Newton para el punto del objeto mostrado con la flecha horizontal en la fig. 5.2:

$$(p + x)(q - X) = F^2. \tag{7}$$

Suprimimos los paréntesis en el primer miembro de la expresión (7).

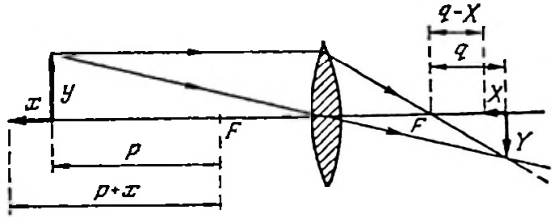


Fig. 5.2. Para calcular el aumento transversal y longitudinal de una lente delgada

Entonces, tomando en consideración la fórmula (3), obtenemos

$$xq - pX - xX = 0. \tag{8}$$

Supongamos que xX es pequeño en comparación con cada uno de los dos restantes términos de la relación (8). En este caso de (8) se deduce que

$$X/x = q/p. \tag{9}$$

Para que el sumando xX eliminado en (8) sea pequeño en comparación con el segundo término pX, es necesario que la dimensión longitudinal del objeto x sea pequeña en comparación con la distancia p desde el objeto hasta el foco: $x \ll p$. Si esta condición se cumple, de (9) se desprende que, asimismo, $X \ll q$. De aquí está claro que el término xX en (8) será también pequeño en comparación con el primer sumando.

Así pues, cuando la dimensión longitudinal del objeto x es pequeña en comparación con la distancia p hasta el foco, el aumento

longitudinal de la lente γ, de acuerdo con la fórmula (4), se da con la expresión (9):

$$\gamma = q/p. \tag{10}$$

Comparando las fórmulas (6) y (10), advertimos que el aumento longitudinal de una lente delgada es igual al cuadrado del aumento transversal:

$$\gamma = \Gamma^2. \tag{11}$$

De aquí se deduce que la imagen será geométricamente semejante al objeto sólo cuando $\gamma = \Gamma = 1$. Para conservar la mencionada semejanza el objeto debe, obligatoriamente, representarse en tamaño natural. En todos los restantes casos no habrá semejanza geométrica.

Así pues, si queremos obtener con ayuda de una lente delgada la imagen de un objeto volumétrico, geométricamente semejante al propio objeto, las dimensiones longitudinales del objeto deben ser pequeñas en comparación con la distancia focal de la lente y hay que ubicarlo a la distancia focal doble de la lente. ▲

6. **Enfoque de un haz de rayos paralelos.** Analicemos un haz paralelo de rayos monocromáticos. Si en el camino de semejante haz situamos una lente convergente con superficies esféricas, como sabemos, todos los rayos convergerán en un punto llamado foco. Sin embargo, esto es cierto sólo para un haz estrecho, o sea, para los rayos no muy alejados del eje óptico. Esto significa, que la anchura del haz debe ser pequeña en comparación con el radio de curvatura de las superficies refringentes de la lente. Para los haces anchos tiene lugar la aberración esférica, es decir, los rayos lejanos cortan el eje óptico no en el foco (fig. 6.1).

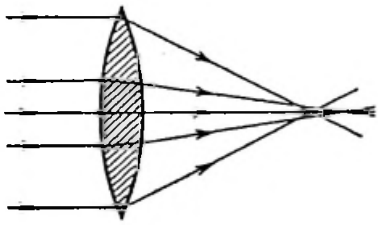


Fig. 6.1. Aberración esférica de una lente ordinaria

¿Será posible elegir tal forma de las superficies refringentes de la lente de modo que desaparezca la aberración esférica, es decir, que el haz de rayos paralelos de cualquier anchura converja en un punto?

△ Para resolver este problema es cómodo hacer uso del principio de Fermat. Previamente resolvamos un problema auxiliar. Aclaremos cuál debe ser la forma de la superficie refringente, que separa dos medios homogéneos con índices de refracción $n_0 = 1$ y n, para que el haz paralelo converja en un punto después de la refracción. Partiendo de consideraciones de simetría es obvio que aquélla será una superficie de revolución en torno al eje de simetría del haz. Por ello, es suficiente buscar la sección de dicha superficie con el plano axial (fig. 6.2). Como en el eje x la fase de todos los rayos es la mis-

ma, la longitud óptica de los rayos desde el eje x hasta el foco, yaciente a la distancia prefijada F, debe ser la misma.

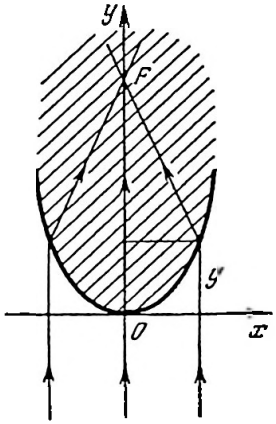


Fig. 6.2. Para hallar la forma de la superficie refringente que forma un haz de rayos paralelos.

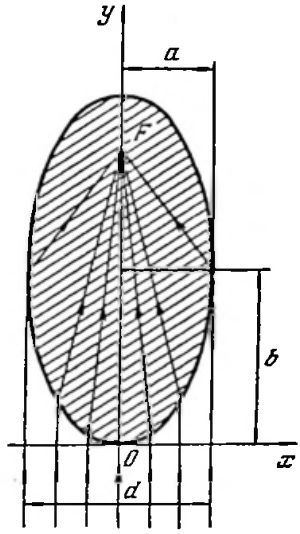


Fig. 6.3. El haz de rayos paralelos después de refractarse sobre la superficie de un elipsoide de revolución se concentra en el foco lejano

Consideremos el rayo central y el rayo que pasa a la distancia x del eje, tomada al azar. Para ellos tendremos

$$Fn = y + n\sqrt{(F-y)^2 + x^2}.$$

Esta es la ecuación de la superficie buscada.

Transformemos esta relación con el fin de aclarar la forma de la superficie obtenida. Separando la raíz cuadrada y elevando ambos miembros de la igualdad al cuadrado, obtenemos

$$(Fn - y)^2 = n^2[(F-y)^2 + x^2].$$

Después de fáciles transformaciones esta ecuación se reduce a la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-b)^2}{b^2} = 1, \qquad (1)$$

donde

$$a = F\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}, \quad b = F\frac{n}{n+1} \quad (a < b). \qquad (2)$$

La ecuación (1) es la de la elipse representada en la fig. 6.3, a y b son los semiejes menor y mayor de la elipse.

Como sabemos, la elipse es el lugar geométrico de los puntos para los que la suma de las distancias hasta ellos desde dos puntos prefijados, llamados focos, es la misma. Esta suma es igual al eje mayor de la elipse $2b$. Podemos cerciorarnos de que el punto de intersección de todos los rayos (foco de un haz de rayos) coincide con el foco alejado de la elipse. Esto es fácil, sólo se requiere sencillas transformaciones algebraicas.

Así pues, hemos hallado la forma de la superficie refringente que satisface la condición planteada: todos los rayos de un haz paralelo que sobre ella inciden, convergen en un mismo punto. No obstante, tal haz paralelo no puede ser cuan se quiera ancho: para la distancia prefijada F la anchura del haz d, como se deduce de la fórmula (2), no puede superar el valor

$$d = 2a = 2F\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}.$$

Ahora, reflexionemos cómo se puede, con ayuda de semejante superficie refringente, crear una lente libre de la aberración esférica para los rayos de un haz paralelo. Es evidente, que la segunda superficie refringente de tal lente debe ser perpendicular a todos los rayos convergentes, ya que sólo en tal caso ella cambiará su dirección y todos los rayos, como antes, se cortarán en un mismo punto F. Semejante superficie es una esfera con centro en el punto F. Con el fin de obtener, para la distancia F prefijada, la lente de diámetro máximo, el radio R de curvatura de su superficie interna se debe elegir igual al semieje mayor de la elipse b (fig. 6.4).

Hasta el momento, hemos supuesto, tácitamente, que el índice de refracción $n > 1$, es decir, el medio superior en la fig. 6.2 posee densidad óptica mayor.

Pero si comprendemos por símbolo n el índice relativo de refracción del medio superior con relación al inferior, tiene sentido considerar también el caso contrario $n < 1$, cuando el haz paralelo de rayos sufre refracción al pasar del medio más denso al menos denso. Como al deducir la ecuación de la superficie refringente no se hizo uso de la condición $n > 1$, asimismo, en el caso $n < 1$ la ecuación del límite que buscamos se dará, lo mismo que antes, con la fórmula (1), pero, como se deduce de (2), cuando $n < 1$ $a^2 < 0$. En este caso, la expresión (1) será la ecuación de la hipérbola representada en la fig. 6.5.

Para crear mediante tal superficie refringente una lente, como segunda superficie refringente se debe elegir en el medio inferior un plano perpendicular al eje del haz. La distancia desde este plano hasta el vértice de la superficie refringente se elige en función de qué diámetro queremos que tenga la lente. Ahora, no habrá limitaciones para la dimensión del diámetro (la recta de trazos en la fig. 6.5).

Se crea la impresión de que hemos conseguido construir una lente perfecta, por lo menos para los rayos monocromáticos. Sin embargo, semejante lente no sirve en absoluto para obtener las imágenes inclu-

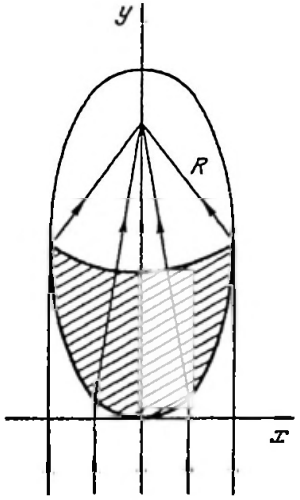


Fig. 6.4. La segunda superficie de la lente enfocadora debe ser parte de una esfera perpendicular a los rayos

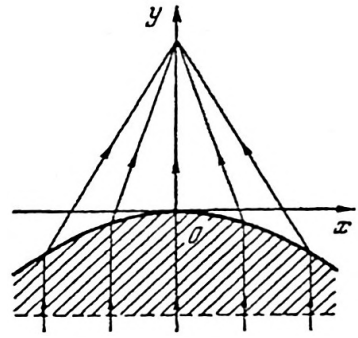


Fig. 6.5. Con $n < 1$ la superficie enfocadora del haz paralelo es un hiperboloide de revolución

so de objetos infinitamente alejados. En efecto, en un mismo punto sólo se cortan los rayos paralelos al eje de simetría de tal lente. Los haces de rayos paralelos, oblicuos al eje óptico de la lente, no se cortan en un punto. ▲

7. Radiación de Cherenkov. Durante el movimiento uniforme del electrón por un medio, a velocidad mayor que la de la luz en el medio dado, se observa el llamado efecto de Vavílov — Cherenkov. Consiste en que el electrón perturba, coherentemente, con su campo las moléculas o los átomos del medio, debido a lo cual ellos se convierten en fuentes de ondas luminosas que se propagan en determinada dirección. Haciendo uso del principio de Huygens determinen en qué dirección se propagará la radiación

△ En un medio con índice de refracción $n > 1$ las ondas luminosas se propagan a la velocidad $v = c/n$, menor que la de la luz en el vacío.

Con objeto de hallar la dirección de propagación de la radiación de Cherenkov es preciso, en cierto momento de tiempo, determinar la posición del frente de la onda luminosa excitada por el electrón durante su movimiento. En la fig. 7.1 está representada la trayecto-

ria rectilínea del movimiento uniforme del electrón en el medio. Cada punto de la trayectoria del electrón se puede considerar como la fuente de una onda esférica luminosa que se propaga a velocidad v. Sean A, B y C los puntos de la trayectoria en los que se hallaba el electrón después de intervalos iguales consecutivos de tiempo Δt. En el momento de tiempo cuando el electrón se encontraba en el punto B el frente de la onda, excitada por él en el punto A, representaba una esfera, cuyo radio $v\,\Delta t$ era menor que la distancia AB, ya que la velocidad del electrón v_{el} supera la de la luz en el medio.

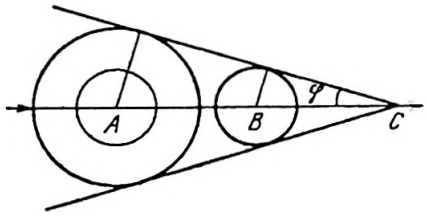


Fig. 7.1. La construcción según el principio de Huygens del frente de onda emitida por un electrón, cuya velocidad en la esfera dada es mayor que la de la luz

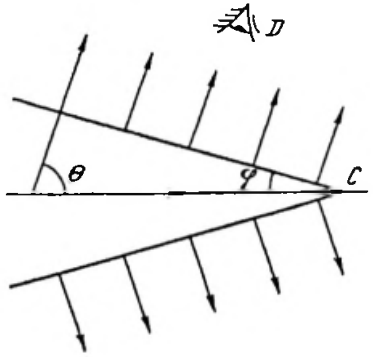


Fig. 7.2. La radiación de Cherenkov se propaga bajo el ángulo θ con relación al sentido de movimiento del electrón

Cuando el electrón llega al punto C, el frente de la onda, excitada por él en el punto B, es una esfera de radio $v\,\Delta t$, en tanto que el frente de la onda, excitada en el punto A, una esfera de radio dos veces mayor. Para confeccionar el frente de onda de la radiación de Cherenkov en el momento cuando el electrón se halla en el punto C, según el principio de Huygens, hay que hallar la envolvente de los frentes de todas las ondas, excitadas por el electrón en los instantes anteriores. A partir de la fig. 7.1 se desprende en directo que esa envolvente es la superficie de un cono circular, cuyo eje coincide con la trayectoria del electrón, con vértice en el punto C, mientras que el ángulo φ entre la generatriz del cono y su eje se determina con la relación

$$\operatorname{sen} \varphi = v/v_{el}.$$

Como los rayos de la luz son perpendiculares al frente de onda, la radiación de Cherenkov se propaga bajo el ángulo θ a la dirección de movimiento del electrón (fig. 7.2):

$$\cos \theta = \operatorname{sen} \varphi = v/v_{el}. \qquad (1)$$

Hemos construido el frente de onda para el momento de tiempo cuando el electrón se encuentra en el punto C. Con el transcurso del tiempo el vértice del cono, coincidente con la posición del electrón, se desplaza junto con él a velocidad v_{el}. El receptor de la radiación, situado en algún punto D (fig. 7.2), registrará la ráfaga de luz en el momento cuando el frente de onda de la radiación de Cherenkov alcance dicho punto. Basados en este principio funcionan los contadores de Cherenkov de partículas cargadas, extensamente empleados en física nuclear.

Es de interés señalar que la condición de la radiación de Cherenkov (1) es cierta para cualquier fuente «ultraluminosa» y no sólo para la partícula cargada en movimiento a velocidad mayor que la

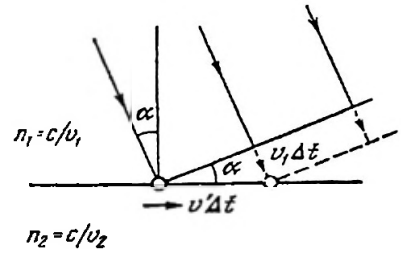


Fig. 7.3. La línea de intersección del frente de onda con el límite de separación de dos medios se mueve a la velocidad v', mayor que v_1

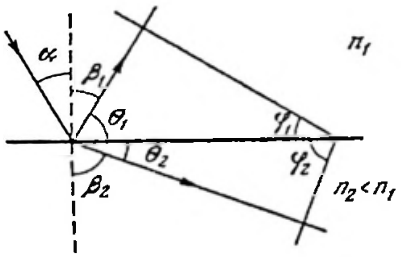


Fig. 7.4. Las direcciones de las ondas reflejada y refractada se pueden obtener empleando la condición de la radiación de Cherenkov

de la luz en el medio dado. P. ej., si en el límite plano de separación de dos medios incide una onda plana bajo cierto ángulo α (fig. 7.3), la línea de intersección del frente de onda con el límite de separación se mueve a lo largo de éste a la velocidad

$$v' = v_1/\text{sen}\ \alpha > v_1, \tag{2}$$

donde $v_1 = c/n_1$ es la velocidad de fase de la luz, en el primer medio. Considerando esta línea, en movimiento a la velocidad $v' > v_1$, como una fuente ultraluminosa y aplicando al primer medio la condición de la radiación de Cherenkov (1), hallamos, de inmediato, la dirección de la onda reflejada β_1 (fig. 7.4):

$$\text{sen}\ \beta_1 = \cos\theta_1 = v_1/v'. \tag{3}$$

Poniendo en (3) la velocidad de movimiento de la fuente v' de (2), obtenemos que sen β_1 = sen α o bien $\beta_1 = \alpha$. Esta es la bien conocida ley de reflexión de la luz en el límite plano.

Ahora, apliquemos la condición de la radiación de Cherenkov (1) al segundo medio, donde la velocidad de fase de la luz $v_2 = c/n_2$:

$$\text{sen}\ \beta_2 = \cos\theta_2 = v_2/v'. \tag{4}$$

Si $v' < v_2$, la condición (4) no se cumple con ningún valor de θ_2, es decir, por el segundo medio la luz no puede propagarse. Esto corresponde al bien conocido caso de la reflexión total de la luz de un medio con densidad óptica menor y que tiene lugar cuando $v_1/\text{sen}\ \alpha < v_2$, o sea, cuando $n_1 \text{ sen } \alpha > n_2$. Si $v' > v_2$, la condición de la radiación de Cherenkov (4) nos proporciona la dirección de la onda de la luz refractada que se propaga por el segundo medio:

$$\text{sen } \beta_2 = \frac{v_2}{v_1} \text{ sen } \alpha = \frac{n_1}{n_2} \text{ sen } \alpha. \qquad (5)$$

Así pues, vemos que las leyes ordinarias de reflexión y refracción de la luz en el límite plano coinciden con la condición de la radiación de Cherenkov y, en este sentido, podemos decir que la condición de la radiación de una fuente ultraluminosa es ya conocida varios siglos.

Ahora, consideremos en que se diferencia la radiación de Cherenkov de otros tipos de luminiscencia, provocados por el movimiento de una partícula cargada por la sustancia. Durante el movimiento del electrón por la sustancia su interacción con los átomos de ésta conduce a que parte de la energía del electrón se puede transmitir a los átomos, provocando su ionización o bien excitación con la posterior irradiación. Sin embargo, esto no es la radiación de Cherenkov, ya que ella no es coherente. Semejante radiación es posible incluso a velocidad del electrón menor que la de fase de la luz en un medio. Para representarse con mayor claridad las singularidades de la radiación de Cherenkov, examinemos el siguiente ejemplo. Imaginémonos que el electrón, a considerable velocidad, está en movimiento por el eje de un canal hueco hecho en la sustancia, de modo que él no sufre choques directos con los átomos de ella. Sin embargo, resulta que si el diámetro del canal es mucho menor que la longitud de onda de la luz, a pesar de todo se produce la perturbación del medio con el campo electromagnético del electrón, lo que, cuando $v_{el} > v$, conduce a la pérdida de energía de los electrones en forma de una radiación luminosa a través de la superficie del canal. Con ello, si el medio es transparente por completo, el flujo de la radiación pasa por él sin obstáculo. Precisamente esta radiación es la pura radiación de Cherenkov. Claro está, la energía que se irradia se toma de la energía del electrón en movimiento, cuya velocidad debe, en tal caso, disminuir. Pero la propia radiación de Cherenkov no está ligada, de manera alguna, con el frenado del electrón, ya que ella también se produce con el movimiento uniforme del electrón a la velocidad $v_{el} > v$. Es obvio que semejante movimiento uniforme, debido a las pérdidas de energía para la radiación, no puede ser movimiento por inercia y, para su manutención, requiere una fuerza externa constante. ▲

8. Enfoque de una cámara fotográfica. El objetivo de ésta crea la imagen real, que yace en el plano focal, de un punto alejado al infinito. Por esta razón, al fotografiar objetos alejados, la capa fotosensible de la placa o película se hace coincidir con el plano focal. Determinen la desviación máxima tolerable de la capa fotosensible respecto del plano focal del objetivo para la que no se produce el empeoramiento de la calidad de la imagen.

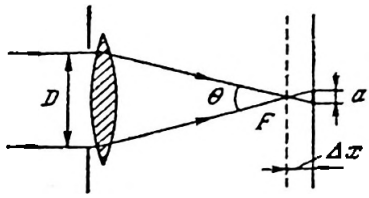


Fig. 8.1. Al desplazar la placa del plano focal del objetivo la imagen de la fuente puntual se difumina en forma de una mancha redonda

△ Vamos a considerar que en el objetivo de la cámara fotográfica se han liquidado todas las aberraciones. Si la luz se propagara, rigurosamente, según las leyes de la óptica geométrica, el haz paralelo de rayos de una fuente puntual, alejada al infinito, convergería en el foco del objetivo (fig. 8.1). Si disponemos la placa (fotográfica) de modo que la capa fotosensible no yazca con exactitud en el plano focal, sino que esté desviada de éste a uno u otro lado en la magnitud Δx, en la placa se obtendrá no un punto sino la imagen en forma de un círculo. Su diámetro a, como vemos en la fig. 8.1, se determina de la relación

$$a = \theta \Delta x = \frac{D}{F} \Delta x. \qquad (1)$$

Aquí D es el diámetro del orificio en el diafragma o bien el diámetro de la montura del objetivo cuando el diafragma está totalmente abierto.

Cerca del punto de intersección del haz de rayos la curvatura de la superficie de onda se hace tan considerable que las condiciones de aplicación de la óptica geométrica a ciencia cierta no se cumplen. Por esta razón el flujo luminoso no se puede reunir en un punto en el foco del objetivo. ¿Qué aspecto tiene la imagen de una fuente puntual, alejada al infinito, en el plano focal del objetivo de la cámara fotográfica?

Con el fin de obtener una representación de esto, examinemos para simplificar la difracción de una onda plana al pasar ella por una rendija con bordes paralelos rectos (fig. 8.2). Coloquemos detrás de la rendija una lente convergente. De acuerdo con el principio de Huygens cada punto del frente de la onda luminosa en la rendija es una fuente de nuevas oscilaciones, que se propagan en todas direcciones. En cada punto del plano focal de la lente convergen aquellos rayos que antes de ésta eran paralelos entre sí. Por ello, para hallar la figura de difracción en el plano focal de la lente, hay que considerar la interferencia de diversos haces de rayos paralelos entre sí.

Todos los rayos que se mueven de modo paralelo a la dirección inicial, tienen igual fase, por lo que en el centro de la figura de difracción (punto A en la fig. 8.2) veremos el máximo de iluminación. Examinemos los rayos que constituyen el ángulo φ con la dirección inicial. Si la diferencia de marcha de los rayos extremos Δ es igual a la longitud de onda de luz λ, como resultado de la interferencia en el punto B se producirá la extinción mutua de las oscilaciones. En efecto, para cada elemento del frente de onda σ en la mitad superior

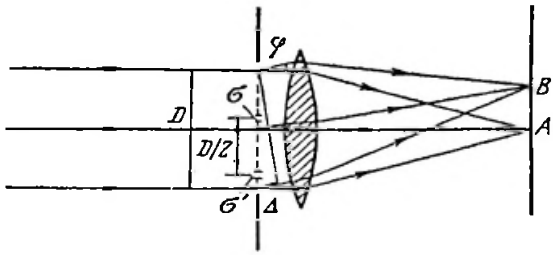


Fig. 8.2. Para el cálculo de las dimensiones de la figura de difracción

de la rendija (fig. 8.2) habrá un elemento igual σ', distanciado del primero en $D/2$, en la mitad inferior de la rendija y la diferencia de marcha de los rayos, salientes de estos elementos, será igual a $\lambda/2$. Como resultado de la interferencia estos rayos se extinguen entre sí. Como vemos en la fig. 8.2, el ángulo de difracción que a ellos corresponde

$$\varphi_1 = \Delta/D = \lambda/D. \qquad (2)$$

Los rayos difractados bajo los ángulos desde 0 hasta φ_1 convergen en el plano focal entre los puntos A y B y se extinguen entre sí sólo parcialmente. Si tomamos en consideración la interferencia de los rayos difractados bajo ángulos mayores que φ_1, los cálculos muestran que la distribución de la intensidad de la luz en la pantalla tiene la forma mostrada en la fig. 8.3. La iluminación de la pantalla en el primer máximo lateral es menor que el 5% de la iluminación en el máximo principal. Esto quiere decir que casi todo el flujo luminoso, que ha pasado por la rendija, se propaga en el intervalo de ángulos desde $-\varphi_1$ hasta φ_1. La imagen de la fuente puntual, alejada al infinito, en el plano focal de la lente resulta difuminada, formando una banda perpendicular a los bordes de la rendija. La anchura de esta banda

$$b = 2F\varphi_1 = 2\frac{\lambda}{D}F. \qquad (3)$$

El examen de la difracción en un agujero redondo de diámetro D muestra que la imagen de una fuente puntual, alejada al infinito,

se difumina formando una mancha redonda, cuyo diámetro se determina con la misma fórmula (3) con un coeficiente numérico adicional próximo a la unidad. Así pues, en la cámara fotográfica la imagen de una fuente puntual, alejada al infinito, es un círculo de difracción cuyo diámetro b, de acuerdo con la fórmula (3), es tanto mayor cuanto menor es el orificio en el diafragma del objetivo. Los objetivos de gran diámetro (a condición de que se han eliminado las aberraciones) proporcionan imágenes de mayor calidad.

El diámetro de la mancha de difracción, dado con la fórmula (3), es para el objetivo ofrecido la imagen mínima posible en principio

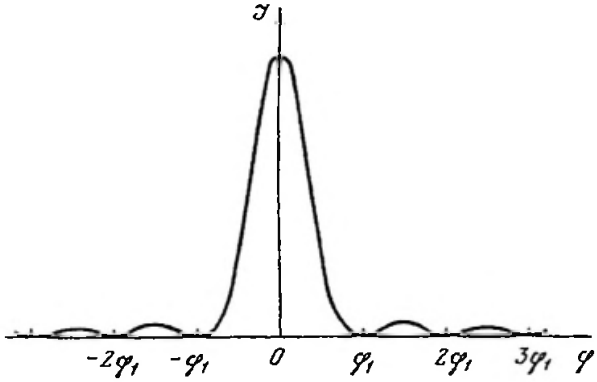


Fig. 8.3. Distribución de la iluminación en la pantalla durante la difracción de una onda plana en la rendija

de la fuente puntual. Por esta razón, es inútil tender a que la placa coincida con el plano focal del objetivo con tan alta precisión que el diámetro de la mancha a, con la aproximación de la óptica geométrica, que proporciona la fórmula (1), sea menor que la dimensión de la mancha de difracción b. Igualando los segundos miembros en las fórmulas (1) y (3), hallamos el error tolerable de instalación de la placa fotográfica

$$\Delta x = 2\lambda\,(F/D)^2. \qquad (4)$$

P. ej., para una cámara fotográfica con abertura relativa D/F igual 1:3,5, el valor característico Δx es de un orden de 10^{-5} m. Con mayor error no se empleará plenamente el poder resolutivo del objetivo.

Señalemos que la resolución de este problema permite analizar con facilidad la cuestión de la profundidad de foco. Como debido a los efectos de difracción el tamaño de la imagen de un punto lejano no depende de la posición de la placa dentro de los límites del segmento Δx, dado con la fórmula (4), en la fotografía se obtendrán con igual nitidez no sólo los objetos distanciados, sino también aquellos

objetos hasta los que la distancia d satisface la relación

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{F+\Delta x}=\frac{1}{F}. \qquad (5)$$

Teniendo en cuenta que $\Delta x \ll F$, de aquí es fácil de obtener

$$d = F^2/\Delta x. \qquad (6)$$

Poniendo Δx de la fórmula (4), hallamos aquella distancia d, comenzando de la cual y hasta el infinito todos los objetos saldrán en la foto nítidos, si la placa se halla en el plano focal del objetivo:

$$d = D^2/2\lambda. \qquad (7)$$

Ahora, consideremos lo que sucederá si ubicamos la placa no en el plano focal, sino alejada a la distancia Δx de dicho plano (fig. 8.1). Es evidente que entonces en la placa, con la aproximación de la óptica geométrica, serán idealmente nítidas las imágenes de aquellos objetos que se hallan a la distancia d del objetivo. Las imágenes de los puntos alejados infinitamente y de aquellos que se hallan a la distancia $d/2$ serán círculos de diámetro a. Por ello, en la foto obtendremos imágenes igualmente nítidas de todos los objetos situados desde la infinidad hasta distancias dos veces menores que d.

De la fórmula (7) se deduce que la profundidad de foco depende de hasta qué punto se ha diafragmado el objetivo de la cámara fotográfica. Mientras menor sea el diámetro D del orificio del diafragma, tanto mayor será la profundidad de foco. Pero al aumentar ésta, la diafragmación conduce al empeoramiento de la nitidez de las imágenes de aquellos objetos hacia los que está enfocado el objetivo: de la fórmula (3) vemos que con ello aumenta la dimensión de la mancha de difracción b. ▲

9. Faroles a distinta distancia. Los faroles callejeros encendidos, en forma de esferas opalinas, parecen tener igual luminancia desde distancias de 20 y 40 m. ¿Cómo explicar este fenómeno?

△ ¿Qué significa que en ambos casos los faroles parecen poseer igual luminancia? Ante todo, es necesario aclarar qué es lo que determina la sensación subjetiva de la luminosidad. Es evidente, que las sensaciones visuales dependen del tamaño de la imagen en la retina del ojo y de la iluminación de dicha imagen. Pero la sensación de luminosidad de la superficie no depende de las dimensiones de la imagen de ella en la retina. Lo más sencillo es cerciorarse de esto en un experimento, cerrando parte de la superficie luminosa del farol. La sensación de luminosidad de la parte no cubierta del farol, con ello, no varía.

Así pues, la sensación subjetiva de la luminosidad no depende de las dimensiones de la imagen del farol, creada por el cristalino en la retina del ojo, sino que sólo se determina por la iluminación. Pro-

bemos aclarar por qué la iluminación de la imagen de iguales faroles, ubicados a diferentes distancias, será la misma.

A grandes distancias de un orden de 20—40 m, un farol de 20—30 cm de radio, al calcular la iluminación creada por él en la superficie del cristalino (o bien el flujo luminoso que incide en el ojo), puede ser considerado como una fuente puntual de luz, a pesar de que su imagen en la retina del ojo tiene dimensiones finitas. Por ello la iluminación de la superficie creada por tal farol decrece inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Por consiguiente, del farol que se encuentra a una distancia de 40 m el flujo luminoso que incide sobre la superficie de la pupila es cuatro veces menor que el del farol a la distancia de 20 m. El tamaño lineal de la imagen del farol en la retina siendo la distancia de 40 m es dos veces menor, en tanto que el área de su imagen, cuatro veces menor que con la distancia de 20 m. De este modo, la disminución del flujo luminoso del farol que va a parar al ojo es proporcional a la disminución del sector de la retina del ojo, sobre la que dicho flujo incide y la iluminación de la imagen no depende de la distancia hasta el farol. Claro está, que esto sólo es cierto al no haber absorción o dispersión de la luz; en caso contrario, p. ej., al aparecer humo o niebla, la iluminación creada por el farol en la pupila decrece con mayor rapidez que el área de la imagen en la retina. Con ello, a mayor distancia el farol parece más opaco.

Ahora, reflexionemos qué variará si miramos el farol con un prismático. Podemos figurarnos que la iluminación de la imagen del farol extendido, al observarlo con el prismático, no puede ser mayor que al observarlo a simple vista. En efecto, el prismático se construye de modo que, junto con el ojo del observador él forma un sistema óptico único, en el que todo el flujo luminoso incidente en el objetivo pasa al ojo. Con ello, el área de la imagen en la retina del ojo aumenta tantas veces, como crece el flujo luminoso que incide en el ojo. Como resultado, despreciando las pérdidas de luz en el sistema óptico del prismático, la iluminación de la imagen en la retina queda invariable y el farol parecerá, en el mejor de los casos, tan brillante como al observarlo sin el prismático.

Otra cosa será en absoluto si observamos con el prismático o un telescopio una estrella. Éstas están tan alejadas de nosotros que, a pesar de sus gigantescos tamaños, las dimensiones angulares de casi todas las estrellas son muy pequeñas. Por ello, la imagen de la estrella en la retina del ojo, incluso al observarla por el más grande de los telescopios, no se distingue de la imagen de una fuente luminosa de verdad puntual. Con otras palabras, esta imagen es un círculo de difracción. Su tamaño no depende de si se observa la estrella por un telescopio con el ocular elegido correctamente o bien a simple vista, directamente. Pero el flujo luminoso de la estrella y, por consiguiente, la iluminación de su imagen al emplear el telescopio es tan-

tas veces mayor que a simple vista, cuantas veces es mayor el área del orificio del objetivo que el área de la pupila. Por ello, en el telescopio las estrellas nos parecen más brillantes. Con el telescopio se pueden ver estrellas muy débiles que, en general, son invisibles a simple vista.

Además, con el telescopio es posible ver las estrellas incluso durante el día. Esto se explica debido a que la estrella en el telescopio parece más brillante, mientras que el fondo sigue siendo el mismo, ya que cualquier sector del cielo es, de por sí, una fuente de luz extendida. ▲

10. La perspectiva en la fotografía. ¿Cómo hay que observar una foto para obtener una impresión tridimensional (de relieve) correcta con perspectiva no distorsionada?

△ La presencia en la cámara fotográfica de determinada profundidad de foco permite en una foto plana obtener una imagen clara de

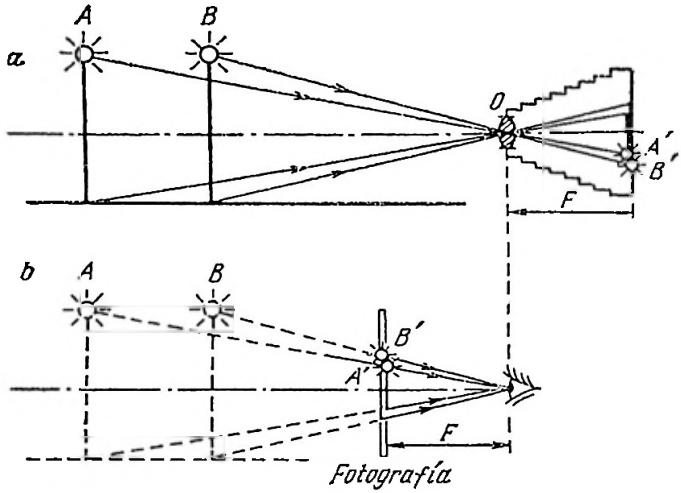


Fig. 10.1. Obtención de una perspectiva correcta al observar una fotografía

los objetos situados a distintas distancias del objetivo. Las imágenes planas de objetos tridimensionales extendidos siempre transmiten una perspectiva geométrica determinada, es decir, una bien definida relación entre la dimensión y disposición de los objetos situados a distintas distancias de la cámara fotográfica.

Al formarse la imagen plana en la placa fotográfica, el objetivo realiza la proyección central de los objetos (fig. 10.1*a*). El centro de semejante proyección *O* se encuentra en el punto medio del objetivo, ya que los rayos que pasan por el centro de la lente no se desvían. Como resultado, la imagen del objeto *A* más alejado tendrá en la

foto menor tamaño que la imagen del objeto B de ese mismo tamaño, pero más cercano.

Por regla, al fotografiar la placa se halla casi en el plano focal del objetivo. Para obtener una representación tridimensional correcta, al observar la foto, es preciso que las dimensiones angulares de las imágenes de objetos vistos por el ojo sean las mismas que al observar directamente dichos objetos. Si miramos la foto poniendo, exactamente, el ojo en el mismo punto donde se encontraba el objetivo, la mencionada condición se cumplirá: como queda claro de la fig. 10.1*b*, veremos los objetos en la imagen bajo los mismos ángulos que durante su observación directa desde el mismo punto donde se hallaba el objetivo de la cámara al tomar la fotografía.

Así pues, debemos mirar la foto con un solo ojo situándolo a la distancia igual a la focal del objetivo. Entonces la fotografía producirá una impresión natural de relieve. Para distancias focales de 25 cm y mayores ello se realiza con facilidad. En las cámaras fotográficas de pequeño formato, que son las más difundidas, la distancia focal es mucho menor y, por regla, constituye unos 5 cm. En este caso, al mirar diapositivas debe emplearse una lupa (diascopio), entonces aquí se conservará, asimismo, la distancia correcta entre el ojo y la imagen. Al observar fotos, ampliadas n veces en comparación con el negativo, con el fin de conservar la perspectiva natural, la distancia entre el ojo y la foto debe ser n veces mayor que la distancia focal del objetivo. En caso de un gran auditorio, p. ej., en una sala de cine, esta condición se verifica sólo para un pequeño número de puestos.

Cuando una foto se mira con un solo ojo, desde una distancia incorrecta, la foto ofrece la impresión tridimensional, pero con perspectiva distorsionada. Siendo la distancia demasiado cercana, la profundidad de la foto nos parecerá disminuida, mientras que siendo demasiado grande, aumentada. Esta distorsión de la perspectiva se aclara en la fig. 10.2. En los tres casos, desde diferentes distancias, se observa una misma fotografía por eso la posición de cualesquiera puntos de la imagen, p. ej., de los puntos A' y B', que corresponden a los vértices de los faroles, es la misma. La fig. 10.2*a* corresponde a la posición correcta del ojo y, por lo tanto, a la perspectiva no distorsionada. Al mirar la foto de una distancia menor (fig. 10.2*b*) la distancia entre los faroles nos parecerá disminuida. Al mirar de mayor distancia (fig. 10.2*c*) la figura parecerá alargada a la profundidad.

La distorsión de la perspectiva longitudinal se advierte muy bien al llevar a cabo la observación con ayuda de un anteojo o bien prismático. Aunque con el prismático vemos la imagen volumétrica, en la profundidad todos los objetos y distancias nos parecen acortadas. El objetivo del anteojo crea en el plano focal la imagen real, la que, a continuación, se observa con el ojo por el ocular. Con ello, el ocular actúa como una lupa que permite aproximar el ojo a la imagen

y, debido a esto, aumentar el ángulo de visión. Como vemos en la fig. 10.2*b*, el aumento de este ángulo conduce a la disminución aparente de la profundidad. Sólo podemos ver por el anteojo la perspectiva no distorsionada cuando éste no varía el ángulo de visión.

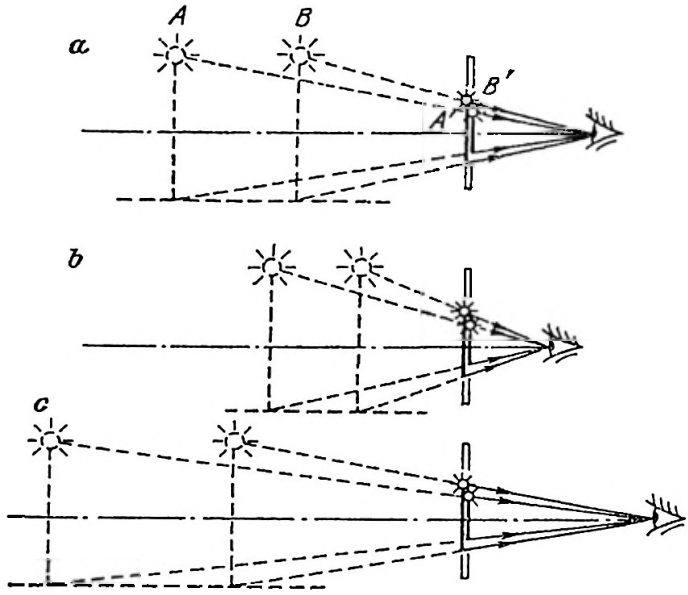


Fig. 10.2. Distorsión de la perspectiva al ser incorrecta la posición de los ojos

Pero esto corresponde a la ampliación igual a la unidad. Si el anteojo proporciona ampliación, la distorsión de la perspectiva es inevitable.

Aún mayor impresión produce el experimento inverso. Si miramos con ayuda del prismático o el anteojo, dirigiendo al objeto el ocular y no el objetivo, la extensión del objeto en profundidad nos parecerá aumentada de modo curioso. ▲

11. Posición del diafragma y la perspectiva. Por regla, en las cámaras fotográficas el diafragma se ubica entre las lentes del objetivo. ¿Qué cambiará en las fotos si el diafragma se coloca a diferentes distancias en el intervalo entre el objetivo y la placa fotográfica? Consideren el caso de la macrofotografía, cuando las imágenes de los objetos se obtienen casi de tamaño natural.

△ Ante todo, prestemos atención a que para obtener la imagen de tamaño natural la cámara fotográfica debe dar la posibilidad de hacer la distancia entre el objetivo y la placa fotográfica igual a la distancia focal doble F. Entonces, poniendo los objetos ante la cá-

mara a distancias de un orden de $2F$, obtendremos en la placa su imagen nítida. Con esto, como vimos en el problema 8, la profundidad de foco será tanto mayor cuanto menor sea el diámetro del agujero en el diafragma. Llegamos a esta conclusión al considerar que a la imagen del punto corresponde el lugar del máximo estrechamiento del haz luminoso, con la particularidad de que dicho estrechamiento queda determinado por los efectos de difracción.

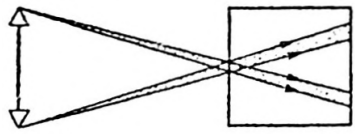


Fig. 11.1. Haces de rayos que forman la imagen en la cámara oscura

Semejante representación acerca de la formación de las imágenes es universalmente admitida. Pero no siempre las imágenes bien percibidas por nuestro ojo, son idénticas a las imágenes muy nítidas. Recordemos, aunque solo sea, que con frecuencia se percibe con perfecta claridad un cuadro pintado por el pintor a grandes y rudas pinceladas. Esto mismo también se refiere a la obtención de imágenes en ciertos dispositivos ópticos, p. ej., en la cámara oscura (fig. 11.1). En ella la imagen de un punto luminoso es una mancha formada por un haz que, aunque estrecho, es divergente. Así pues, la calidad de la imagen de una figura tridimensional en una foto plana se determina no sólo con la profundidad de foco, condicionada por los fenómenos de difracción, sino también por la peculiaridad psicológica de nuestra vista. Por ello, más adelante vamos a considerar que, con una diafragmación suficientemente grande, se obtienen buenas imágenes de objetos situados a diferentes distancias, incluso en el caso cuando la placa fotográfica no coincide con la posición de su imagen confeccionada según las leyes de la geometría óptica (fig. 11.2*a*).

Ahora, podemos comprender cómo influirá sobre el carácter de las fotos obtenidas la posición del diafragma con pequeño agujero, que separa los haces estrechos necesarios para formar imágenes nítidas. En el caso cuando el diafragma está situado cerca del objetivo (p. ej., entre sus lentes), todos los haces estrechos de luz que forman la imagen plana se cortan en el objetivo (fig. 11.2*a*). De resultas, la imagen de los objetos B cercanos al objetivo será más grande que la imagen de esos mismos objetos A, pero situados más lejos. La fotografía ofrecerá una impresión tridimensional correcta con perspectiva no deformada, es decir, los objetos en la foto se verán bajo los mismos ángulos que durante la observación directa desde el lugar donde se realiza la fotografía. Claro está, que esto ocurrirá sólo cuando miramos la foto de modo correcto, o sea, como se mostró en el problema anterior, con un ojo solo desde una distancia igual a la existente desde el objetivo hasta la placa al tomar la fotografía.

Supongamos ahora que el diafragma se encuentra cerca del foco del objetivo (fig. 11.2*b*). Por el foco sólo pasan aquellos rayos que antes del objetivo se desplazaban paralelamente al eje óptico prin-

cipal. Por esto, en la formación de la imagen sólo tomarán parte los haces estrechos, cortados por el diafragma, cuyos ejes antes del objetivo son paralelos al eje óptico principal. De la fig. 11.2*b* se desprende que, en tal caso, las imágenes de los objetos iguales *A* y *B*, situa-

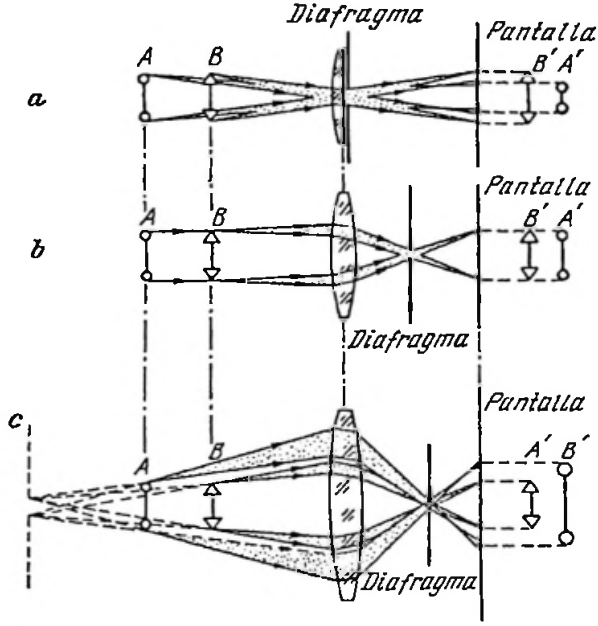


Fig. 11.2. En la fotografía la perspectiva se determina por la posición del diafragma que limita los haces luminosos: *a*, perspectiva no deformada; *b*, en la foto la perspectiva desaparece cuando el diafragma se encuentra en el foco; *c*, perspectiva invertida cuando el diafragma está alejado del objetivo a una distancia mayor que la focal

dos a distintas distancias, tendrán las mismas dimensiones. En la foto desaparece la perspectiva y parece que todos los objetos se encuentran a igual distancia.

Aún más extraordinario es el caso cuando el diafragma se coloca tras el foco, más cerca de la placa fotográfica (fig. 11.2*c*). Ahora, como vemos con claridad en la figura, por el agujero en el diafragma sólo pasan aquellos rayos que antes de la lente podían considerarse como salientes de la imagen real del agujero del diafragma, creado por el objetivo. Observando en la figura los haces estrechos salientes de los objetos *A* y *B*, cortados por el diafragma, es posible cerciorarse de que el tamaño de la imagen del objeto *A* alejado será mayor que el del objeto *B* cercano. La perspectiva en la foto estará invertida, es decir, ¡los objetos más alejados parecerá que están más cerca!

Así pues, la posición del diafragma que limita los haces luminosos influye sobre la perspectiva de la imagen obtenida en la foto. A medida que el diafragma se desplaza, desde el objetivo hacia la placa fotográfica, la profundidad de la perspectiva decrece paulatinamente, desapareciendo por completo al coincidir el agujero del diafragma con el foco. Seguidamente, la perspectiva aparece de nuevo, pero ya invertida.

Para excluir equívocos, remarquemos que las deducciones hechas más arriba, acerca del carácter del la perspectiva en la foto, sólo son ciertas con la presencia de un diafragma con pequeño agujero. Si aumentamos el diámetro del agujero, los haces se ensancharán y en el plano de la placa fotográfica no obtendremos la imagen nítida de objetos ubicados a diferentes distancias. En lo que se refiere a las imágenes de objetos, construidas según las leyes de la óptica geométrica (es decir, como los puntos de intersección de los correspondientes rayos), su posición y dimensiones no dependen, como es lógico, ni del diámetro del agujero en el diafragma, ni de su disposición.

De la fig. 11.2*c* se desprende que gracias al diafragma en la formación de la imagen de cualquier punto del objeto, sólo participa una pequeña parte de la superficie de la lente. Con el fin de que en la placa fotográfica se obtengan las imágenes de los puntos extremos del objeto, es preciso que los haces luminosos que a ellos corresponden pasen por la lente. En la figura vemos que, para ello, el tamaño de la lente ha de ser mayor que el del objeto. ▲

12. Exposición al fotografiar. Para obtener reproducciones de un gran lienzo, primero éste se fotografía por entero, es decir, su plano general y, a continuación, en las mismas condiciones y con la misma cámara se fotografían detalles por separado de tamaño natural. ¿Cómo hay que cambiar la exposición al variar la escala?

△ Al fotografiar, para la reproducción correcta de los semitonos, cada género de película fotográfica requiere una determinada exposición. Con otras palabras, en cada cuadro (fotograma) de la película debe incidir, por término medio, una misma cantidad de energía luminosa. Por esto, el producto de la iluminación de la imagen en la película por el tiempo de exposición debe quedar invariable.

Partiendo de esta condición, es fácil hallar cómo hay que cambiar la exposición al variar la escala. Elijamos cierto elemento ΔS del lienzo que fotografiamos, tan pequeño que al hallar el flujo luminoso $\Delta\Phi$ que de él sale, dicho elemento se puede considerar como una fuente puntual de luz. Entonces, el flujo de energía luminosa de semejante elemento incidente sobre el agujero del objetivo de la cámara, abierto por el difragma, es proporcional al área del elemento ΔS y el ángulo sólido Ω, por el cual se propaga (fig. 12.1). El ángulo sólido Ω se mide con la relación entre el área del agujero en el objetivo σ y el cuadrado de la distancia desde el objetivo hasta el lienzo que foto-

grafiamos d. Por esto,

$$\Delta\Phi \sim \Omega\,\Delta S = \frac{\sigma}{d^2}\,\Delta S. \qquad (1)$$

Determinada parte de este flujo luminoso incide sobre el área $\Delta S'$ de la película fotográfica, ocupada por la imagen del elemento del lienzo ΔS. La parte restante (por regla, pequeña) de este flujo se

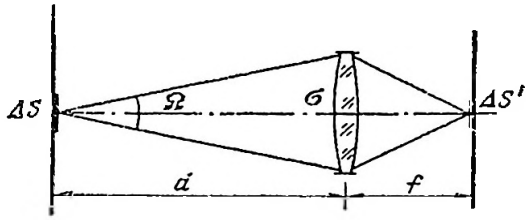


Fig. 12.1. El flujo luminoso del elemento ΔS que incide sobre el área $\Delta S'$ se propaga por el ángulo sólido $\Omega = \sigma/d^2$

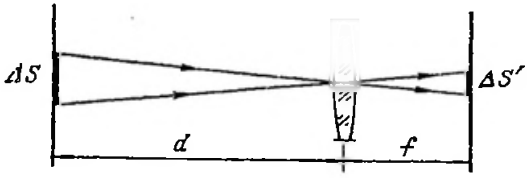


Fig. 12.2. La razón de las áreas ΔS y $\Delta S'$ es igual al cuadrado de las distancias d y f

pierde debido a la reflexión y absorción de la luz en los vidrios del objetivo. Como la iluminación E de la imagen es igual a la razón entre el flujo luminoso y el área sobre la que él incide, resulta que

$$E \sim \frac{\Delta\Phi}{\Delta S'} \sim \frac{\sigma}{d^2}\,\frac{\Delta S}{\Delta S'}. \qquad (2)$$

La razón entre el área del objeto ΔS y el área de su imagen $\Delta S'$ es igual al cuadrado de la razón entre la distancia d desde el objeto hasta el objetivo de la cámara fotográfica y la distancia f desde el objetivo hasta la imagen (fig. 12.2):

$$\Delta S/\Delta S' = d^2/f^2. \qquad (3)$$

Poniendo esta relación en (2) nos cercioramos de que la iluminación de la imagen en la película es proporcional al área del agujero del objetivo σ e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde el objetivo hasta la película fotográfica:

$$E \sim \sigma/f^2. \qquad (4)$$

Al fotografiar el plano general del lienzo la distancia f es, prácticamente, igual a la distancia focal del objetivo F. Cuando fotografiamos los detalles del lienzo de tamaño natural, la película debe hallarse a la distancia focal doble del objetivo: $f = 2F$. De resultas, como se deduce de (4), la iluminación de la imagen en la película disminuirá cuatro veces si, claro está, al pasar a fotografiar los detalles la iluminación del lienzo y el área del agujero del diafragma del objetivo σ quedan invariables. Esto significa que debemos aumentar la exposición cuatro veces. Si queremos que la exposición sea la misma, es obvio que es preciso aumentar cuatro veces el área del agujero σ, es decir, aumentar el doble la abertura relativa del objetivo. ▲

13. Interferencia de la luz procedente de una fuente extendida. Una placa de vidrio de caras planas y paralelas de grosor d y con índice de refracción n se ilumina con la luz monocromática de longitud de onda λ, mediante una fuente extendida. Detrás de la placa se encuentra una lente con distancia focal F (fig. 13.1). ¿Qué forma tendrá la figura de interferencia que se observará en la pantalla si colocamos a ésta en el plano focal de la lente?

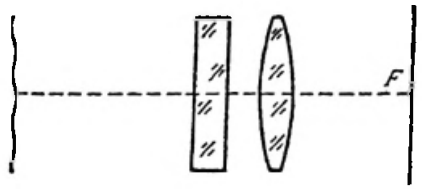


Fig. 13.1. Esquema para observar la interferencia de la luz de una fuente luminosa extendida

△ Dividamos mentalmente la fuente extendida de luz en pequeños elementos aislados, cada uno de los cuales puede considerarse como una fuente puntual. Todas estas fuentes emiten luz de una misma longitud de onda λ, pero independientemente unas de otras. Por esto, ellas no son coherentes entre sí.

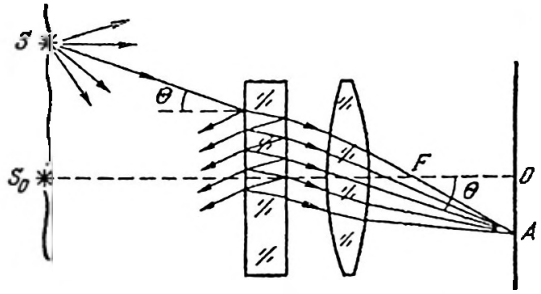


Fig. 13.2. La interferencia de la luz en el punto A está condicionada por el rayo que sale de la fuente puntual S bajo el ángulo θ

Cada fuente elemental de luz S irradia una onda esférica, es decir, emite rayos de luz en todas direcciones (fig. 13.2). Después de pasar por la placa y la lente estos rayos inciden sobre diversos pun-

tos de la pantalla. Consideremos uno de tales rayos que constituye el ángulo θ con el eje óptico principal de la lente. Como resultado de múltiples reflexiones en las caras de la placa este rayo se divide, como se muestra en la fig. 13.2, en una secuencia de rayos paralelos entre sí. Las amplitudes de las ondas, correspondientes a estos rayos, decrecen con rapidez. Todos los rayos mencionados, después de pasar por la lente, se concentran en un mismo punto A del plano focal.

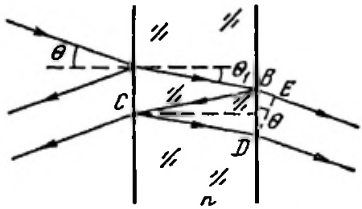


Fig. 13.3. Para el cálculo de la diferencia de marcha de los rayos interferentes

Este punto A se encuentra a la distancia x del foco principal de la lente O que, como se ve fácilmente en la fig. 13.2, se da con la expresión

$$x = F \operatorname{tg} \theta. \tag{1}$$

Como todos estos rayos surgieron de un mismo rayo, ellos son coherentes entre sí y, al llegar al punto A, interfieren. En función de la diferencia de marcha entre los rayos, en el punto A se observará bien amplificación, o bien la debilitación de la iluminación. Como las condiciones de amplificación o debilitación de las oscilaciones son iguales para todos los pares de rayos vecinos, con el fin de determinar la posición de los máximos y mínimos de la figura de interferencia es suficiente considerar dos rayos vecinos.

Con ayuda de la fig. 13.3 es fácil cerciorarse de que la diferencia de marcha puede ser calculada del modo siguiente:

$$\Delta = (BC + CD)\, n - BE = \frac{2nd}{\cos \theta_1} - 2d \operatorname{tg} \theta_1 \operatorname{sen} \theta. \tag{2}$$

Empleando la ley de refracción de la luz en el límite aire—vidrio

$$\operatorname{sen} \theta = n \operatorname{sen} \theta_1, \tag{3}$$

expresamos la diferencia de marcha Δ en la fórmula (2) con el ángulo θ_1:

$$\Delta = 2nd \left(\frac{1}{\cos_1 \theta} - \operatorname{tg} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_1 \right) = 2nd \cos \theta_1. \tag{4}$$

De la expresión (4) se desprende que para la placa de caras planas y paralelas la diferencia de marcha Δ depende sólo del ángulo θ_1, o bien, en virtud de la relación((3), sólo del ángulo θ, formado por el rayo con el eje óptico principal. Remarquemos, que esta diferencia de marcha no depende de la posición de la fuente puntual S.

En aquellos puntos de la pantalla, donde la diferencia de marcha Δ es igual a un número entero de longitudes de onda, se observará el máximo de iluminación, mientras que donde a un número semientero, el mínimo. Como Δ sólo depende del ángulo θ, estos máximos y mí-

nimos se situarán en circunferencias concéntricas, cuyo centro yace en el punto O.

¿Qué se observará en la pantalla en el plano focal de la lente de la luz que llega de una de las fuentes elementales S? En ausencia de la placa de vidrio todos los rayos de S que pasan por la lente, en correspondencia con las leyes de la óptica geométrica, crean la imagen

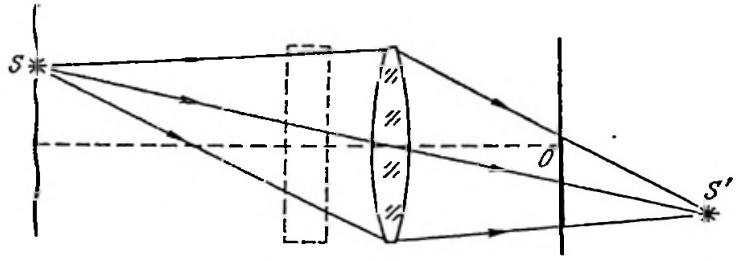


Fig. 13.4. En ausencia de la placa plana y paralela la fuente puntual S proporciona una mancha clara en el plano focal de la lente

de la fuente S en algún punto S' (fig. 13.4). En la pantalla, en el plano focal de la lente, habrá, con ello, una mancha iluminada cuyo tamaño está limitado por los rayos extremos que pasan por la lente. En presencia de la placa esta mancha estará cortada por bandas claras y oscuras de interferencia las que, como ya hemos aclarado, son

Fig. 13.5. En presencia de la placa plana y paralela la mancha clara en la pantalla está cortada por bandas de interferencia

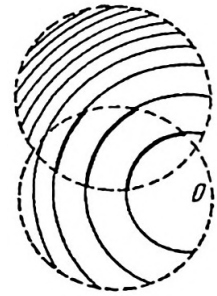


Fig. 13.6. Superposición de las figuras de interferencia de dos fuentes puntuales

circuferencias con centro en O (fig. 13.5). Los radios de los anillos claros, correspondientes a la condición $\Delta = k\lambda$, se calculan con facilidad mediante las fórmulas (4) y (1). Estos radios no dependen de la posición de la fuente elemental puntiforme S.

Ahora, es fácil aclarar qué aspecto tendrá la figura completa de interferencia, creada por toda la fuente extendida S. Ella se obtiene de resultas de la superposición de las figuras de interferencia de las

fuentes elementales aisladas. Las manchas de fuentes aisladas se sitúan en diferentes lugares de la pantalla, sobreponiéndose, parcialmente, unas sobre otras (fig. 13.6). Es de importancia que, como ya se ha mostrado, los anillos de interferencia en dichas manchas tienen el centro común O e iguales radios. Por ello, durante la superposición se forma un sistema común de anillos de interferencia. Como resultado, la figura total de interferencia es un conjunto de circunferencias claras y oscuras que se alternan, cuyo centro se encuentra en el eje óptico principal de la lente.

De la solución aducida está claro que las figuras de interferencia en el plano focal de la lente, provocadas por una fuente monocromática de luz extendida y por la fuente puntual S_0, situada en el eje óptico principal (fig. 13.2), en principio, no se diferencian entre sí. La diferencia sólo consiste en que la fuente extendida proporciona más luz que el elemento aislado S_0 y que su figura de interferencia ocupa mayor área en la pantalla.

En conclusión, señalemos que una figura análoga de interferencia se puede observar, asimismo, en la luz reflejada de la placa de caras planas y paralelas. ▲

X. FÍSICA RELATIVISTA Y CUÁNTICA

La mecánica de la teoría de la relatividad describe el movimiento de los cuerpos en aquellos casos cuando su velocidad es comparable con la de la luz. En la mecánica relativista la masa depende de la velocidad:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{1}$$

Aquí, m_0 es la masa en reposo, es decir, la masa en el sistema de referencia donde el cuerpo está inmóvil. Precisamente esta magnitud se entiende por masa en la mecánica no relativista.

El impulso (cantidad de movimiento) p de una partícula está ligado con su velocidad v mediante la relación

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{2}$$

Una de las más admirables conclusiones de la teoría de la relatidad es la ley de la equivalencia de la masa y la energía, expresada con la famosa fórmula de Einstein

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{3}$$

De acuerdo con esta ley, cualquier variación de la energía del sistema se acompaña de la variación proporcional de la masa. P. ej., una partícula acelerada tiene mayor masa que la inmóvil, un cuerpo caliente, mayor masa que el frío, un muelle comprimido, mayor masa que el no comprimido. De la fórmula (3) se desprende que en la mecánica relativista el cuerpo en reposo posee la energía $E_0 = m_0 c^2$, llamada energía en reposo.

De las expresiones (2) y (3) se desprende la fórmula que liga entre sí la energía y el impulso del sistema relativista:

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4. \tag{4}$$

Prestemos atención a que en el segundo miembro de (4) se encuentra una magnitud que no depende de la elección del sistema de referencia. Por ello, aunque cada uno de los sumandos en el primer miembro tiene diverso valor en distintos sistemas inerciales de referencia, todo el primer miembro no depende de la elección del sistema de referencia, es decir, es un invariante relativista. Para las partículas ultrarrelativistas, es decir, para aquellas en las que la energía E es mucho mayor que la energía en reposo $m_0 c^2$, la relación (4) se puede anotar aproximadamente en la forma $E = pc$.

Si al describir los fenómenos relativistas en las leyes de física apareco la constante universal $c = 2{,}998 \cdot 10^{10}$ cm/s*), que es la velocidad máxima de

*) En este capítulo se emplea el sistema de unidades CGSE.

propagación de las interacciones, es decir, la velocidad de la luz en el vacío, al describir los fenómenos del micromundo aparece otra constante fundamental h, la llamada constante de Planck. Su valor es igual a $6{,}62 \cdot 10^{27}$ erg·s.

Las propiedades corpusculares de la luz, observadas en los experimentos, conducen a la representación de que la radiación electromagnética se puede considerar como un flujo de fotones. De acuerdo con la teoría cuántica, la energía del fotón es proporcional a la frecuencia de la correspondiente radiación y se da con la fórmula de Planck

$$E = h\nu. \tag{5}$$

Como en estado de reposo el fotón no existe, su masa en reposo m_0 es nula, en tanto que el impulso, en virtud de las relaciones (4) y (5), se expresa con la fórmula

$$p = h\nu/c. \tag{6}$$

Las relaciones de indeterminación de Heisenberg, ley fundamental de física del micromundo, relacionan entre sí la incertidumbre en los valores de cierta coordenada x de la partícula y la correspondiente proyección del impulso p_x en un mismo momento de tiempo:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geqslant h. \tag{7}$$

La imposibilidad de adjudicar, simultáneamente, a una micropartícula los valores exactos de la coordenada y de la correspondiente proyección del impulso está ligada con la manifestación de la doble naturaleza corpuscular-ondulatoria de los microobjetos. Las propiedades ondulatorias de éstos se caracterizan por la llamada longitud de onda de De Broigle λ que es inversamente proporcional al impulso de la partícula:

$$\lambda = h/p. \tag{8}$$

El dualismo corpuscular-ondulatorio consiste en que cualquier partícula: fotón, electrón, protón, átomo, etc., posee la posibilidad potencial de manifestar tanto propiedades corpusculares, como ondulatorias, mas en fenómeno alguno jamás se manifiestan de modo simultáneo.

1. Principio de relatividad. Una bolita de masa m suspendida de un hilo de largura l está inmóvil en el campo homogéneo de gravedad de intensidad g. En cierto momento de tiempo el punto de suspensión comienza a moverse en sentido horizontal a velocidad constante v (fig. 1.1). ¿Cómo se moverá la bolita en tal caso?

△ El planteamiento de este problema es muy sencillo, pero, a primera vista, no se comprende en absoluto como abordarlo. Por un lado, es obvio que el movimiento de este sistema mecánico se supedita a las leyes de la mecánica clásica de Newton. Por otro, no está claro cómo dichas leyes pueden aplicarse aquí.

Como sugerencia hacia el hallazgo de las vías para resolver este problema, puede servir la circunstancia de que ella se ha introducido en el capítulo «Física relativista y cuántica». El hecho de que la física cuántica nada tiene que ver con el problema no provoca dudas, por eso nos queda por aclarar qué relación puede tener éste con la teoría de la relatividad, aunque en el problema se considera un movimiento a velocidades que, a ciencia cierta, son no relativistas. Resulta que el problema tampoco está relacionado con la teoría de la relatividad. Pero el principio de relatividad, yacente en la base de

dicha teoría y, dicho sea, en su forma clásica, enunciada por el propio Galileo, tiene relación directa con este problema. Su aplicación permite de inmediato reducir este problema a otro bien conocido.

De acuerdo con el principio de relatividad de Galileo, las leyes que describen los fenómenos mecánicos son iguales en todos los sistemas inerciales de referencia. Para resolver este problema es idóneo pasar al sistema de referencia en el que el punto de suspensión esté inmóvil. Como en el sistema inicial de referencia (del laboratorio)

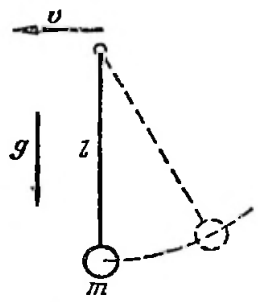


Fig. 1.1. En cierto momento el punto de suspensión se pone en movimiento a velocidad constante v

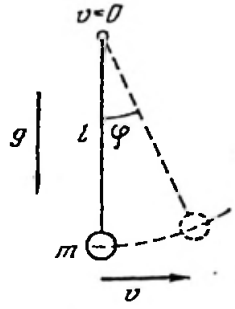


Fig. 1.2. En el sistema de referencia donde el punto de suspensión está inmóvil, en el momento inicial la bolita tiene la velocidad $-v$

el punto de suspensión se mueve a velocidad constante v, el nuevo sistema de referencia también es inercial. No obstante, en este sistema el movimiento de la bolita con el hilo es ya de forma bastante sencilla: el punto de suspensión del hilo está siempre inmóvil, mientras que a la propia bolita se le comunica en el momento inicial de tiempo la velocidad $-v$, dirigida por la horizontal a la derecha (fig. 1.2). Es obvio, asimismo, que en el nuevo sistema de referencia sobre la bola también actúa el campo de gravedad de intensidad g.

En el sistema de referencia, ligado con el punto de suspensión, el posterior movimiento de la bolita transcurrirá de modo diferente en función de su velocidad inicial. Siendo pequeña la velocidad inicial, el sistema se comportará como un péndulo simple que realiza pequeñas oscilaciones, casi armónicas, cerca de la posición de equilibrio vertical:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \operatorname{sen} \omega t. \qquad (1)$$

La frecuencia ω es igual a la frecuencia de las oscilaciones naturales del péndulo simple de longitud l: $\omega^2 = g/l$. La elección de la fase inicial de las oscilaciones en la ecuación (1) corresponde a que, para $t = 0$, el péndulo se encuentra en posición vertical y $\varphi = 0$. La amplitud de las oscilaciones φ_0 se halla también de las condiciones iniciales. Como de acuerdo con la fórmula (1) la velocidad angular del pén-

dulo $\dot{\varphi}$, es igual a

$$\dot{\varphi}(t) = \omega\varphi_0 \cos \omega t, \tag{2}$$

la velocidad lineal de la bola para $t = 0$ es igual a $\omega\varphi_0 l$. Igualándola a la velocidad inicial v, hallamos la amplitud angular φ_0:

$$\varphi_0 = v/\omega l. \tag{3}$$

Semejante movimiento oscilatorio armónico del péndulo sólo se produce siendo pequeña la amplitud $\varphi_0 \ll 1$, es decir, como se desprende de la fórmula (3), cuando

$$v \ll \omega l = \sqrt{gl}.$$

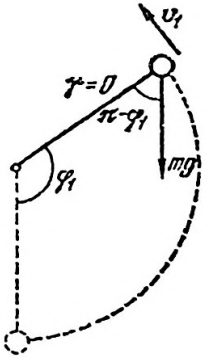


Fig. 1.3. Para hallar el punto donde la tensión del hilo T se anula

Si la velocidad inicial v no es muy pequeña, es decir, no satisface la desigualdad aducida, las oscilaciones del péndulo se producirán con mayor amplitud y ya no serán armónicas. Pero la amplitud de las oscilaciones no puede sobrepasar el valor $\varphi_0 = \pi/2$, lo que es evidente. Con semejante amplitud, en las posiciones extremas, la bolita ascenderá hasta el nivel del punto de suspensión. Como es fácil cerciorarse, aplicando la ley de la conservación de la energía, a esto corresponde el valor de la velocidad inicial $v = \sqrt{2gl}$. En tanto que si la velocidad inicial es mayor que este valor, la bolita ascenderá más arriba del punto de suspensión, pero, sin embargo, ella se moverá por una circunferencia sólo hasta que la fuerza de tensión del hilo se anule. A partir de este punto, el hilo flexible no influye sobre el movimiento de la bolita y ella se mueve libremente en el campo de gravedad por una parábola hasta que el hilo se extienda de nuevo a toda su longitud.

La posición angular del punto φ_1, en el que la fuerza de tensión del hilo se anula, resulta fácil de hallar con ayuda de la ley de la conservación de la energía y la proyección de la ecuación de la segunda ley de Newton sobre la dirección del hilo, suponiendo que en ella la fuerza de tensión del hilo T es igual a cero. De la fig. 1.3 se desprende que dichas ecuaciones se escriben de la siguiente forma:

$$\frac{mv^2}{2} = mgl(1 - \cos\varphi_1) + \frac{mv_1^2}{2}, \tag{4}$$

$$mg\cos(\pi - \varphi_1) = mv_1^2/l. \tag{5}$$

Poniendo v_1^2 de la ecuación (5) en la (4), hallamos

$$\cos\varphi_1 = \frac{1}{3}\left(2 - \frac{v^2}{gl}\right). \tag{6}$$

Como la bolita asciende a mayor altura que el punto de suspensión sólo cuando $v^2 > 2gl$, el valor de cos φ_1, dado con la fórmula (6), es negativo. De la fórmula (6) se deduce que cuanto mayor es la velocidad inicial de la bolita v, tanto más próximo a π es el ángulo φ_1. Por último, si $v^2 = 5gl$, cos $\varphi_1 = -1$ y la fuerza de tensión del hilo se anula, cuando la bolita, al moverse por la circunferencia, resulta estar exactamente sobre el punto de suspensión. Es obvio, que con semejante valor de la velocidad inicial y aún más con valores mayores que ésta, la bolita realizará revoluciones completas por la circunferencia, tensando continuamente el hilo.

El movimiento de la bola en el sistema inicial de referencia (del laboratorio), donde su punto de suspensión se pone en movimiento uniforme a velocidad v, se obtiene de resultas de la composición del movimiento descrito más arriba en el sistema auxiliar de referencia y del movimiento uniforme a velocidad v.

El ejemplo que hemos estudiado muestra con evidencia lo siguiente: a pesar de que las leyes de movimiento son iguales en todos los sistemas inerciales de referencia, al resolver un problema concreto, uno de ellos puede ser mucho más cómodo que los restantes. ▲

2. Excitación del átomo durante el choque. La energía mínima de excitación del átomo de hielo es igual a 21,12 eV. ¿Es posible la excitación de un átomo inmóvil de helio al chocar con un protón que posee la energía de 24 eV y con un electrón con esa energía?

△ Si la energía de la partícula que irrumpe es insuficiente para la excitación del átomo, su choque con éste es perfectamente elástico, ya que el estado interno del átomo no puede variar. Al excitar o ionizar un átomo como resultado del choque con una partícula en movimiento a su encuentro, el choque ya resulta no elástico, ya que parte de la energía cinética se transforma en la energía interna de excitación del átomo o se consume para realizar el trabajo de ionización, es decir, para separar el electrón del átomo. Debido a la ley de la conservación del impulso toda la energía cinética de la partícula incidente no puede dirigirse a la excitación o ionización del átomo.

¿Cuál es la parte máxima de la energía cinética inicial que puede ser utilizada para la excitación del átomo? Es fácil responder a esta pregunta si hacemos uso de las leyes de la conservación de la energía y el impulso para el proceso del choque de una partícula en movimiento con un átomo no excitado. La energía de excitación W es la variación de la energía interna del átomo al pasar del estado fundamental al de excitación. La energía de la partícula que irrumpe es su energía cinética $mv^2/2$, donde v es la velocidad de la partícula antes del choque.

Podría parecer a primera vista que para excitar un átomo el caso más ventajoso es aquel, en que como resultado de la colisión la partícula incidente se para, transmitiendo al átomo toda la energía. No

obstante, en realidad resulta que en tal caso, después del choque, la energía cinética del sistema no será la mínima. A la energía interna del átomo pasa la mayor parte de la energía cinética de la partícula si, después de la colisión, el átomo y la partícula que irrumpe se mueven a igual velocidad, a pesar de que esta última conserva cierta parte de su energía cinética.

Para cerciorarse de esto, con la mayor facilidad, consideremos el proceso de la excitación del átomo en el sistema de referencia en que está inmóvil el centro de masas del átomo y de la partícula incidente. Tal sistema de referencia también es inercial. De acuerdo con el principio de relatividad, las leyes que describen cualesquiera fenómenos físicos son iguales en todos los sistemas inerciales de referencia. Por ello, en el sistema introducido, lo mismo que en el inicial, también se verifican las leyes de la conservación de la energía y el impulso. El impulso total en este sistema de referencia es igual a cero, por lo que después del choque pueden detenerse ambos cuerpos, es decir, el átomo y la partícula. Si en realidad se paran ambos cuerpos, a la energía interna del átomo pasará toda la energía cinética inicial. Pero el átomo y la partícula, inmóviles en el sistema del centro de masas, tienen igual velocidad en el sistema de referencia inicial del laboratorio. Esto significa, que el incremento de la energía interna del átomo será el máximo cuando, después del choque, tanto el átomo como la partícula incidente tienen la misma velocidad. Semejante colisión recibe el nombre de choque perfectamente inelástico, aunque, después del choque, las partículas no se unen en un cuerpo único, sino que se mueven independientemente.

Escribamos las leyes de la conservación de la energía y el impulso, considerando este caso como el más favorable para la excitación del átomo. Designemos la masa del átomo con M y la velocidad de éste y de la partícula después del choque, con V. Entonces

$$mv = (M + m)\,V, \tag{1}$$

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{(m+M)\,V^2}{2} + W. \tag{2}$$

Empleamos aquí las fórmulas no relativistas, ya que para las energías que nos interesan de un orden de 20 eV, el electrón y no digamos ya el protón, se mueven a velocidad mucho menor que la de la luz.

Para la energía prefijada de excitación W las ecuaciones (1) y (2) determinan la velocidad mínima de la partícula incidente v y, por lo tanto, la energía mínima $mv^2/2$ con la que es posible la excitación del átomo. Expresando V de (1) y poniéndola en (2), hallamos

$$\frac{mv^2}{2} = \left(1 + \frac{m}{M}\right) W. \tag{3}$$

De esta relación se desprende que cuanto más ligera sea la partícula incidente, menor será su energía que resulta suficiente para excitar el átomo. P. ej., al excitar un átomo con un electrón que irrumpe ($m \ll M$), prácticamente, es suficiente que su energía sea igual a la de excitación W. Pero si el átomo de helio se excita con un protón que con él choca ($m \approx M/4$), como se deduce de la fórmula (3), la energía cinética del protón deberá ser 1,25 veces mayor que la de excitación. Por esto, un electrón con energía 24 eV puede excitar un átomo de helio (¡pero también dispersarse elásticamente, pues las leyes de la conservación y del impulso toleran, asimismo, semejante proceso!), mientras que un protón con semejante energía, sin falta, se dispersará elásticamente.

El ejemplo considerado permite comprender por qué, durante el surgimiento de una descarga de gas autónoma, los electrones desempeñan el papel predominante en la ionización por choques y no los iones pesados, aunque éstos se aceleran por el campo eléctrico. ▲

3. Transformaciones mutuas de los electrones y fotones. ¿Es posible la radiación y absorción de la luz por un electrón libre? ¿Puede el fotón libre, con suficiente energía, transformarse en un par electrón-positrón?

△ ¿Puede emitir luz un electrón libre? A primera vista parece que la emisión de un fotón por un electrón en movimiento libre no contradice las leyes de la conservación de la energía y el impulso. En efecto, al parecer nada impide al electrón, en movimiento a cierta velocidad v, reducir su velocidad, transmitiendo al fotón emitido parte de su impulso y energía cinética. No obstante, al escribir las leyes de la conservación de la energía y el impulso, veremos que, simultáneamente, es imposible satisfacer estas leyes. Con el fin de cerciorarse de esto, lo más sencillo es hacer uso de la equivalencia de diversos sistemas inerciales de referencia: en todos ellos las leyes físicas son las mismas. Por esta razón, es suficiente demostrar la imposibilidad de emisión de un fotón por un electrón libre en aunque sólo sea uno de los sistemas inerciales de referencia.

Consideremos el sistema de referencia en el que el electrón está inmóvil. La energía del electrón en dicho sistema antes de irradiar el fotón

$$E_0 = m_0c^2. \tag{1}$$

Después de emitir el fotón, en virtud de la ley de la conservación del impulso, el electrón adquiere cierta velocidad v y la energía del sistema electrón más fotón se proporciona con la expsesión

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + h\nu, \tag{2}$$

donde $h\nu$ es la energía del fotón emitido. Comparando las fórmulas (1) y (2) vemos que satisfacer la ley de la conservación de la energía es imposible, ya que E siempre es mayor que E_0.

Reflexionando sobre los razonamientos aducidos, es fácil comprender que el electrón libre no sólo no puede irradiar, sino que tampoco absorber la luz. Para cerciorarse de esto, es suficiente analizar, simplemente, las fórmulas aducidas en orden inverso: la relación (2) proporciona la energía del sistema electrón más fotón antes de la absorción en el sistema de referencia, donde el impulso sumario del electrón y el fotón es igual a cero, mientras que la relación (1), la energía después de la absorción del fotón.

Es evidente, los razonamientos aducidos sólo son justos para las partículas elementales y no son aplicables para objetos complicados, constituidos por varias partículas elementales, p. ej., para los átomos y moléculas. ¡Los átomos o las moléculas en movimiento libre pueden irradiar y absorber!

El electrón puede emitir o absorber fotones sólo cuando él se mueve con aceleración, p. ej., cuando vuela cerca del núcleo y entra en interacción con su campo eléctrico.

Ante todo señalemos que la transformación del fotón (cuanto gamma) en el par electrón-positrón sólo es posible en presencia de cierta partícula. Sin ella, este proceso es imposible en virtud de la ley de la conservación del impulso. En efecto, supongamos que el hecho se ha consumado, o sea, se ha formado un par electrón-positrón. Siempre existe tal sistema de referencia, en el que el centro de masas del electrón y el positrón está inmóvil, es decir, el impulso total del par formado es nulo. Entonces, en este sistema de referencia también ha de ser igual a cero el impulso del fotón que generó dicho par. Pero esto es imposible, ya que no existe tal sistema de referencia en el que el fotón esté en reposo. Por ello, el fotón puede transformarse en un par electrón-positrón sólo en presencia de una partícula que «tome sobre sí» su impulso.

Es fácil comprender que la energía del fotón, necesaria para el «nacimiento» del par, será tanto menor cuanto mayor sea la masa M de la partícula que se lleva el impulso del fotón. En efecto, mientras dicha partícula sea mayor, menor energía cinética adquirirá en dicho caso. Si $m_0/M \ll 1$, la mencionada energía se puede despreciar. Si el electrón y positrón formados están en reposo, su energía será la mínima de todas las posibles e igual a la energía en reposo del sistema $2m_0c^2$. Por esto, la energía mínima del fotón, con la que es posible la creación del par, se determina con la relación

$$h\nu = 2m_0c^2. \tag{3}$$

Esta energía recibe el nombre de energía de umbral. Poniendo aquí el valor de la masa en reposo del electrón $m_0 = 0{,}91 \cdot 10^{-27}$ g y la velocidad de la luz $c = 2{,}998 \cdot 10^{10}$ cm/s, hallamos que la energía de umbral de formación del par electrón-positrón constituye $163 \cdot 10^{-6}$ erg = $= 1{,}02 \cdot 10^6$ eV. La longitud de onda del cuanto gamma con semejante energía es igual a $\lambda = c/\nu = hc/(2\ m_0c^2) = 1{,}2 \cdot 10^{-10}$ cm =

= 0,012 Å. Con semejantes fotones se tropieza en la radiación cósmica y surgen durante el frenado de las partículas cargadas rápidas en la sustancia, aceleradas en potentes aceleradores.

Ahora, es posible hallar la energía que debe poseer el fotón para que pueda aparecer el par electrón-positrón en la proximidad del electrón en reposo. Razonemos del modo siguiente. Pasemos al sistema de referencia en el que el centro de masas de las tres partículas, es decir, el electrón inicial y el par electrón-positrón formado, está en reposo. Claro está, las propias partículas pueden estar en movimiento. En este sistema de referencia la energía total será la mínima si las tres partículas están en reposo. Semejante caso, precisamente, corresponde a la energía mínima del fotón, necesaria para la creación del par en las cercanías del electrón. En tal caso, despreciamos la energía de la interacción coulombiana de los electrones y el positrón que por el orden de magnitud constituye varios electronvoltios.

Retornando ahora al sistema de referencia del laboratorio, vemos que, después de la aparición del par, las tres partículas deben moverse a igual velocidad. Como la masa de dichas partículas es igual, también lo serán sus impulsos. En virtud de la ley de la conservación del impulso esto significa que el impulso total, poseído por el fotón y el electrón antes de la creación del par, se dividirá en partes iguales entre las tres partículas. Si hasta el nacimiento del par el electrón, en el sistema de referencia del laboratorio, estaba en reposo, después de la aparición del par el impulso p de cada partícula es igual a un tercio del impulso del fotón $h\nu/c$:

$$p = h\nu/3c. \tag{4}$$

Empleando la fórmula relativista, que expresa la energía de la partícula por medio de su impulso, nos cercioramos de que la energía de las tres partículas es la misma e igual a

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} = \sqrt{(h\nu/3)^2 + m_0^2c^4}. \tag{5}$$

Ahora, sólo nos queda hacer uso de la ley de la conservación de la energía. Antes de la aparición del par, la energía en el sistema de referencia del laboratorio era la del fotón $h\nu$ y la energía en reposo del electrón m_0c^2. Después de la creación del par, la energía será igual al valor triple de la energía de cada una de las partículas. Por ello,

$$h\nu + m_0c^2 = 3\sqrt{(h\nu/3)^2 + m_0^2c^4}. \tag{6}$$

Elevando al cuadrado ambas partes de esta igualdad y reduciendo los términos semejantes, hallamos el valor $h\nu$ de la energía de umbral de creación del par cerca del electrón en reposo:

$$h\nu = 4m_0c^2. \tag{7}$$

Prestemos atención a que esta energía supera dos veces el valor

de la energía de umbral del fotón para la generación del par electrón-positrón en la proximidad de una partícula pesada, p. ej., cerca del núcleo de un elemento pesado. Esto quiere decir que sólo la mitad de la energía del fotón se transforma, en la energía en reposo de las partículas creadas. La otra mitad se convierte en cinética. ▲

4. Efecto Doppler. Con seguridad, el lector habrá notado como varía el tono del sonido del silbato de la locomotora cuando el tren pasa junto a nosotros. El alto tono del silbato del tren que se aproxima se vuelve notoriamente más bajo en cuanto la fuente del sonido pasa sin detenerse y comienza a alejarse. Semejante variación de la frecuencia de la señal percibida durante el movimiento de la fuente de sonido (o receptor) lleva el nombre de fenómeno de Doppler. En óptica también tiene lugar este fenómeno: el átomo en movimiento emite luz de una frecuencia diferente en comparación con el inmóvil. Resulta que este fenómeno, típicamente ondulatorio, encuentra correcta explicación desde el punto de vista de las representaciones acerca de la luz como el conjunto de cuantos luminosos, es decir, fotones. Apoyándonos en estas representaciones, muestren que con el movimiento lento de un átomo que irradia la variación relativa de la frecuencia de la luz emitida por él $\Delta\nu/\nu$ se da con la relación

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{v}{c}\cos\theta,$$

donde θ es el ángulo entre la dirección de movimiento del átomo y el sentido del fotón emitido.

△ Como nada sabemos del mecanismo de emisión de la luz por los átomos, sólo queda intentar la aplicación de las leyes de la conservación de la energía y el impulso al acto de emisión del fotón por el átomo en movimiento. El átomo «fijado,» inmóvil, emite un fotón con energía $h\nu$ al pasar el primero de un estado estacionario a otro. La diferencia de energía de estos estados estacionarios no depende de si el átomo está en reposo o en movimiento

Cuando un átomo en movimiento emite un fotón, el impulso del primero varía, puesto que el fotón emitido posee cierto impulso. Por consiguiente, la energía cinética del átomo también varía y la del

Fig. 4.1. Antes de la emisión del impulso del átomo p es igual a la suma algebraica del impulso p_i después de la irradiación y el impulso del fotón p_f

fotón $h\nu'$, emitido por el átomo en movimiento, se diferencia de $h\nu$ debido a la variación de la energía cinética del átomo.

Partiendo de la ley de la conservación de la energía

$$h\nu' - h\nu = \frac{p^2}{2m} - \frac{p_1^2}{2m}, \qquad (1)$$

donde p es el impulso del átomo de masa m antes de la emisión del fotón; p_1, después de la emisión.

Los impulsos inicial y final del átomo se pueden ligar con el impulso del fotón emitido p_f mediante la ley de la conservación del impulso (fig. 4.1):

$$p = p_1 + p_f. \qquad (2)$$

Pasando p_f en la igualdad (2) al primer miembro, elevando al cuadrado la igualdad obtenida y, tomando en consideración que el impulso del fotón es en extremo pequeño en comparación con el del átomo emisor, obtenemos

$$p^2 - 2pp_f \cos\theta \approx p_1^2. \qquad (3)$$

Con ayuda de (3) la ecuación (1) se puede anotar en la forma

$$h\nu' - h\nu = \frac{p}{m} p_f \cos\theta. \qquad (4)$$

¿Cómo escribir la expresión para el impulso del fotón p_f? Como el impulso del campo electromagnético está ligado con la energía del campo W mediante la relación $W = pc$ y la energía del fotón emitido es igual a $h\nu'$, el impulso de este fotón

$$p_f = h\nu'/c. \qquad (5)$$

Poniendo (5) en (4) y tomando en consideración que p/m es la velocidad de movimiento v del átomo que irradia, tenemos

$$\nu' - \nu = \nu' \frac{v}{c} \cos\theta,$$

de donde

$$\nu' = \frac{\nu}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta} \approx \nu \left(1 + \frac{v}{c}\cos\theta\right) \qquad (6)$$

con una precisión de hasta los términos del orden v/c. De esta fórmula se desprende la relación aducida en el planteamiento

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{v}{c}\cos 0.$$

Prestemos atención a la siguiente circunstancia. Si en la fórmula que determina el desplazamiento de frecuencia, hacemos $v = 0$, obtendremos $\Delta\nu = 0$. ¿Quiere decir esto que la luz irradiada por el átomo libre inmóvil tiene la misma frecuencia que la luz que emite el átomo «fijado»? Incluso partiendo de razonamientos intuitivos es obvio que esto no puede suceder debido a los fenómenos de repercusión: la ley de la conservación del impulso requiere que como resultado de la emisión del fotón el átomo libre se ponga en movimiento.

En la fórmula aproximada, antes obtenida, no se tiene en cuenta el fenómeno de repercusión, ya que al deducirla, pasando de (2) a (3), hemos despreciado el impulso del fotón considerándolo pequeño en comparación con el impulso del átomo emisor. Por ello, en la fórmula definitiva no se puede hacer $v = 0$, ya que la solución aducida sólo es cierta al verificarse la condición $h\nu/c \ll mv$. Pero si consideramos la radiación de la luz de un átomo inmóvil, será el fenómeno de repercusión el que determine la variación de la frecuencia.

El desplazamiento de la frecuencia, condicionado por el fenómeno de la repercusión, es fácil de hallar empleando las leyes de la conservación de la energía y el impulso. Escribamos las ecuaciones (1) y (2) para el caso $p = 0$:

$$h\nu' - h\nu = -\frac{p_1^2}{2m}, \qquad 0 = p_1 - \frac{h\nu'}{c}.$$

Poniendo el impulso de la repercusión p_1 de la segunda igualdad en la primera, hallamos

$$\frac{\Delta\nu}{\nu'} = -\frac{h\nu'}{2mc^2}. \tag{7}$$

Así pues, el desplazamiento relativo de la frecuencia, debido al fenómero de repercusión, se determina con la razón entre la energía del fotón y la energía en reposo del átomo emisor. Para los cuantos gamma, emitidos por núcleos atómicos, semejante desplazamiento es considerable. En la banda óptica $\Delta\nu/\nu \ll 1$ y la fórmula (7) se puede anotar en la forma

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{h\nu}{2mc^2}.$$

P. ej., para las líneas de la serie de Balmer en el espectro del átomo de hidrógeno $\Delta\nu/\nu \sim 10^{-9}$.

Claro está, el fenómeno de repercusión también se puede tomar en consideración cuando la luz se emite por un átomo en movimiento. Para ello, al pasar de la fórmula (2) a la (3) hay que conservar el sumando que contiene el cuadrado del impulso del fotón. La expresión definitiva para el desplazamiento relativo de la frecuencia contendrá, además de $(v/c)\cos\theta$, el término $h\nu'/(2mc^2)$ que es el fundamental cuando $v = 0$.

Hasta ahora, hemos considerado el caso no relativista, cuando el átomo que emite se encontraba en movimiento a velocidad v, mucho menor que la de la luz c. Es de interés aclarar cuál será el desplazamiento de la frecuencia, condicionado por el efecto Doppler, si el emisor se mueve a gran velocidad comparable con la de la luz c. Esto se puede hacer si para la energía y el impulso del átomo emisor se emplean expresiones relativistas precisas. No obstante, es más fácil considerar otro ejemplo, relacionado con la aniquilación del par electrón-positrón, que va acompañada de la emisión de dos cuantos

gamma. El análisis de este ejemplo permitirá responder a la pregunta que nos interesa.

Supongamos que antes de la aniquilación la velocidad relativa del electrón y del positrón es pequeña, es decir, podemos considerar que ellos están en reposo. Como, antes de la aniquilación, el impulso de todo el sistema era igual a cero, él seguirá siendo nulo, asimismo, después de la irradiación. Esto quiere decir que los fotones surgidos durante la aniquilación vuelan en sentidos opuestos y tienen impulsos iguales en módulo $h\nu/c$ y, por lo tanto, igual frecuencia ν. Hallamos de inmediato esta frecuencia, empleando la ley de la conservación de la energía: igualando la energía del fotón a la energía en reposo del electrón y el positrón

$$2h\nu = 2m_0c^2,$$

obtenemos

$$\nu = m_0c^2/h. \tag{8}$$

En virtud de (8), la longitud de onda $\lambda = c/\nu$, correspondiente a dicha radiación, es igual a h/m_0c y recibe el nombre de longitud de onda de Compton del electrón.

Ahora, consideremos este mismo proceso de aniquilación del electrón y positrón desde el punto de vista de otro sistema de referencia, con relación al cual el par electrón-positrón, antes de su aniquilación, estaba en movimiento a la velocidad v. Elijamos el sentido de la velocidad v de forma que ella coincida con la dirección de propagación de uno de los fotones emitidos. Designemos con ν_1 la frecuencia del fotón emitido hacia «adelante» y con ν_2, la del emitido hacia «atrás». Entonces, en este sistema de referencia la ley de la conservación del impulso en la proyección sobre la dirección del movimiento del par que se aniquila adquiere la forma

$$\frac{h\nu_1}{c} - \frac{h\nu_2}{c} = \frac{2m_0v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{9}$$

Durante la aniquilación la energía relativista total del par se transforma en la energía de radiación. Por ello, la ley de la conservación de la energía se escribe en la forma

$$h\nu_1 + h\nu_2 = \frac{2m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{10}$$

Del sistema de ecuaciones (9) y (10) es fácil hallar las frecuencias ν_1 y ν_2. Multiplicando ambos miembros de (9) por c y sumándola con la ecuación (10), hallamos ν_1:

$$\nu_1 = \frac{m_0c^2}{h}\sqrt{\frac{c+v}{c-v}} = \nu\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}. \tag{11}$$

Aquí se ha empleado la expresión (8) para la frecuencia ν del fotón,

emitido al aniquilarse el par inmóvil. De modo análogo, sustrayendo de la ecuación (9) la (10), hallamos ν_2:

$$\nu_2 = \nu \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}. \tag{12}$$

Las fórmulas (11) y (12) obtenidas proporcionan la expresión para el efecto longitudinal Doppler en el caso relativista. La frecuencia ν_1 del fotón emitido en el sentido del movimiento es más alta, mientras que la frecuencia ν_2 del fotón, emitido contra el movimiento, es más baja que la frecuencia del fotón emitido por el emisor inmóvil.

Es fácil advertir que cuando $v/c \ll 1$ las fórmulas (11) y (12) dan una expresión corriente para el efecto no relativista Doppler. Con dicho fin, multipliquemos el numerador y denominador del radicando en la fórmula (11) por $c + v$. Después, despreciando en el denominador la magnitud v^2 en comparación con c^2, obtenemos

$$\nu_1 = \nu \sqrt{\frac{(c+v)^2}{c^2-v^2}} \approx \nu \left(1+\frac{v}{c}\right), \tag{13}$$

lo que coincide con la fórmula (6) al ser $\theta = 0$. Por analogía, para $v/c \ll 1$, la fórmula (12) proporciona una expresión que coincide con la (6) si en ésta hacemos $\theta = \pi$.

En el transcurso de todos los razonamientos, tácitamente, por frecuencia hemos entendido la de la radiación registrada por un receptor inmóvil en el sistema dado. La variación de la frecuencia sólo transcurría a cuenta del movimiento de la fuente. En realidad, en el caso de la radiación electromagnética, que se propaga en el vacío, todas las fórmulas obenidas son también ciertas para el movimiento del receptor de la radiación, sólo que en tal caso se debe entender por v la velocidad relativa, es decir, la velocidad de la fuente respecto del receptor. ▲

5. Vela fotónica. Sobre un espejo plano perfecto inmóvil de masa m, por la normal a su superficie, incide una onda luminosa plana. Por el efecto de la fuerza de la presión de la luz el espejo se pone en movimiento. Determinen la velocidad final del espejo y la energía de la onda que de él se refleja, si la energía de la onda incidente es igual a W_0.

△ En el transcurso de todo el libro nos hemos cerciorado múltiples veces de que muchos problemas se pueden resolver sin profundizar en los detalles de los fenómenos físicos que se producen. Con el fin de dar respuesta a gran número de preguntas es sólo suficiente imaginarse el cuadro general de los fenómenos que se estudian y aplicar, correctamente, las leyes fundamentales de la conservación que corresponden. Lo mismo pasa en este problema. La solución dinámica precisa se ve aquí acompañada de grandes dificultades. En efecto,

la energía de la onda reflejada del espejo depende de cómo se mueve éste, mientras que la ley de movimiento del espejo se determina por su interacción con la onda luminosa. Sin embargo, es en absoluto obvio que independientemente del mecanismo de la interacción de la onda electromagnética con el espejo, han de verificarse las leyes de la conservación de la energía y el impulso, ya que el sistema que consideramos, o sea, el espejo y la onda luminosa, es cerrado. La aplicación de dichas leyes da la posibilidad de resolver este problema incluso tomando en consideración los efectos relativistas.

Procedamos a resolver el problema. La energía de la onda luminosa incidente sobre el espejo es igual a W_0, en tanto que designamos con W_1 la energía de la onda reflejada. Primero el espejo está en reposo. Entonces la ley de la conservación de la energía se puede escribir en la forma

$$W_0 + m_0c^2 = W_1 + \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{1}$$

Como la energía del campo electromagnético W está ligada con su impulso p por la relación

$$p = W/c, \tag{2}$$

la ley de la conservación del impulso toma la forma

$$\frac{W_0}{c} = -\frac{W_1}{c} + \frac{m_0v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{3}$$

El signo menos ante el primer término del segundo miembro de la fórmula (3) corresponde a que la onda reflejada del espejo se mueve en sentido inverso. Para excluir la energía de la onda reflejada W_1, multiplicamos ambos miembros de la igualdad (3) por c y la sumamos con (1), término por término. Entonces, obtenemos

$$2W_0 + m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(1 + v/c). \tag{4}$$

Con una simple transformación la expresión (4) puede reducirse a la forma

$$\frac{c+v}{c-v} = \left(1 + \frac{2W_0}{m_0c^2}\right)^2. \tag{5}$$

De aquí, obtenemos la expresión para la velocidad final del espejo v:

$$v = c\,\frac{(1+2W_0/m_0c^2)^2 - 1}{(1+2W_0/m_0c^2)^2 + 1}. \tag{6}$$

Ahora, hallemos la energía de la onda reflejada W_1. Para ello, sustraemos de la expresión (1) la igualdad (3), multiplicada por c:

$$m_0c^2 = 2W_1 + m_0c^2\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}, \tag{7}$$

de donde, con ayuda de (5), hallamos con facilidad la energía de la onda reflejada W_1:

$$W_1 = \frac{W_0}{1 + 2W_0/m_0c^2}. \qquad (8)$$

Es de interés señalar que la energía de la onda reflejada no puede superar la mitad de la energía en reposo del espejo, por muy grande que sea la energía de la onda incidente. Eliminando la unidad en el denominador de (8), aumentamos el segundo miembro, por esto,

$$W_1 < \frac{W_0}{2W_0/m_0c^2} = \frac{m_0c^2}{2}.$$

Así pues, mientras mayor es la energía de la onda incidente, tanta mayor parte de dicha energía se transmite al espejo. Siendo $W_0 \gg m_0c^2$, prácticamente, toda la energía de la onda se transmite al espejo. Se refleja sólo una pequeña parte de la energía igual a $m_0c^2/2$, como acabamos de ver. Remarquemos una vez más: ¡hemos obtenido este resultado sin profundizar en absoluto en el mecanismo de interacción de la onda electromagnética con la sustancia de la que está hecho el espejo!

Es curioso aducir otro caso límite, cuando la energía de la onda incidente es mucho menor que la energía en reposo del espejo: $W_0 \ll m_0c^2$. En este caso no relativista las fórmulas (6) y (8) se pueden simplificar. En el denominador de la expresión (6) podemos despreciar, en comparación con la unidad, el segundo sumando entre paréntesis, mientras que en el numerador, al elevar al cuadrado el paréntesis, hay que conservar el producto doble, ya que las unidades se eliminan entre sí. Como resultado, obtenemos

$$v/c \approx 2W_0/m_0c^2. \qquad (9)$$

Como con $x \ll 1$ es cierta la fórmula aproximada $(1 + x)^{-1} \approx 1 - x$, la expresión (8) si $W_0 \ll m_0c^2$ se puede reducir a la forma

$$\frac{\Delta W}{W_0} = \frac{W_0 - W_1}{W_0} \approx \frac{2W_0}{m_0c^2}. \qquad (10)$$

De estas relaciones se desprende que, en tal caso, la onda se refleja casi por completo del espejo, transmitiéndole sólo una insignificante parte de su energía. Por esto, la «vela fotónica» sólo puede ser eficaz cuando la energía de la onda que sobre ella incide es comparable con la energía en reposo. ▲

6. **El efecto fotoeléctrico y los rayos X.** Sobre la bolita de un electrómetro inciden los rayos X. El ángulo de desviación de la aguja cesa de variar cuando la diferencia de potencial entre la bolita del electrómetro y la tierra alcanza el valor $U = 8$ kV. ¿Cuál es la longitud de onda de los rayos X incidentes? ¿Qué tensión V se ha alimentado a los electrodos del tubo de rayos X?

△ Ante todo, aclaremos de dónde aparece la carga en la bolita del electrómetro. Si éste no estaba previamente cargado, la única causa de la aparición de las cargas debe ser el efecto fotoeléctrico provocado por los rayos X. Al arrancar (expulsar) los electrones la bolita del instrumento se carga positivamente. Pero con el crecimiento de la carga en la bolita, el creciente campo eléctrico no permite que los electrones expulsados puedan escapar si su energía cinética no es suficientemente grande. Tomando en consideración el efecto de frenado del campo eléctrico que surge, la ecuación de Einstein, es decir, la ley de la conservación de la energía para el acto elemental del efecto fotoeléctrico, se escribe en la forma

$$h\nu = A + \frac{mv^2}{2} + eU. \qquad (1)$$

En esta expresión A es el trabajo para arrancar el electrón del material de la bolita del electrómetro; v, la velocidad del electrón expulsado a gran distancia de la bolita; U, la diferencia de potencial entre la bolita del electrómetro y la tierra; e, la magnitud absoluta de la carga del electrón.

Es evidente, que el aumento de la carga de la bolita continuará hasta que su potencial alcance un valor tal, con el que todos los electrones expulsados retornen al electrómetro. Con otras palabras, U en el segundo miembro de la ecuación (1) alcanza el valor máximo cuando la velocidad del electrón arrancado v en el infinito se anula.

De este modo, con la frecuencia prefijada ν (de los rayos X, el valor estacionario de la tensión U en el electrómetro se determina con la relación

$$h\nu = A + eU. \qquad (2)$$

De la ecuación (2) podríamos determinar la frecuencia de los rayos X incidentes, según la tensión conocida U, si conociéramos el trabajo de expulsión A. No obstante, en el planteamiento del problema no se indica de qué material está hecha la bolita del electrómetro, pero está claro en absoluto que es metálica. El valor característico del trabajo para arrancar los electrones de los metales constituye varios electronvoltios (p. ej., para la plata 4,7 eV). Pero el valor prefijado de la tensión en el electrómetro es igual a 8 kV, es decir, el segundo término en el segundo miembro de la ecuación (2) es unos tres órdenes mayor que el primero. Por esta razón, es posible despreciar la magnitud A en comparación con eU. De resultas, obtenemos

$$h\nu = eU, \qquad (3)$$

de donde obtenemos para la longitud de onda λ de los rayos X

$$\lambda = c/\nu = ch/eU.$$

Poniendo los valores numéricos obtenemos $\lambda \approx 1{,}5 \cdot 10^{-10}$ m = = 0,15 nm. Claro está, éste es el valor límite, mínimo posible, de la longitud de onda. Con ello, en el espectro de los rayos X puede haber longitudes de onda mayores y de cualquier intensidad.

Con objeto de dar respuesta a la segunda pregunta del problema nos queda aclarar cuál debe ser la tensión de los electrodos del tubo de rayos X para que la longitud de onda λ hallada sea la menor en el espectro irradiado.

Los rayos X pueden ser de dos tipos: radiación característica y de frenado. La primera surge al pasar los electrones entre profundos niveles de energía del átomo cuando éste se excita como resultado del choque con un electrón rápido. Lo mismo que la radiación óptica de átomos por separado, la radiación característica de rayos X consta de líneas aisladas discretas, con la particularidad de que para cada elemento químico es característico su conjunto de líneas. La radiación de frenado de rayos X se emite por los propios electrones incidentes durante su deceleración en la sustancia del anticátodo del tubo de rayos X. Esta radiación, a diferencia de la característica, tiene espectro continuo. Al considerar el acto elemental de la radiación de frenado podemos cerciorarnos de que el espectro continuo tiene un límite de ondas cortas λ_0 y ligarlo con la tensión acelerante V en el tubo de rayos X.

Como hemos visto, el electrón libre en movimiento uniforme no irradia. Por ello, los rayos X sólo surgen durante la interacción del electrón acelerado con la sustancia del anticátodo. Si consideramos que con esto toda la energía cinética del electrón se puede transformar por completo en radiación, la frecuencia límite ν_0 puede calcularse de inmediato de la relación

$$h\nu_0 = eV. \tag{4}$$

Aquí, eV es el trabajo realizado al acelerar el electrón con las fuerzas del campo eléctrico acelerador del tubo de rayos X.

No obstante, la aplicación de sólo la ley de la conservación de la energía puede conducir a la obtención de valores incorrectos de las magnitudes de umbral, ya que semejante transformación energética puede ser incompatible con la ley de la conservación del impulso. Con semejante ejemplo ya hemos tropezado en el problema 3 al considerar la creación por el fotón del par electrón-positrón cerca del electrón en reposo. Por esta razón, para determinar el límite de ondas cortas del espectro continuo de la radiación de frenado de los rayos X, hablando en rigor, hay que aplicar al acto elemental tanto la ley de la conservación de la energía, como la ley de la conservación del impulso.

La emisión del fotón de rayos X se puede producir cuando el electrón vuela en las proximidades de algún núcleo de la sustancia del anticátodo, sufriendo el efecto de un fuerte campo eléctrico. En tal

caso, el electrón puede transmitir al núcleo parte de su impulso, lo que asegura la conservación de la energía total y el impulso de todo el sistema. Como la masa del núcleo es mucho mayor que la del electrón, al transcurrir el acto elemental de interacción con el electrón, durante el que nace el fotón de rayos X, el núcleo puede «aceptar» cualquier impulso, sin recibir, con ello, ni una gota de energía. Por ello, no entrará en contradicción con la ley de conservación del impulso el proceso con el que el electrón incidente se detiene gastando toda su energía cinética sólo para la emisión del fotón. A este proceso corresponde, precisamente, la ecuación (4).

En los razonamientos sólo hemos hecho uso de la circunstancia de que la masa del electrón incidente es mucho menor que la del núcleo. No tiene importancia qué núcleo participa en el proceso. Por ello, el límite superior de la frecuencia de la radiación de frenado ν_0 no depende del material del anticátodo. Como al emitir el fotón con una energía $h\nu_0$ el electrón transmite a éste toda su energía, es plenamente evidente que la tensión de aceleración V en el tubo, la frecuencia de la radiación característica no puede ser mayor que el valor ν_0 determinado con la ecuación (4).

Ahora, para responder a la segunda pregunta del problema sólo hay que comparar las fórmulas (3) y (4). Como el valor estacionario de la diferencia de potencial U entre la bolita del electrómetro y la tierra se determina, precisamente, durante el efecto fotoeléctrico con el límite superior de las frecuencias de los rayos X incidentes, la tensión aceleradora en el tubo de rayos X V es igual a U, o sea, a 8 kV. ▲

7. **Haz electrónico estrecho.** Con el fin de reducir el tamaño de la mancha en la pantalla del tubo de rayos catódicos, después del cátodo se pueden instalar dos diafragmas con orificios a cierta distancia l entre ellos (fig. 7.1). Demuestren que para el segundo orificio existe un diámetro óptimo correspondiente al tamaño mínimo de la mancha de la pantalla.

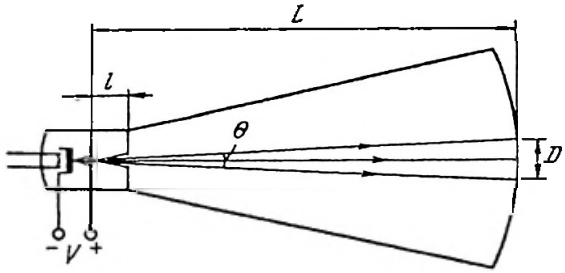


Fig. 7.1. Con el fin de disminuir el tamaño de la mancha en la pantalla es posible hacer uso de dos diafragmas con agujeros

△ Después de pasar el intervalo de aceleración, al que se alimenta la tensión constante V, los electrones se mueven por el tubo uniformemente, a impulsos prácticamente iguales en módulo p, determinados con la relación

$$p^2/2m = eV. \tag{1}$$

Aquí, para la energía cinética de los electrones se ha empleado una expresión no relativista, ya que en la práctica, con tensiones de aceleración de un orden de 10 kV, los electrones se aceleran hasta velocidades que no superan 0,2 de la velocidad de la luz. Con ello, las correcciones relativistas constituyen un total del 2%.

Para empezar, consideremos que el electrón es una partícula clásica cuyo movimiento se describe con las leyes de Newton. Supongamos que el orificio en el primer diafragma es tan pequeño que lo podemos considerar como puntual. En semejante caso, el diámetro de la mancha en la pantalla del tubo será tanto menor cuanto menor sea el orificio en el segundo diafragma. En efecto, en el haz los electrones están en movimiento rectilíneo y de la fig. 7.2 se desprende que el tamaño angular de la mancha θ se determina con la relación

$$\theta = d/l, \tag{2}$$

donde d es el diámetro del orificio en el segundo diafragma. Por ello es evidente que si los electrones se condujeran en realidad como partículas clásicas, el tamaño de la mancha en la pantalla del tubo se podría hacer cuán se quisiera pequeña. Pero en la realidad esto no es así. Si reducimos ilimitadamente el diámetro del orificio en el segundo diafragma, las representaciones clásicas acerca del movimiento del electrón por una trayectoria determinada resultarán, tarde o temprano, inaplicables. ¿Cómo determinar a partir de qué momento comenzarán a manifestarse en nuestro sistema las regularidades cuánticas y a qué consecuencias llevarán respecto del tamaño de la mancha en la pantalla?

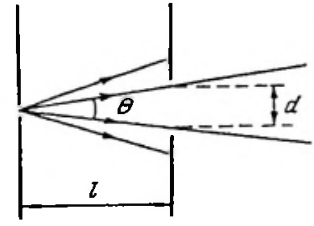


Fig. 7.2. La dimensión angular del haz θ depende del diámetro d del agujero en el segundo diafragma

La respuesta a esta pregunta se puede obtener con ayuda de las relaciones de incertidumbre o indeterminación de Heisenberg que establecen los límites de aplicación del procedimiento clásico de descripción. Si el electrón pasó por el orificio en el segundo diafragma, la indeterminación en el valor de su coordenada en el sentido de través del haz Δx se determina con la dimensión del orificio d:

$$\Delta x \approx d. \tag{3}$$

En virtud de la relación entre las incertidumbres, al pasar por dicho

orificio el electrón adquiere un impulso incontrolable Δp_x, perpendicular al eje del haz:

$$\Delta p_x \approx h/\Delta x \approx h/d. \tag{4}$$

Debido a esto, después de pasar el diafragma surge una indeterminación en la dirección de movimiento del electrón, condicionada por el efecto de las regularidades cuánticas. Para caracterizar esta indeterminación es cómodo introducir el ángulo $\theta_{\text{cuán}}$ de acuerdo con la relación

$$\theta_{\text{cuán}} = \frac{\Delta p_x}{p} \approx \frac{h}{pd}. \tag{5}$$

Así pues, como se deduce de la fórmula (5), gracias a los efectos cuánticos, al disminuir el diámetro del orificio d, se produce el ensanchamiento del haz y, de resultas, el aumento del tamaño de la mancha en la pantalla del tubo. Por lo visto, sólo se debe disminuir el orificio en el diafragma hasta que la difuminación del haz $\theta_{\text{cuán}}$ se iguale con el tamaño angular θ determinado por las trayectorias clásicas de los electrones: $\theta_{\text{cuán}} = \theta$. Haciendo uso de las relaciones (5) y (2), partiendo de dicha condición, determinamos la dimensión óptima del orificio en el segundo diafragma:

$$d \approx \sqrt{hl/p}. \tag{6}$$

Si hacemos el diámetro del orificio menor que esta magnitud, el diámetro de la mancha aumentará debido a los efectos cuánticos.

Podemos llegar al resultado expresado con la fórmula (6) por otra vía, sin emplear las relaciones de las indeterminaciones de Heisenberg. El efecto de las regularidades cuánticas se manifiesta en que el electrón posee propiedades ondulatorias que conducen a fenómenos de difracción. La longitud de onda λ, correspondiente al electrón, depende de su impulso y determínase con la relación de De Broglie:

$$\lambda = h/p. \tag{7}$$

Con el fin de emplear esta relación para dar respuesta a la pregunta del problema, ante todo, hay que comprender que a la representación clásica del movimiento de los electrones por determinadas trayectorias corresponde la aproximación de la óptica geométrica, en la que la descripción de la propagación de las ondas se efectúa con ayuda de la noción de rayos. En pocas palabras, a las trayectorias clásicas corresponden los rayos. En el experimento que consideramos, al movimiento rectilíneo clásico de los electrones entre los diafragmas y la pantalla corresponde un haz de rayos rectilíneos. Con esta aproximación, cuanto menor sea el tamaño del orificio, tanto menor será el tamaño de la mancha en la pantalla, lo que plenamente corresponde a la fórmula (2). Pero, a fin de cuentas, la disminución del tamaño

del orificio conducirá a la aparición de fenómenos de difracción. En cualquier aparato éstos provocan desviaciones respecto de la ley geométrica de propagación de los rayos en ángulos de un orden de la razón entre la longitud de onda y el tamaño del obstáculo. Por esto, la dimensión angular característica θ_{on} de la ampliación por difracción al pasar la onda por un orificio de diámetro d, será

$$\theta_{on} = \lambda/d. \qquad (8)$$

Si ponemos aquí la longitud de onda de De Broglie del electrón de la fórmula (7), para el ensanchamiento angular del haz, a cuenta de la manifestación de los efectos cuánticos, obtendremos la expresión anterior (5).

Aducimos las estimaciones numéricas para la dimensión óptima del orficio en el segundo diafragma. Siendo la tensión acelerante de $V = 10$ kV, el impulso del electrón constituye, como sigue de la fórmula (1), $p = 5{,}4 \cdot 10^{-18}$ g·cm/s. Tomemos la distancia entre los diafragmas l igual a 1 cm. Entonces, de acuerdo con la fórmula (6), obtenemos para el diámetro óptimo $d = 3{,}5 \cdot 10^{-5}$ cm. El tamaño de la mancha D en la pantalla, alejada del diafragma a la distancia L, como se desprende de la fig. 7.1, se calcula por la fórmula

$$D = L \cdot \theta = \frac{d}{l} L$$

y con $L = 50$ cm no supera los $2 \cdot 10^{-3}$ cm.

En la práctica no hay necesidad de obtener una mancha tan pequeña. Por esta razón, el tamaño del orificio en el diafragma se puede hacer mayor. Con ello, los efectos cuánticos no se manifestarán en el movimiento de los electrones y podemos calcular sus trayectorias según las leyes de mecánica clásica.

Como es obvio de la solución aducida de este problema, una representación evidente de los límites para aplicar la descripción clásica del movimiento de las partículas se puede obtener realizando la estimación de la longitud de onda de De Broglie que les corresponde. En el ejemplo que hemos examinado, de acuerdo con la fórmula (7), dicha longitud de onda $\lambda = 10^{-9}$ cm. Siendo mayores las energías de los electrones, la longitud de onda de De Broglie será aún menor y su movimiento en los aparatos macroscópicos puede describirse del modo clásico. P. ej., en la cámara de Wilson la traza de la partícula cargada es una cadena de gotas de agua, cada una de unos 10^{-3} cm de diámetro. En semejantes condiciones, cuando la coordenada transversal de la partícula en vuelo se prefija con tal indeterminación ella, precisamente, puede ser considerada como una partícula clásica en movimiento por la trayectoria. ▲

8. El átomo de hidrógeno y las relaciones de indeterminación. La aplicación de las relaciones de indeterminación al movimiento del electrón en el átomo muestra que la descripción clásica no puede

ser aquí empleada y hay que hacer uso de las leyes cuánticas. El principio de indeterminación o incertidumbre es la tesis fundamental de la teoría cuántica que no sólo establece los límites de aplicación de las representaciones clásicas, sino también permite investigar las propiedades de los sistemas cuánticos. Consideren el átomo de hidrógeno empleando las mencionadas relaciones. Estimen el tamaño del átomo y la energía de enlace del electrón en el estado principal (es decir, la energía de ionización).

△ Para responder a las preguntas planteadas es suficiente, en realidad, utilizar la relación de indeterminación de Heinsenberg que liga la incertidumbre de los valores de la coordenada del electrón y la correspondiente proyección de su impulso:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \approx h. \tag{1}$$

Con esto, podemos eludir el empleo de una detallada teoría, basándonos en el modelo planetario de Rutherford. De acuerdo con este modelo el electrón está en movimiento por una órbita en torno del núcleo y su impulso está dirigido por la tangente a la trayectoria. Por esta causa, por medida de la indeterminación de la posición del electrón es lógico tomar la longitud de la órbita $2\pi r$, mientras que como medida de la indeterminación del impulso, el propio impulso del electrón p. Esto significa que para el electrón en el átomo, la relación (1) se puede escribir en la forma

$$2\pi r \cdot p \approx h$$

o bien, introduciendo en lugar de h la magnitud $\hbar = h/2\pi$,

$$r \cdot p \approx \hbar. \tag{2}$$

El estado fundamental del átomo es el correspondiente a la energía mínima posible. En el modelo nuclear la energía del átomo E contiene la energía cinética del electrón $p^2/2m$ y a la energía potencial de interacción del electrón con el núcleo $-e^2/r$:

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r}. \tag{3}$$

En la teoría clásica el impulso del electrón, con el radio prefijado de la órbita r, se determina con ayuda de la segunda ley de Newton:

$$mv^2/r = e^2/r^2. \tag{4}$$

Expresando de aquí el valor $p = mr$ y poniéndolo en (3), obtenemos

$$E = -e^2/2r. \tag{5}$$

Como se desprende de esta fórmula, la energía del átomo es igual a cero cuando el electrón se encuentra en una órbita de radio infinitamente grande, y tiende a un valor negativo infinitamente grande cuan

do el electrón se aproxima al núcleo. Así pues, la energía de enlace del electrón es igual a cero en el primer caso e infinitamente grande en el segundo. Esto quiere decir, que la mecánica clásica no puede explicar en general por qué el átomo tienen una dimensión finita y energía de enlace determinada.

Pero en el micromundo la segunda ley de Newton es incierta. Como sigue de la relación de indeterminación (2), al disminuir el radio del átomo r el impulso del electrón p crece como $1/r$, o sea, no de la forma que le adjudica la segunda ley de Newton (4), sino que con mayor rapidez. De resultas, al disminuir r la energía cinética crece a mayor velocidad de la que disminuye la potencial, de modo que si $r \to 0$ la energía total del átomo, calculada con la fórmula (3), crece de forma ilimitada. De aquí, de inmediato es evidente que el electrón no puede «caer» sobre el núcleo y el átomo ha de tener tamaño finito. Con el fin de estimar el tamaño y la energía del átomo en el estado fundamental, podemos hallar el mínimo de la expresión (3) expresando en ella p (o bien r) con ayuda de la relación (2):

$$E \approx \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2 p}{\hbar}. \tag{6}$$

Igualando a cero la derivada respecto de p del segundo miembro, hallamos el valor del impulso p_0 con el que la energía total es la mínima:

$$p_0 = me^2/\hbar. \tag{7}$$

Como se desprende de la relación (2), el valor del radio correspondiente a semejante impulso

$$r_0 = \hbar^2/me^2 = 0{,}53 \cdot 10^{-8} \text{ cm}. \tag{8}$$

Poniendo estos valores de r_0 y p_0 en la fórmula (3) (o bien el valor de p_0 en la fórmula (6)), hallamos la energía del átomo en el estado fundamental

$$E_0 = -me^4/2\hbar^2 = -13{,}53 \text{ eV}. \tag{9}$$

De modo que para ionizar el átomo de hidrógeno es necesaria una energía de 13,53 eV.

Según el sentido de la solución era de esperar que obtendríamos sólo el orden correcto de las magnitudes. Sin embargo, las expresiones halladas para el radio r_0 y la energía E_0 coinciden con los valores que ofrece el modelo del átomo de hidrógeno de Bohr, basado en la idea de la cuantización del momento de impulso del electrón. Como vemos, el tamaño del átomo y la energía de enlace del electrón se pueden determinar sin recurrir a las reglas de cuantificación, empleando únicamente la relación de indeterminaciones. A la coincidencia de las estimaciones aproximadas obtenidas más arriba con los valores precisos de las correspondientes magnitudes no se le debe dar importancia demasiado grande. Sólo es significativo que la relación de indeterminaciones permite hallar el orden correcto de dichas magnitu-

des. Con esto, el estado fundamental del átomo se determina mediante un compromiso, con el cual la energía total tiene el valor mínimo posible tolerable por las relaciones de indeterminación.

Señalemos que el enfoque considerado en este problema, basado en las relaciones de indeterminación, proporciona una figura interna no contradictoria de la estructura del átomo y a diferencia de la teoría de Bohr da la posibilidad de comprender por qué el átomo de hidrógeno en su estado fundamental posee simetría esférica. ▲

9. El núcleo atómico y las relaciones de indeterminación. De los experimentos de Rutherford para la dispersión de las partículas α se sabe que el núcleo atómico tiene un diámetro de un orden de $10^{-12} - 10^{-13}$ cm. Considerando que el núcleo consta de nucleones (es decir, de protones y neutrones), con ayuda de las relaciones de indeterminación, estimar la energía de enlace del nucleón en el núcleo, o sea, la energía específica de enlace.

△ Este problema se parece mucho al anterior. Pero al emplear las relaciones de indeterminación, aquí surgen diferencias relacionadas con que nosotros no conocemos el carácter de las fuerzas que mantienen el nucleón en el núcleo. Con otras palabras, es desconocida la dependencia entre la energía potencial del nucleón y su posición dentro del núcleo. Por esta razón, si para el átomo fue posible hallar tanto su tamaño como la energía de enlace del electrón, para el núcleo el empleo de la relación de indeterminaciones permite sólo ligar entre sí las magnitudes análogas.

Vamos a considerar que el nucleón se encuentra en cierto lugar dentro del núcleo, o sea, la indeterminación de su posición se caracteriza por las dimensiones del núcleo. Entonces, la relación de indeterminaciones proporciona la siguiente estimación para el impulso del nucleón:

$$p \approx \hbar/r_0, \tag{1}$$

donde r_0 es el radio del núcleo. El valor de la velocidad de un nucleón de masa $M = 1{,}7 \cdot 10^{-24}$ g con radio del núcleo $r_0 \approx 10^{-13}$ cm, correspondiente al mencionado impulso, constituye varias décimas de la velocidad de la luz. Por esto, durante las estimaciones podemos considerar que el nucleón es no relativista. Así pues, la energía cinética E_c del nucleón de masa M en el núcleo debe ser de un orden de

$$E_c = \frac{p^2}{2M} \approx \frac{\hbar^2}{2Mr_0^2} \approx 10 \text{ MeV}. \tag{2}$$

Como en el núcleo el nucleón se encuentra en estado ligado, el valor absoluto de su energía potencial debe ser mayor que 10 MeV. Así pues, la profundidad del pozo de potencial, por el que está en movimiento el nucleón en el núcleo, no puede ser, en todo caso, menor que el valor indicado. La profundidad de dicho pozo de potencial proporciona una estimación aproximada de la energía de enlace para un nucleón.

La estimación obtenida concuerda correctamente con el valor experimental de la energía específica de enlace, hallado partiendo de mediciones con ayuda de la espectroscopia de masas y que para la mayoría de los núcleos es igual a 8 MeV/nucleón.

La energía de 10 MeV constituye sólo el 1 % de la energía en reposo del nucleón $Mc^2 \approx 1$ GeV. Por esta causa, podemos considerar en realidad, que el núcleo consta de nucleones aislados, cuya energía de enlace es pequeña en comparación con su energía en reposo.

Es de interés señalar que estos mismos argumentos, basados en las relaciones de indeterminaciones, muestran que en la composición del núcleo no pueden entrar, además de los protones, los electrones como se suponía en uno de los modelos tempranos del núcleo atómico, que existía antes del descubrimiento del neutrón. En efecto, si el electrón está localizado en un ámbito de una dimensión del orden $r_0 \approx 10^{-13}$ cm, él será ultrarrelativista, de lo que nos cercioramos con ayuda de la relación (1). Para estimar su energía puede emplearse la expresión $E_c = pc$, lo que nos da $E_c \approx 0{,}2$ GeV. Este enorme valor de la energía del electrón es incompatible en absoluto con el valor característico de la energía de enlace del núcleo recalculada para una partícula, igual a unos 8 MeV, sin hablar de que 0,2 GeV es 400 veces mayor que la energía en reposo del electrón, que sólo constituye 0,5 MeV. ▲

10. Principio de equivalencia. Una bolita de masa m está suspendida dentro de un tanque vacío de un hilo imponderable de largura l (fig. 10.1). En el momento inicial $t = 0$ el tanque comienza a desplazarse en dirección horizontal con aceleración constante a. ¿Qué movimiento realizará con ello la bolita? ¿Qué variará si el tanque se llena de agua de antemano?

△ Este problema recuerda en alto grado el primer problema del capítulo en el que el punto de suspensión del péndulo comenzaba a moverse a velocidad constante y era necesario determinar el posterior movimiento del péndulo. Como pudimos apreciar, gracias al principio de relatividad, la solución del problema se facilitaba considerablemente al pasar al sistema de referencia ligado con el punto de suspensión. En nuestro caso, el principio de relatividad de nada nos servirá, ya que tal sistema de referencia no es inercial debido al movimiento acelerado del punto de suspensión. Pero, a pesar de todo, en el presente problema, asimismo, el paso a un nuevo sistema de referencia donde el punto de suspensión está inmóvil, facilita la solución. Con ello, hay que hacer uso de una de las más fun-

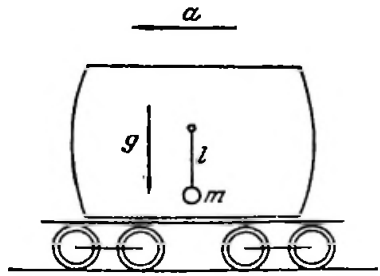


Fig. 10.1. El tanque comienza a moverse con aceleración constante a

damentales leyes de la naturaleza, el llamado principio de equivalencia que yace en la base de la teoría relativista de la gravitación.

Con el fin de formular el principio de equivalencia consideremos el siguiente experimento imaginario. Supongamos que un laboratorio cerrado, p. ej., la cabina de un ascensor, está en movimiento con aceleración constante a respecto a cierto sistema inercial de referencia, en la región del espacio donde está ausente el campo de gravitación. Entonces, en el ascensor, todos los cuerpos libres, que no sufren aceleración con relación al sistema inercial, respecto del ascensor tendrán igual aceleración $-a$. El observador que se encuentra en el ascensor cerrado y que no tiene la posibilidad de «mirar al exterior», por la conducta de dichos cuerpos no puede llegar a la conclusión de si el ascensor está en movimiento con aceleración a o bien está en reposo en un campo homogéneo de gravedad, cuya intensidad g es igual a $-a$. En efecto, con la acción de semejante campo de gravedad todos los cuerpos libres en el ascensor en reposo se moverán con igual aceleración $g = -a$.

Tal equivalencia del campo de gravedad y del movimiento acelerado del sistema de referencia es cierta para cualquier fenómeno mecánico: todos los fenómenos mecánicos en el ascensor en movimiento con aceleración transcurren del mismo modo que en el ascensor inmóvil, pero ubicado en el campo de gravedad. Después de enunciar este principio, Einstein lo difundió, igual que el principio de relatividad, no sólo a los fenómenos mecánicos, sino también, en general, a todos los fenómenos físicos.

La aplicación del principio de equivalencia permite simplificar el examen de muchos fenómenos físicos y transformar en trivial nuestro problema. En lugar de considerar el tanque en movimiento con aceleración, vamos a imaginarnos que él está inmóvil, pero que sobre todos los cuerpos situados en él actúa el campo gravitacional

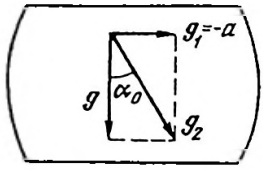


Fig. 10.2. En el sistema de referencia ligado con el tanque actúa un efectivo campo de gravedad g_2

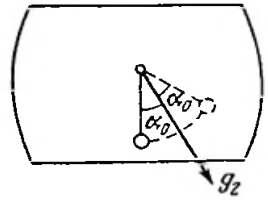


Fig. 10.3. El péndulo realiza oscilaciones con amplitud α_0 junto a la dirección prefijada por el vector g_2

$g_1 = -a$ (fig. 10.2). Adicionándose con el campo real de gravitación de la Tierra, este campo proporciona un campo de gravedad efectivo, cuya intensidad $g_2 = g + g_1 = g - a$. El vector g_2 está desviado

de la vertical real en el ángulo α_0, cuya tangente se determina

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = a/g. \tag{1}$$

La intensidad del campo de gravedad efectivo se determina con el teorema de Pitágoras:

$$g_2 = \sqrt{g^2 + a^2}. \tag{2}$$

Es obvio que en la posición de equilibrio el hilo del péndulo está dirigido a lo largo del vector g_2. En el momento inicial, cuando el tanque comienza a moverse con aceleración a, la bolita está inmóvil y el hilo en posición vertical, es decir, el péndulo está desviado a la izquierda en el ángulo α_0 de la nueva posición de equilibrio (fig. 10.3). Por esta razón, en el tanque vacío, el péndulo efectuará oscilaciones respecto a la nueva posición de equilibrio con amplitud angular α_0. Si la aceleración del tanque a es pequeña en comparación con la aceleración de la caída libre g, la amplitud de las oscilaciones es pequeña y éstas serán armónicas. El ángulo de desviación de la nueva posición de equilibrio $\alpha(t)$ variará, en tal caso, en el tiempo según la ley

$$\alpha(t) = -\alpha_0 \cos \omega t, \tag{3}$$

donde, con pequeña amplitud, la frecuencia ω se determina con la relación

$$\omega_2 = \frac{g_2}{l} = \frac{\sqrt{g^2 + a^2}}{l} \approx \frac{g}{l}\left(1 + \frac{\alpha_0^2}{2}\right). \tag{4}$$

En presencia del rozamiento estas oscilaciones se amortiguan gradualmente y el péndulo se detendrá en la nueva posición de equilibrio.

Empleando el principio de equivalencia, es fácil dar, asimismo, respuesta a la pregunta de cómo se comportará el péndulo en el tanque lleno de agua. Debido a la alta viscosidad, las oscilaciones cesarán, prácticamente, de inmediato y el péndulo se parará en la posición de equilibrio. Si la densidad de la bolita es mayor que la del agua, la posición de equilibrio del péndulo será la misma que en el tanque vacío. Pero si la densidad de la bolita es menor que la del agua, el ángulo de desviación del hilo en la posición de equilibrio es distinto de π. Al llenar el tanque de agua la bolita emergerá por el efecto de la fuerza ascensional, dirigida en sentido inverso a la de la gravedad. Durante el movimiento del tanque con aceleración a la fuerza ascensional está dirigida en sentido contrario al vector g_2 (fig. 10.4). ▲

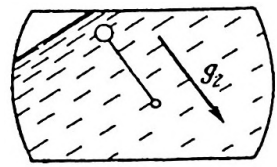


Fig. 10.4. En el tanque lleno de agua la ligera bolita ocupa la posición invertida